Příklad 1. Vypočtěte přímku, která ve smyslu metody nejmenších čtverců nejlépe aproximuje funkci danou body:

x_i	–2	–1	2	3	4
$f(x_i)$	3	4	3	1	1

Řešení: Koeficienty přímky $y = ax + b$ vypočteme jako řešení soustavy lineárních rovnic

$$a\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$
$$a\sum_{i=1}^{n} x_i + b\sum_{i=1}^{n} 1 = \sum_{i=1}^{n} y_i$$

Proto si vytvoříme tabulku, do které opíšeme zadané hodnoty *x* a *y* a přidáme další 2 sloupce. Jeden pro x_i^2 a druhý pro $x_i \cdot y_i$. Hodnoty ve všech sloupcích sečteme.

	x_i	y_i	x_i^2	$x_i \cdot y_i$
	–2	3	4	–6
	–1	4	1	–4
	2	3	4	6
	3	1	9	3
	4	1	16	4
$\sum$	**6**	**12**	**34**	**3**

Součty, které jsou v posledním řádku, jsou koeficienty soustavy rovnic. Po dosazení dostaneme soustavu rovnic:

$$\begin{aligned} 34a &+ 6b = 3 \\ 6a &+ 5b = 12 \end{aligned}$$

Soustavu můžeme řešit libovolnou metodou vhodnou pro řešení soustav lineárních rovnic. Použijme např. metodu sčítací. Jestliže vynásobíme první rovnici 5, druhou rovnici (–6) a sečteme, eliminujeme b.

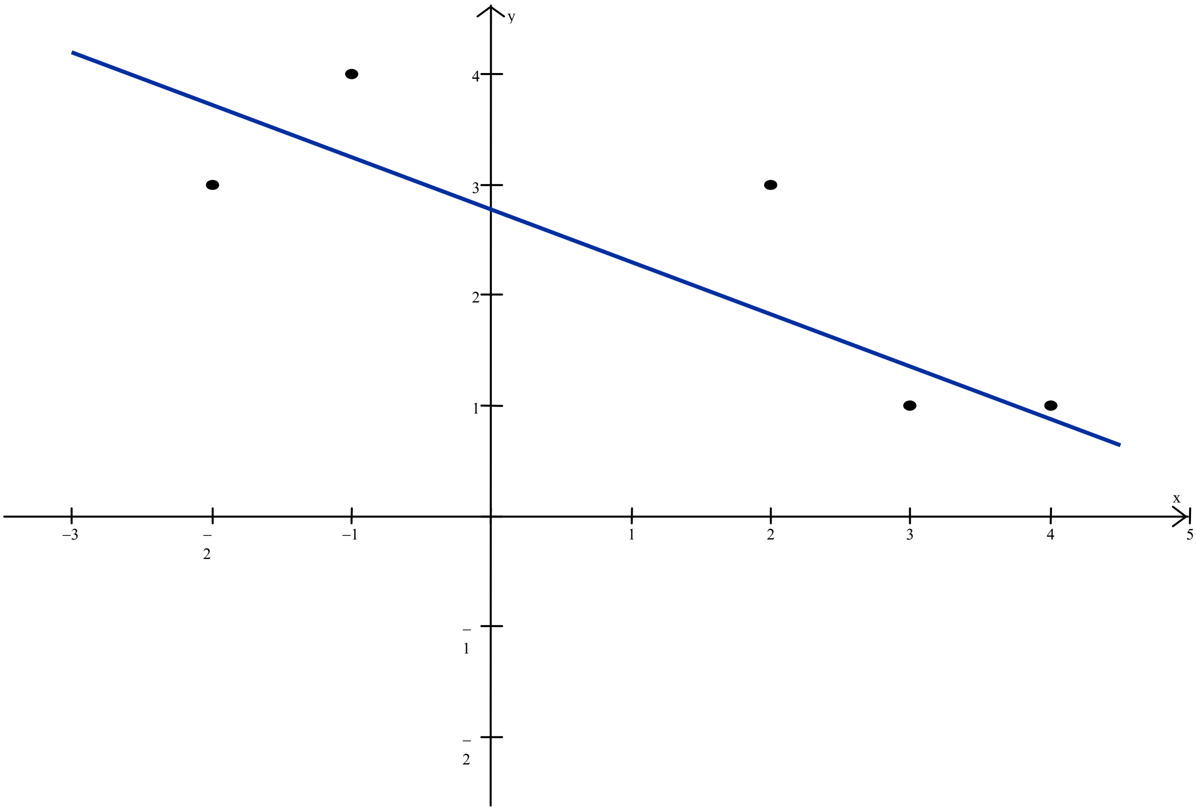
$$\begin{aligned} 34a &+ 6b = 3 \quad /\cdot 5 \\ 6a &+ 5b = 12 \quad /\cdot(-6) \\ \hline 134a &= -57 \end{aligned}$$

$$a = -\frac{57}{134} \doteq -0{,}43$$

Ze druhé rovnice $b = \frac{1}{5}(12 - 6a) = \frac{1}{5}(12 + 6\frac{57}{134}) = \frac{1}{5} \cdot \frac{975}{67} = \frac{195}{67} \doteq 2{,}91$

Hledaná přímka má tedy rovnici $y = -0{,}43x + 2{,}91$.

