I. **Výrazy typu** $\left\| \frac{0}{0} \right\|$:

1. Vypočtěte $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - e^{3x}}{\sin x}$.

Když dosadíme do funkce $x = 0$, dostaneme $\dfrac{e^0 - e^0}{0} = \left\| \dfrac{0}{0} \right\|$. Proto použijeme l'Hospitalovo pravidlo: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - e^{3x}}{\sin x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\left(e^x - e^{3x}\right)'}{(\sin x)'} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 3e^{3x}}{-\cos x}$.

Po dosazení $x = 0$ do tohoto výrazu, vyjde $\dfrac{e^0 - 3e^0}{-\cos 0} = \dfrac{-2}{-1} = 2$.

Tedy $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - e^{3x}}{\sin x} = 2$

2. Vypočtěte $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x - \sin x}{x^3}$.

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \left\| \frac{0}{0} \right\| = \lim_{x\to 0} \frac{(x - \sin x)'}{\left(x^3\right)'} = \lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{3x^2}.$$

Protože pro $x = 0$ vyjde znovu $\left\| \dfrac{0}{0} \right\|$, použijeme opět l'Hospitalovo pravidlo.

Potom $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1 - \cos x)'}{(3x^2)'} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{6x} = \left\| \dfrac{0}{0} \right\| = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x}{6} = \dfrac{1}{6}$.

3. Vypočtěte $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x \sin x}{\cos x - 1}$.

$$\lim_{x\to 0} \frac{x \sin x}{\cos x - 1} = \left\| \frac{0}{0} \right\| = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x + x\cos x}{-\sin x} = \left\| \frac{0}{0} \right\| = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x + \cos x + x(-\sin x)}{-\cos x} = \frac{1 + 1 + 0}{-1} = -2$$

4. Vypočtěte $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3\sin^2 x}{x\cos x}$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{3\sin^2 x}{x\cos x}=\left\|\frac{0}{0}\right\|=\lim_{x\to 0}\frac{3\cdot 2\sin x\cos x}{\cos x + x(-\sin x)}=\frac{6\cdot 0\cdot 1}{1}=0\,.$$

5. Vypočtěte $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x-\mathrm{e}^x+1}{x\cdot(\mathrm{e}^x-1)}$.

$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x-\mathrm{e}^x+1}{x\cdot(\mathrm{e}^x-1)}=\left\|\dfrac{0}{0}\right\|$ Použijeme l'Hospitalovo pravidlo: $=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1-\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x-1)+x\,\mathrm{e}^x}=\left\|\dfrac{0}{0}\right\|$ opět

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{-\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^x+x\,\mathrm{e}^x}=\frac{-1}{1+1+0}=-\frac{1}{2}\,.$$

6. Vypočtěte $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left(\mathrm{e}^x+x\right)}{x}$.

Po dosazení $x=0$ je $\mathrm{e}^0+0=1$ a tedy $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left(\mathrm{e}^x+x\right)}{x}=\left\|\dfrac{0}{0}\right\|$

Užitím l'Hospitalova pravidla dostaneme $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{\mathrm{e}^x+x}\left(\mathrm{e}^x+1\right)}{1}=2\,.$

II. <u>Výrazy typu</u> $\left\|\dfrac{\infty}{\infty}\right\|$:

1. Vypočtěte $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$.

Protože pro $x\to\infty$ platí $\ln x\to\infty$ a $\sqrt{x}\to\infty$, použijeme l'Hospitalovo pravidlo.

Tedy $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}=\left\|\dfrac{\infty}{\infty}\right\|=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\left(\ln x\right)'}{\left(\sqrt{x}\right)'}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}}\,.$

Složený zlomek převedeme na jednoduchý $= \lim\limits_{x\to\infty} \frac{2\sqrt{x}}{x}$ a vykrátíme $= \lim\limits_{x\to\infty} \frac{2}{\sqrt{x}}$. Protože $\sqrt{x} \to \infty$, je $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2}{\sqrt{x}} = 0.$

Protože limita podílu derivací existuje a je rovna 0, platí $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} = 0$.

2. Vypočtěte $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x+1}{\mathrm{e}^x}$.

Protože pro $x \to \infty$ platí $(x+1) \to \infty$ a $\mathrm{e}^x \to \infty$, můžeme použít l'Hospitalovo pravidlo.

Tedy $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x+1}{\mathrm{e}^x} = \left\| \frac{\infty}{\infty} \right\| = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{(x+1)'}{(\mathrm{e}^x)'} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{\mathrm{e}^x} = 0$.

3. Vypočtěte $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2}{\mathrm{e}^{2x}}$.

Protože pro $x \to \infty$ se hodnota čitatele i jmenovatele blíží ∞, platí

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{\mathrm{e}^{2x}} = \left\| \frac{\infty}{\infty} \right\| = \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{2\,\mathrm{e}^{2x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{\mathrm{e}^{2x}} = \left\| \frac{\infty}{\infty} \right\| = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{2\,\mathrm{e}^{2x}} = 0.$$

III. Limity dalších neurčitých výrazů (typu $\|0 \cdot \infty\|, \|\infty - \infty\|, f(x)^{g(x)}$)

se řeší nejdříve úpravou, kterou získáme limitu, která splňuje předpoklady l'Hospitalova pravidla a potom řešíme jako předchozí příklady.