LIMITA FUNKCE

Pojem limity funkce charakterizuje chování funkce v blízkém okolí libovolného bodu, tedy i těch bodů, ve kterých funkce není definovaná.

Zápis $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L$ znamená, že pro $x \to x_0$ („ x jdoucí k x_0 “) se hodnoty $f(x)$ blíží číslu L.

Přesněji to vyjadřuje definice:

Funkce $y = f(x)$ má v bodě x_0 limitu L, když ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že pro všechna x z ryzího okolí bodu x_0 platí $\left| f(x) - L \right| < \varepsilon$.

Poznámka: Nahradíme-li v definici pojem „ryzí okolí bodu x_0 „ pojmem „pravé ryzí okolí bodu x_0 “ , dostaneme definici limity zprava, píšeme $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = L$. Analogicky se definuje limita zleva, píšeme $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = L$.

Pro limitu zprava a limitu zleva se užívá označení **jednostranná limita**.

Připomeňme si ještě, že limita v bodě x_0 existuje právě tehdy, když existují obě jednostranné limity a jsou si rovny.

Výpočet limit:

1. Limity elementárních funkcí v bodech, ve kterých jsou tyto funkce definovány, existují a jsou rovny funkční hodnotě. Počítáme je tedy dosazením x_0 za x.

Příklad: $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \left(\sin x + \cos x - x\right) = \sin\frac{\pi}{2} + \cos\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = 1 + 0 + \frac{\pi}{2} = \frac{2+\pi}{2}$.

2. Pokud není funkce v bodě x_0 definovaná, může po dosazení vzniknout výraz typu $\left\| \frac{0}{0} \right\|$.

   Nazýváme ho neurčitým výrazem a jeho limitu počítáme úpravami funkce, krácením a opětovným dosazením.

   Jiný způsob určení této limity spočívá v použití tzv. L’Hospitalova pravidla (viz limity řešené pomocí derivace).

Příklad:

Jde-li například o podíl dvou polynomů, můžeme oba rozložit na součin a společným kořenovým činitelem $(x - x_0)$ krátit.

$$\lim_{x\to -1}\frac{x^2-1}{x^2+3x+2}=\left\|\frac{0}{0}\right\|=\lim_{x\to -1}\frac{(x-1)\cdot(x+1)}{(x+1)\cdot(x+2)}=\lim_{x\to -1}\frac{x-1}{x+2}=\frac{-1-1}{-1+2}=-2$$

Příklad:

Další možnou úpravou je v případě iracionální funkce vhodně funkci rozšířit (výrazem s odmocninou s opačným znaménkem).

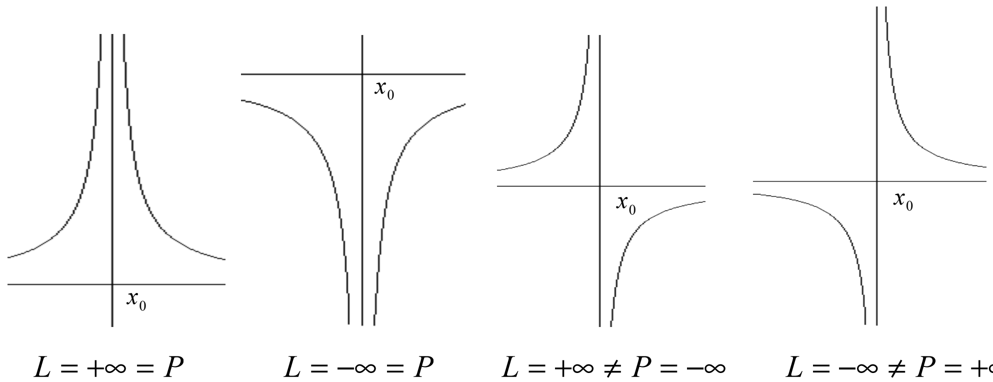
$$\lim_{x\to 4}\frac{1-\sqrt{x-3}}{x^2-16}=\left\|\frac{0}{0}\right\|=\lim_{x\to 4}\frac{1-\sqrt{x-3}}{x^2-16}\cdot\frac{1+\sqrt{x-3}}{1+\sqrt{x-3}}=\lim_{x\to 4}\frac{1-(x-3)}{(x^2-16)\cdot\left(1+\sqrt{x-3}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 4}\frac{4-x}{(x-4)\cdot(x+4)\cdot\left(1+\sqrt{x-3}\right)}=\lim_{x\to 4}\frac{-1}{(x+4)\cdot\left(1+\sqrt{x-3}\right)}=\frac{-1}{8\cdot\left(1+\sqrt{1}\right)}=-\frac{1}{16}.$$

3. Jestliže po dosazení $x = x_0$ dostaneme výraz $\left\|\frac{k}{0}\right\|$, kde $k \neq 0$, jde o nevlastní limitu.

Její hodnota, pokud existuje, je buď $+\infty$ nebo $-\infty$. Je třeba vypočítat nejprve jednostranné limity. Pokud jsou stejné je limita rovna jejich společné hodnotě, pokud se liší, daná oboustranná limita neexistuje.