Poznámka: Nejrychlejším způsobem kontroly správnosti výpočtu je aproximaci si načrtnout.



Příklad 2. Vyrovnejte přímkou soubor bodů:

x_i	–4	–3	–2	0	1	2	3	4
$f(x_i)$	–2	–2	–1	–1	–1	1	0	2

Výslednou aproximaci načrtněte.

Řešení: Koeficienty přímky $y = ax + b$ vypočteme jako řešení soustavy lineárních rovnic

$$a\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$
$$a\sum_{i=1}^{n} x_i + b\sum_{i=1}^{n} 1 = \sum_{i=1}^{n} y_i$$

Vytvoříme tabulku, do které kromě zadaných hodnot *x* a *y* a přidáme sloupce pro x_i^2 a $x_i \cdot y_i$. Hodnoty ve všech sloupcích sečteme.

	x_i	y_i	x_i^2	$x_i \cdot y_i$
	–4	–2	16	8
	–3	–2	9	6
	–2	–1	4	2
	0	–1	0	0
	1	–1	1	–1
	2	1	4	2
	3	0	0	0
	4	2	8	8
$\sum$	**1**	**–4**	**42**	**25**

Součty, které jsou v posledním řádku, dosadíme do soustavy rovnic.

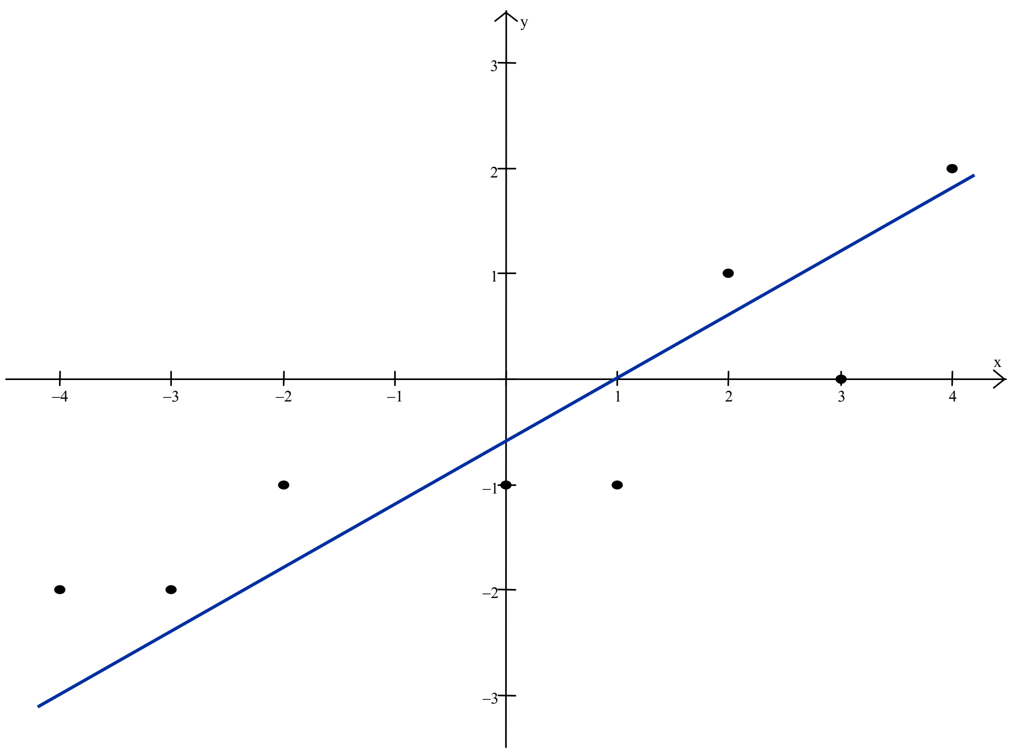
$$\begin{array}{ccccc} 42a & + & b & = & 25 \\ a & + & 8b & = & -4 \end{array}$$

Soustavu můžeme řešit libovolnou metodou vhodnou pro řešení soustav lineárních rovnic. Použijme např. metodu sčítací. Jestliže vynásobíme první rovnici (–8) a rovnice sečteme

$$\begin{array}{cccccc} 42a & + & b & = & 25 & /\cdot(-8) \\ a & + & 8b & = & -4 & \\ \hline -335a & & & = & -204 & \end{array}$$

$$a = \frac{204}{335} \doteq 0{,}6$$

Z první rovnice $b = 25 - 42a = -\frac{193}{335} \doteq -0{,}58$ .Hledaná přímka má rovnici $y = 0{,}6x - 0{,}58$.



