Příklad 1. Napište Lagrangeův interpolační polynom pro funkci danou tabulkou

x_i	-2	-1	2
$f(x_i)$	3	4	3

Určete přibližnou hodnotu funkce $y = f(x)$ v bodě $x = 1$.

Řešení: Hledáme polynom co nejmenšího stupně, který prochází body z tabulky. Protože zadané body jsou 3, bude interpolační polynom nejvýše 2. stupně.

S využitím *y*-ových souřadnic sestavíme Lagrangeův polynom

$$L_2(x) = 3 \cdot l_0(x) + 4 \cdot l_1(x) + 3 \cdot l_2(x)$$

Lagrangeovy koeficienty sestavíme pomocí *x*-ových souřadnic :

$$l_0(x) = \frac{(x+1)(x-2)}{(-2+1)(-2-2)} = \frac{x^2 - x - 2}{4}$$

$$l_1(x) = \frac{(x+2)(x-2)}{(-1+2)(-1-2)} = \frac{x^2 - 4}{-3}$$

$$l_2(x) = \frac{(x+2)(x+1)}{(2+2)(2+1)} = \frac{x^2 + 3x + 2}{12} \quad .$$

Interpolační polynom tedy vytvoříme, když sečteme Lagrangeovy koeficienty vynásobené odpovídající funkční hodnotou.

$$L_2(x) = 3 \cdot \frac{x^2 - x - 2}{4} + 4 \cdot \frac{x^2 - 4}{-3} + 3 \cdot \frac{x^2 + 3x + 2}{12}$$

Postupně upravíme:

$$= \frac{9(x^2 - x - 2) - 16(x^2 - 4) + 3(x^2 + 3x + 2)}{12} = \frac{9x^2 - 9x - 18 - 16x^2 + 64 + 3x^2 + 9x + 6}{12} =$$

$$= \frac{-4x^2 + 52}{12} = -\frac{1}{3}x^2 + \frac{13}{3}$$

Přibližnou hodnotu $f(1)$ určíme jako $L_2(1) = -\frac{1}{3} + \frac{13}{3} = 4$. Tedy $f(1) \doteq 4$.

Příklad 2. Sestavte a upravte Lagrangeův interpolační polynom pro funkci danou tabulkou

x_i	-1	2	3
$f(x_i)$	1	4	5

Řešení: Interpolační polynom bude nejvýše 2. stupně, protože zadané body jsou 3.

S využitím y-ových souřadnic sestavíme Lagrangeův polynom

$$L_2(x) = 1 \cdot l_0(x) + 4 \cdot l_1(x) + 5 \cdot l_2(x)$$

Pomocí x-ových souřadnic vytvoříme Lagrangeovy koeficienty.

$$l_0(x) = \frac{(x-2)(x-3)}{(-1-2)(-1-3)} = \frac{x^2-5x+6}{12}$$

$$l_1(x) = \frac{(x+1)(x-3)}{(2+1)(2-3)} = \frac{x^2-2x-3}{-3}$$

$$l_2(x) = \frac{(x+1)(x-2)}{(3+1)(3-2)} = \frac{x^2-x-2}{4} \quad .$$

Lagrangeovy koeficienty dosadíme a sečteme členy se stejnou mocninou.

$$L(x) = \frac{x^2-5x+6}{12} + 4 \cdot \frac{x^2-2x-3}{-3} + 5 \cdot \frac{x^2-x-2}{4} =$$

$$= \frac{x^2-5x+6-16(x^2-2x-3)+15(x^2-x-2)}{12} = \frac{x^2-5x+6-16x^2+32x+48+15x^2-15x-30}{12} =$$

$$= \frac{12x+24}{12} = x+2 \quad .$$

Poznámka: Očekávali jsme polynom nejvýše 2. stupně a výsledný interpolační polynom je stupně prvního. Znamená to, že zadané body leží v přímce.

Příklad 3. Sestavte a upravte Lagrangeův interpolační polynom pro funkci danou tabulkou

x_i	0	2	3
$f(x_i)$	2	0	5

Řešení: Vzhledem k počtu bodů a protože je navíc jedna z funkčních hodnot nulová, můžeme počítat i přímo.

$$L(x) = 2 \cdot \frac{(x-2)(x-3)}{(0-2)(0-3)} + 0 \cdot l_1(x) + 5 \cdot \frac{(x-0)(x-2)}{(3-0)(3-2)} =$$

$$= 2 \cdot \frac{x^2 - 5x + 6}{6} + 5 \cdot \frac{x^2 - 2x}{3} = \frac{2x^2 - 10x + 12 + 10x^2 - 20x}{6} = \frac{12x^2 - 30x + 12}{6} = 2x^2 - 5x + 2$$

Příklad 4. Sestavte a upravte Lagrangeův interpolační polynom pro funkci danou tabulkou

x_i	–3	–1	2	3
$f(x_i)$	1	0	2	1

Řešení: Pro přehlednost budeme počítat postupně. Protože zadané body jsou 4, bude stupeň interpolačního polynomu nejvýše 3.

$$L_3(x) = 1 \cdot l_0(x) + 0 \cdot l_1(x) + 2 \cdot l_2(x) + 1 \cdot l_3(x)$$

Pomocí x-ových souřadnic bodů sestavíme potřebné Lagrangeovy koeficienty a upravíme:

$$l_0(x) = \frac{(x+1)(x-2)(x-3)}{(-3+1)(-3-2)(-3-3)} = \frac{(x^2 - x - 2)(x-3)}{(-2)(-5)(-6)} = \frac{x^3 - 4x^2 + x + 6}{-60}$$

$$l_2(x) = \frac{(x+3)(x+1)(x-3)}{(2+3)(2+1)(2-3)} = \frac{(x^2 - 9)(x+1)}{5 \cdot 3(-1)} = \frac{x^3 + x^2 - 9x - 9}{-15}$$

$$l_3(x) = \frac{(x+3)(x+1)(x-2)}{(3+3)(3+1)(3-2)} = \frac{(x^2 + 4x + 3)(x-2)}{6 \cdot 4} = \frac{x^3 + 2x^2 - 5x - 6}{24} \quad .$$

Po dosazení dostaneme:

$$L(x) = \frac{x^3 - 4x^2 + x + 6}{-60} + 2 \cdot \frac{x^3 + x^2 - 9x - 9}{-15} + \frac{x^3 + 2x^2 - 5x - 6}{24} =$$

$$= \frac{-2(x^3 - 4x^2 + x + 6) - 16(x^3 + x^2 - 9x - 9) + 5(x^3 + 2x^2 - 5x - 6)}{120} =$$

$$= \frac{-2x^3 + 8x^2 - 2x - 12 - 16x^3 - 16x^2 + 144x + 144 + 5x^3 + 10x^2 - 25x - 30}{120} =$$

$$= \frac{-13x^3 + 2x^2 + 117x + 102}{120} = -\frac{13}{120}x^3 + \frac{1}{60}x^2 + \frac{39}{40}x + \frac{17}{20}.$$