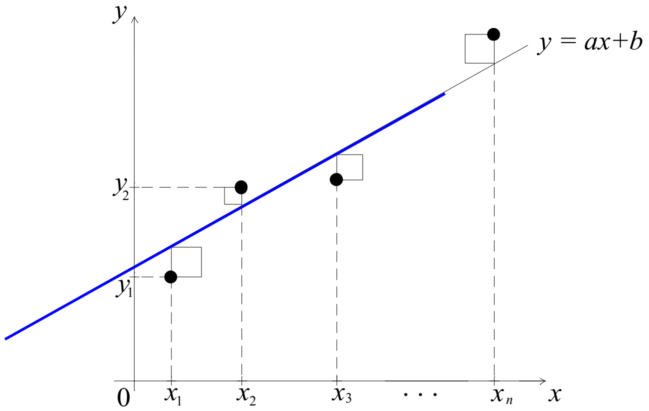
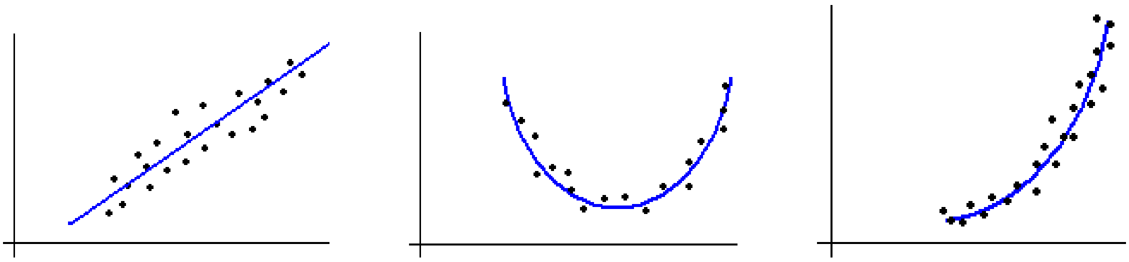
Metoda nejmenších čtverců

Tuto metodu používáme pro aproximaci funkce dané tabulkou, jsou-li hodnoty $y_i = f(x_i)$ zatíženy chybami (například při měření) nebo je-li jich velký počet. V těchto případech nepožadujeme, aby aproximační funkce $\varphi(x)$ body souboru procházela, ale prokládáme je polynomem nebo jinou funkcí tak, aby **součet čtverců odchylek** aproximační funkce $\varphi(x)$ od hodnot z tabulky $y_i = f(x_i)$ (tj. součet $\sum_{k=1}^{n}(\varphi(x_k) - y_k)^2$) byl co nejmenší.



K aproximaci používáme přímku, parabolu, exponenciální funkci atd. podle toho, na jakou závislost mezi body souboru usuzujeme :



a) V případě lineární závislosti aproximujeme soubor bodů $[x_i, y_i]$ přímkou $y = ax + b$, kde koeficienty a a b určíme řešením soustavy :

$$a\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

$$a\sum_{i=1}^{n} x_i + b\sum_{i=1}^{n} 1 = \sum_{i=1}^{n} y_i$$

Při výpočtu potřebných součtů přitom používáme následující tabulku :

x_i	y_i	x_i^2	$x_i y_i$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\sum_{i=1}^{n} x_i$	$\sum_{i=1}^{n} y_i$	$\sum_{i=1}^{n} x_i^2$	$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i$

Příklad: Metodou nejmenších čtverců vyrovnejte přímkou body : $[-1,5]$, $[1,0]$, $[2,-2]$, $[3,-7]$, $[5,-10]$. Načrtněte obrázek.

Řešení : Hledaná přímka má rovnici $y = ax + b$. Koeficienty a a b určíme řešením soustavy :

$$\begin{aligned} a\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b\sum_{i=1}^{n} x_i &= \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \\ a\sum_{i=1}^{n} x_i + b\sum_{i=1}^{n} 1 &= \sum_{i=1}^{n} y_i \end{aligned}.$$

Nejprve však pomocí tabulky vypočítáme jednotlivé sumy, přičemž počet zadaných bodů je $n = 5$.

x_i	y_i	$x_i \cdot y_i$	x_i^2
-1	5	-5	1
1	0	0	1
2	-2	-4	4
3	-7	-21	9
5	-10	-50	25
10 $\sum_{i=1}^{5} x_i$	-14 $\sum_{i=1}^{5} y_i$	-80 $\sum_{i=1}^{5} x_i \cdot y_i$	40 $\sum_{i=1}^{5} x_i^2$

Odpovídající soustava má tvar

$$\begin{aligned} a \cdot 40 + b \cdot 10 &= -80 \\ a \cdot 10 + b \cdot 5 &= -14 \end{aligned}$$

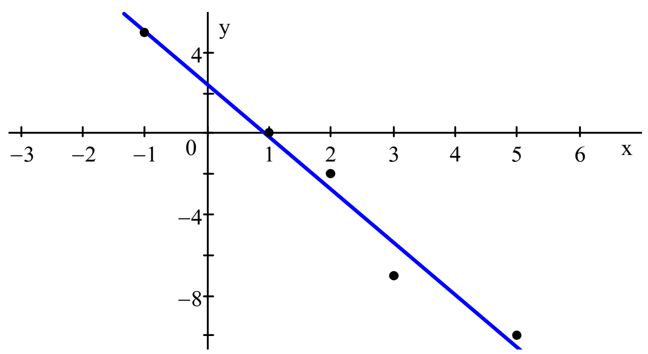
Přičteme-li k první rovnici (-2)-násobek druhé rovnice, dostaneme rovnici

$$20a = -52.$$

Tedy $a = -2{,}6$ a $b = 2{,}4$.

Přímka, aproximující dané body metodou nejmenších čtverců má tvar $y = -2{,}6x + 2{,}4$.

Na závěr do souřadnicové soustavy nakreslíme zadané body i nalezenou přímku.



b) Při aproximaci souboru bodů parabolou $y = ax^2 + bx + c$ určíme koeficienty a, b, c řešením soustavy :

$$\begin{aligned}
a\sum_{k=1}^{n} x_k^2 + b\sum_{k=1}^{n} x_k + c\sum_{k=1}^{n} 1 &= \sum_{k=1}^{n} y_k \\
a\sum_{k=1}^{n} x_k^3 + b\sum_{k=1}^{n} x_k^2 + c\sum_{k=1}^{n} x_k &= \sum_{k=1}^{n} x_k y_k \\
a\sum_{k=1}^{n} x_k^4 + b\sum_{k=1}^{n} x_k^3 + c\sum_{k=1}^{n} x_k^2 &= \sum_{k=1}^{n} x_k^2 y_k
\end{aligned}$$

První řádek výpočetní tabulky má pak tvar :

x_i	y_i	x_i^2	x_i^3	x_i^4	$x_i\, y$	$x_i^2\, y$