Příklad 3. Vyrovnejte přímkou body:

x_i	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5
$f(x_i)$	1	1	2	1,5	1,5	1	2	2	2,5	2,5

Řešení:

Vytvoříme tabulku, do které kromě zadaných hodnot x a y přidáme sloupce pro x_i^2 a $x_i \cdot y_i$. Hodnoty ve všech sloupcích sečteme.

	x_i	y_i	x_i^2	$x_i \cdot y_i$
	0,5	1	0,25	0,5
	1	1	1	1
	1,5	2	2,25	3
	2	1,5	4	3
	2,5	1,5	6,25	3,75
	3	1	9	3
	3,5	2	12,25	7
	4	2	16	8
	4,5	2,5	20,25	11,25
	5	2,5	25	12,5
$\sum$	**27,5**	**17,0**	**96,25**	**53,0**

Součty, které jsou v posledním řádku, dosadíme do soustavy rovnic.

$$\begin{aligned} 96{,}25a &+ 27{,}5b = 53 \\ 27{,}5a &+ 10b = 17 \end{aligned}$$

Tuto soustavu budeme řešit metodou dosazovací. Vyjádříme si b ze druhé rovnice a dosadíme do první. Je to obvyklý postup, protože koeficient u b je celé číslo (udává počet bodů), zatímco ostatní hodnoty bývají v praxi v číslech desetinných.

$$b = \frac{17 - 27{,}5a}{10} = 1{,}7 - 2{,}75a$$

Dosadíme do první rovnice: $96{,}25a + 27{,}5 \cdot (1{,}7 - 2{,}75a) = 53$

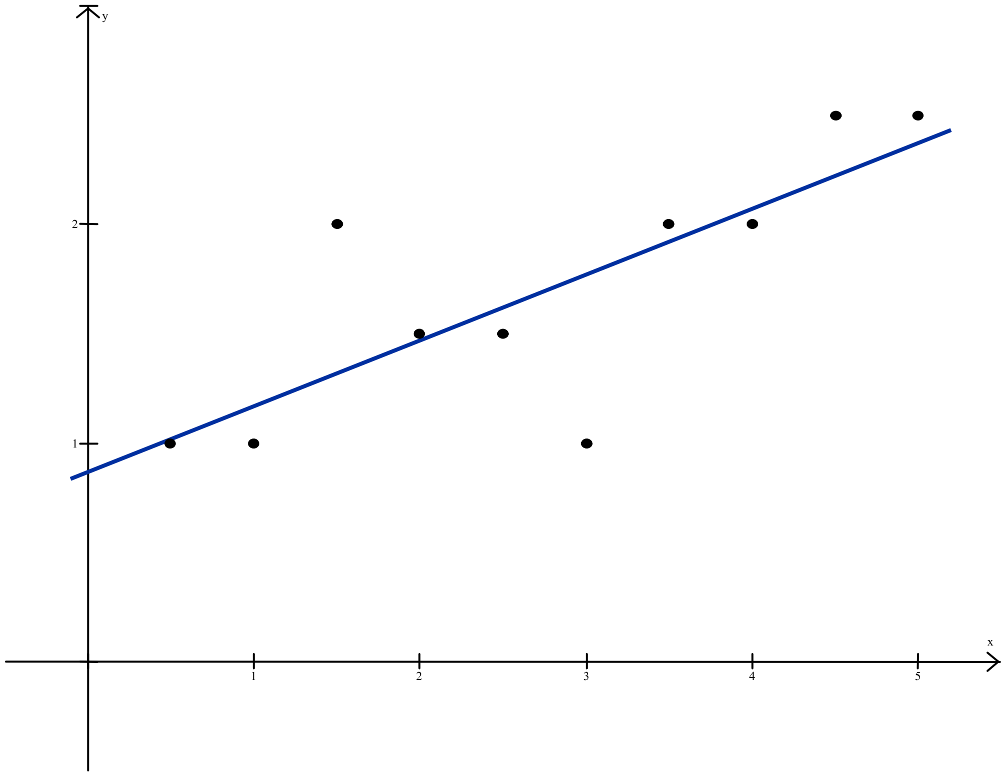
$$96{,}25a + 46{,}75 - 75{,}625a = 53$$

$$20{,}625a = 6{,}25$$

$$a = 0{,}\overline{30} \doteq 0{,}3$$

Odtud $b = 1{,}7 - 2{,}75a = 1{,}7 - 0{,}83 = 0{,}87$.

Řešením je přímka $y = 0{,}3x + 0{,}87$.


y
2
1
x
1
2
3
4
5