Je-li funkce definovaná v okolí bodu x_0, může nastat jeden z následujících 4 případů :



$L = +\infty = P$	$L = -\infty = P$	$L = +\infty \neq P = -\infty$	$L = -\infty \neq P = +\infty$
limita existuje	limita existuje	limita neexistuje	limita neexistuje

Poznámka : Jestliže aspoň jedna z jednostranných limit funkce $f(x)$ ve vlastním bodě x_0 existuje a je nevlastní, říkáme, že přímka $x = x_0$ je asymptotou bez směrnice grafu funkce $f(x)$. (viz asymptoty)

Při výpočtu nevlastní limity $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ je tedy třeba rozhodnout o znaménku podílu $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ zvlášť v pravém a levém (ryzím) okolí bodu x_0.

Je-li v okolí bodu x_0 podíl $\dfrac{f(x)}{g(x)} > 0$, tj. čitatel i jmenovatel má stejné znaménko, je $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \left\|\dfrac{k}{0}\right\| = +\infty$.

Je-li v okolí bodu x_0 podíl $\dfrac{f(x)}{g(x)} < 0$, tj. čitatel a jmenovatel mají znaménka opačná, je $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \left\|\dfrac{k}{0}\right\| = -\infty$.

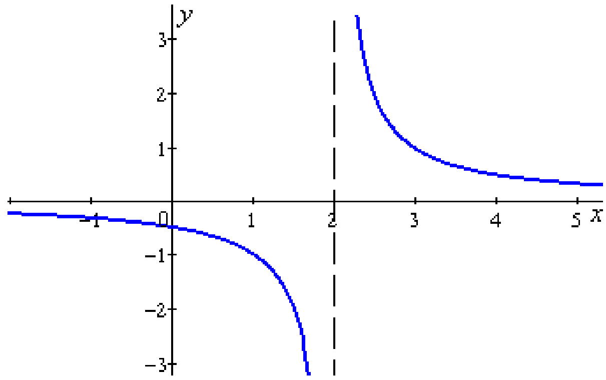
Příklad: $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{1}{x-2}$

Po dosazení $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{1}{x-2} = \left\|\dfrac{4}{0}\right\|$. Jde tedy o nevlastní limitu. Určíme obě jednostranné limity a jejich porovnáním rozhodneme o existenci a hodnotě zadané limity.

$L = \lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{1}{x-2} = \left\|\dfrac{1}{-0}\right\| = -\infty$, $\qquad P = \lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{1}{x-2} = \left\|\dfrac{1}{+0}\right\| = \infty$

Protože $L \neq P$, daná limita neexistuje.

Poznámka: Z geometrického hlediska tento výsledek znamená, že graf funkce $y = \dfrac{1}{x-2}$ má asymptotu $x = 2$, přičemž v levém okolí tohoto bodu funkce neohraničeně klesá a v pravém okolí neohraničeně roste.



Příklad: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+3}{\sin^2 x}$

Po dosazení $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+3}{\sin^2 x}=\left\|\dfrac{3}{0}\right\|$.

$$L=\lim_{x\to 0^-}\frac{x+3}{\sin^2 x}=\left\|\frac{3}{+0}\right\|=\infty$$

$$P=\lim_{x\to 0^+}\frac{x+3}{\sin^2 x}=\left\|\frac{3}{+0}\right\|=\infty$$

Protože $L=P$, daná limita existuje a platí $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+3}{\sin^2 x}=\infty$.

Příklad: $\lim\limits_{x\to 2}\left[3x-\dfrac{1}{(x-2)^2}\right]$

Po dosazení $x=2$ je $\lim\limits_{x\to 2}\left[3x-\dfrac{1}{(x-2)^2}\right]=6-\left\|\dfrac{1}{0}\right\|$. Můžeme výraz v závorce převést na společného jmenovatele nebo rozepíšeme limitu na dvě části a vyřešíme každou zvlášť. Tento postup je méně pracný.

Tedy $\lim\limits_{x\to 2}\left[3x-\dfrac{1}{(x-2)^2}\right]=\lim\limits_{x\to 2}(3x)-\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{1}{(x-2)^2}=6-\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{1}{(x-2)^2}$

Dále musíme vyřešit jednostranné limity:

$$L=\lim_{x\to 2^-}\frac{1}{(x-2)^2}=\left\|\frac{1}{+0}\right\|=\infty$$

$$P=\lim_{x\to 2^+}\frac{1}{(x-2)^2}=\left\|\frac{1}{+0}\right\|=\infty.$$

Protože $L=P$, limita existuje a platí $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{1}{(x-2)^2}=\infty$.

To znamená, že pro zadanou limitu platí:

$$\lim_{x\to 2}\left[3x-\frac{1}{(x-2)^2}\right]=6-\lim_{x\to 2}\frac{1}{(x-2)^2}=\|\,6-\infty\,\|=-\infty\,.$$

4. Pokud $x\to\pm\infty$, jde o limitu v nevlastním bodě.

Hledáme hodnotu funkce, jestliže její argument roste (nebo klesá) nade všechny meze.

