Aproximace Lagrangeovým interpolačním polynomem

Tento způsob aproximace se používá v případě, že funkce $f(x)$ je daná hodnotami v $n+1$ bodech. Nejčastěji to bývá tabulka hodnot, vzniklá jako výsledek měření nebo výpočtů :

x_i	x_0	x_1	...	x_n
$f(x_i)$	$f(x_0)$	$f(x_1)$	...	$f(x_n)$

.

Čísla x_k nazýváme uzlové body. Aproximaci funkce mezi uzlovými body nazýváme interpolací (na rozdíl od aproximace funkce vně uzlových bodů, kterou nazýváme extrapolací). Cílem úlohy je najít funkci $\varphi(x)$, která body tabulky prochází. Interpolaci můžeme použít i tehdy, když je funkce dána složitým výrazem se kterým se obtížně pracuje, např. integruje, derivuje. Potom tuto funkci nahradíme vhodným polynomem.
Existuje jediný polynom, splňující tento požadavek $\varphi(x_k) = f(x_k)$. Jednou z možností, jak tento polynom určit, je aproximace funkce $f(x)$ Lagrangeovým interpolačním polynomem.

Lagrangeův tvar interpolačního polynomu je

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) \cdot l_i(x) = f(x_0) \cdot l_0(x) + f(x_1) \cdot l_1(x) + ... + f(x_n) \cdot l_n(x)$$

kde $l_k(x)$ je tzv. Lagrangeův koeficient. Je to polynom n-tého stupně tvaru

$$l_k(x) = \frac{(x-x_0)\cdot(x-x_1)...(x-x_{k-1})\cdot(x-x_{k+1})...(x-x_n)}{(x_k-x_0)\cdot(x_k-x_1)...(x_k-x_{k-1})\cdot(x_k-x_{k+1})...(x_k-x_n)}$$

Při výpočtu funkce $l_k(x)$ je tedy v čitateli vynechán výraz $(x-x_k)$ a ve jmenovateli výraz $(x_k - x_k)$.
Pomocí $n+1$ bodů je možné vytvořit Lagrangeův polynom stupně nejvýše n.

Platí $L(x_i) = f(x_i)$ pro všechna $i = 0,1,2,...,n$.

Příklad: Určete Lagrangeův polynom funkce procházející body z následující tabulky

x_i	-1	0	2	3
$f(x_i)$	1	-2	0	2

.

Odhadněte hodnotu této funkce v bodě $x = 1$.

Řešení : Lagrangeův polynom jdoucí zadanými body má tvar

$$L_3(x) = f(x_0)\cdot l_0(x) + f(x_1)\cdot l_1(x) + f(x_2)\cdot l_2(x) + f(x_3)\cdot l_3(x) .$$

Hodnoty $f(x_i)$ známe, je potřeba vypočítat koeficienty $l_i(x)$.

$$l_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)} = \frac{(x-0)(x-2)(x-3)}{(-1-0)(-1-2)(-1-3)} = \frac{x^3-5x^2+6x}{-12},$$

$$l_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)} = \frac{(x+1)(x-2)(x-3)}{(0+1)(0-2)(0-3)} = \frac{x^3-4x^2+x+6}{6},$$

$l_2(x)$ není třeba počítat, protože $f(x_2)=0$,

$$l_3(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)} = \frac{(x+1)(x-0)(x-2)}{(3+1)(3-0)(3-2)} = \frac{x^3-x^2-2x}{12}.$$

Sestavíme Lagrangeův polynom

$$L_3(x) = 1\cdot\frac{x^3-5x^2+6x}{-12} - 2\cdot\frac{x^3-4x^2+x+6}{6} + 0 + 2\cdot\frac{x^3-x^2-2x}{12} =$$

a upravíme

$$= \frac{-x^3+5x^2-6x-4x^3+16x^2-4x-24+2x^3-2x^2-4x}{12} = -\frac{1}{4}x^3 + \frac{19}{12}x^2 - \frac{7}{6}x - 2.$$

Přibližnou hodnotu funkce f zadané tabulkou v bodě $x=1$ je možné aproximujemovat hodnotou Lagrangeova polynomu v tomto bodě

$$f(1) \doteq L_3(1) = -\frac{1}{4}\cdot 1^3 + \frac{19}{12}\cdot 1^2 - \frac{7}{6}\cdot 1 - 2 = -\frac{11}{6}.$$