Pro hodnotu limit polynomů a racionální lomené funkce v nevlastním bodě jsou rozhodující členy s nejvyšší mocninou (včetně koeficientu).

Platí : $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}a_0x^n$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots.+a_{n-1}x+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\ldots.+b_{m-1}x+b_m}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{a_0}{b_0}x^{n-m}$$

Příklad: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(6x^3-5x^2-4x-3\right)=\lim\limits_{x\to\infty}6x^3=\infty\,.$

Příklad: $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+7x-5x^4\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}(-5x^4)=-\infty\,.$

Příklad: $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x^2-4x+1}{2x^2-3}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x^2}{2x^2}=\dfrac{3}{2}\,.$

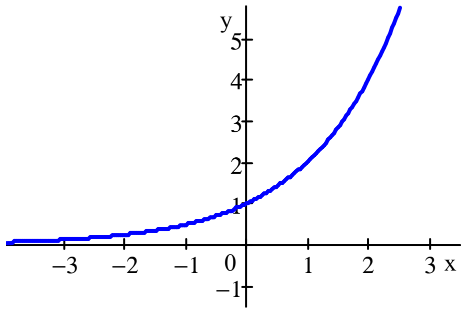
Příklad: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-3x^2+1}{x^2+4x}=\lim\limits_{x\to\infty}x=\infty\,.$

Příklad: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+4x^2+3}{2x^3-5x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{2x}=0\,.$

Poznámka : U elementárních funkcí můžeme hodnotu limity v nevlastních bodech a bodech nespojitosti vyčíst z grafu.

Příklad: Určete chování funkce $y=2^x$ v nevlastních bodech.

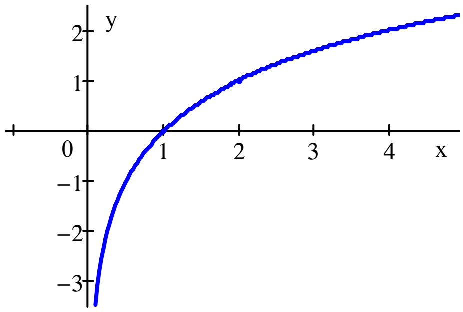
Z grafu je vidět, že $\lim\limits_{x\to-\infty} 2^x = 0$, $\lim\limits_{x\to\infty} 2^x = +\infty$.



Příklad: Určete $\lim\limits_{x\to 0^+} \log_2 x$.

Z grafu funkce $y = \log_2 x$ je vidět, že pro $x \to 0^+$ se hodnoty funkce blíží k $-\infty$, tedy

$\lim\limits_{x\to 0^+} \log_2 x = -\infty$.



Limita složené funkce

Nejdříve vypočteme limitu vnitřní složky a potom aplikujeme výsledek na vnější složku. Potom $\lim\limits_{x\to x_0} f(\varphi(x)) = f(\lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x))$.

Příklad: $\lim\limits_{x\to 0} \arccos\dfrac{2x}{1+x^2} = \arccos\left(\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2x}{1+x^2}\right) = \arccos 0 = \dfrac{\pi}{2}$.

Pokud o hodnotě limity vnitřní složky pro dané x_0 nelze jednoduše rozhodnout, vyřešíme nejdříve tuto limitu a potom vypočteme limitu vnější složky pro x jdoucí k získanému výsledku.

Příklad: $\lim\limits_{x\to 3} \ln\dfrac{4x}{x(x-3)^2}$

Vnitřní složka funkce je pro $x = 3$ výrazem $\left\|\dfrac{12}{0}\right\|$. Vyřešíme proto nejdříve limitu vnitřní složky: $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{4x}{x(x-3)^2}$.

$L = \lim\limits_{x \to 3^-} \dfrac{4x}{x(x-3)^2} = \left\| \dfrac{12}{+0} \right\| = \infty$, $P = \lim\limits_{x \to 3^+} \dfrac{4x}{x(x-3)^2} = \left\| \dfrac{12}{+0} \right\| = \infty$. A protože $L = P$,

$\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{4x}{x(x-3)^2} = \infty$. Označme si $\dfrac{4x}{x(x-3)^2} = t$.

Vypočítali jsme, že pro $x \to 3$ platí $t \to \infty$. Zbývá určit $\lim\limits_{t \to \infty} \ln t$.

Protože $\lim\limits_{t \to \infty} \ln t = \infty$, můžeme napsat $\lim\limits_{x \to 3} \ln \dfrac{4x}{x(x-3)^2} = \infty$.

Příklad: $\lim\limits_{x \to 0^-} \operatorname{arctg} \dfrac{1}{x}$

Protože vnitřní složka je pro $x = 0$ výrazem $\left\| \dfrac{k}{0} \right\|$, vyřešíme limitu vnitřní složky zvlášť a výsledek potom použijeme pro výpočet zadané limity složené funkce.

$\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{1}{x} = \left\| \dfrac{1}{-0} \right\| = -\infty$. Proto $\lim\limits_{x \to 0^-} \operatorname{arctg} \dfrac{1}{x} = \lim\limits_{t \to -\infty} \operatorname{arctg} t = -\dfrac{\pi}{2}$.