Příklad 1. Řešte v **R** rovnici $x^3 - 4x^2 + 2x - 4 = 0$. Výsledek vypočtěte s přesností alespoň 0,07.

Řešení:

1) Reálné kořeny rovnice budou ležet v intervalu (–5,5), protože největší z koeficientů polynomu bez ohledu na znaménko je 4. Přičteme 1, tím získáme horní mez intervalu. Dolní mezí je totéž číslo s opačným znaménkem.

Polynom je 3. stupně, rovnice má tedy celkem 3 kořeny. Předpokládaný počet kladných a záporných reálných kořenů určíme za základě znaménkových změn v posloupnostech koeficientů:

$P(x) = x^3 - 4x^2 + 2x - 4$ … 3 znaménkové změny (mezi 1. a 2.,2. a 3.,3. a 4. koeficientem). Kladné kořeny budou buď 3 nebo 1.

$P(-x) = (-x)^3 - 4(-x)^2 + 2(-x) - 4 = -x^3 - 4x^2 - 2x - 4$ … všechny koeficienty jsou záporné, nedochází k žádné změně. Rovnice tedy záporné reálné kořeny nemá.

2) Provedeme separaci. Zjistili jsme, že rovnice má pouze kladné kořeny, můžeme se tedy omezit na interval (0,5). Zvolíme dělení na podintervaly délky 1 a budeme pomocí Hornerova schématu počítat hodnoty polynomu v dělících bodech:

	1	–4	2	–4
0	1	–4	2	–4
1	1	–3	–1	–5
2	1	–2	–2	–8
3	1	–1	–1	–7
4	1	0	2	4
5	1	1	7	31

$\Rightarrow x \in (3,4)$

Funkční hodnoty změnily znaménko pouze jedenkrát, a to mezi body $x = 3$ a $x = 4$. Rovnice má tedy pouze jeden reálný kořen v intervalu (3,4) a další dva kořeny jsou komplexní.

3) Metodou půlení intervalu dopočítáme reálný kořen se zadanou přesností.

a_k	$x_k = \frac{a_k + b_k}{2}$	b_k	sgn $P(a_k)$	$P(x_k)$	sgn $P(b_k)$	Chyba $= \frac{b_k - a_k}{2}$
3	3,5	4	–	–3,125	+	0,5
3,5	3,75	4	–	–0,01563	+	0,25
3,75	3,875	4	–	1,87305	+	0,125
3,75	3,8125	3,875				$0{,}0625 < 0{,}07$

Za výsledek považujeme střed toho intervalu, pro který platí, že polovina jeho délky je menší než přípustná chyba. Tedy $x \doteq 3{,}8125$.

Příklad 2. Separujte všechny reálné kořeny rovnice $x^4 - x^3 + x^2 - 2 = 0$. Má-li záporné kořeny, vypočtěte je s přesností alespoň 0,04.

Řešení:

1) Největší z koeficientů polynomu bez ohledu na znaménko je 2, kořeny rovnice budou tedy ležet v intervalu (–3,3).

Rovnice má 4 kořeny. Protože koeficienty polynomu 3x mění znaménko, můžeme očekávat, že rovnice má 3 nebo 1 kladný reálný kořen.

Pro určení počtu záporných kořenů si nejdříve napíšeme polynom v bodě $-x$:

$$P(-x) = (-x)^4 - (-x)^3 + (-x)^2 - 2 = x^4 + x^3 + x^2 - 2$$

Mezi koeficienty tohoto polynomu $1,1,1,-2$ dochází k jedné změně znaménka, tedy rovnice má jeden záporný reálný kořen.

2) Provedeme separaci. Vzhledem k velikosti intervalu zvolíme dělení na podintervaly délky 1 a pomocí Hornerova schématu budeme počítat hodnoty polynomu :

	1	–1	1	0	–2	
–3	1	–4	13	–39	115	
–2	1	–3	7	–14	26	
–1	1	–2	3	–3	1	$\Rightarrow x_1 \in (-1,0)$
0	1	–1	1	0	–2	
1	1	0	1	1	–1	$\Rightarrow x_2 \in (1,2)$
2	1	1	3	6	10	
3	1	2	7	21	61	

Polynom mění znaménko mezi –1 a 0 a potom mezi body 1 a 2. V uvedených intervalech leží reálné kořeny. Další dva jsou komplexní.

3) Zpřesňovat budeme pouze záporný kořen. Metodu půlení intervalu použijeme na nalezení řešení v intervalu (–1,0) s chybou menší než 0,04.

a_k	$x_k = \frac{a_k + b_k}{2}$	b_k	$\operatorname{sgn} P(a_k)$	$P(x_k)$	$\operatorname{sgn} P(b_k)$	$\text{Chyba} = \frac{b_k - a_k}{2}$
–1	–0,5	0	+	–1,5625	–	0,5
–1	–0,75	–0,5	+	–0,69922	–	0,25
–1	–0,875	–0,75	+	0,02173	–	0,125
–0,875	–0,8125	–0,75	+	–0,36766	–	0,0625
–0,875	–0,84375	–0,8125				0,03125< 0,04

Řešením s požadovanou přesností je $x \doteq -0{,}84375$, přesněji $x = -0{,}84375 \pm 0{,}03125$.

Příklad 3. S chybou menší než 0,1 řešte v **R** rovnici $x^3 + 2x^2 - 1 = 0$.
Řešení:
1) Reálné kořeny budou ležet v intervalu (–3,3).
Polynom je 3. stupně, rovnice má tedy celkem 3 kořeny. Z nich jeden je kladný, protože v posloupnosti koeficientů polynomu dochází k jedné znaménkové změně.
$P(-x) = -x^3 + 2x^2 - 1$. V tomto polynomu mění koeficienty znaménko dvakrát, takže rovnice bude mít záporné kořeny dva nebo žádný.

2) Provedeme separaci.

	1	2	0	–1
–3	1	–1	3	–10
–2	1	0	0	–1
–1	1	1	–1	0

Další hodnoty počítat nemusíme. V bodě $x = -1$ je totiž hodnota polynomu rovna 0, to znamená, že toto číslo je kořenem polynomu (=řešením rovnice).
Z teorie polynomů víme, že řádek Hornerova schématu, ve kterém jsme nalezli kořen, nám udává koeficienty „zbytkového“ polynomu.
Tedy polynom ze zadání rozložíme na součin :

$$x^3 + 2x^2 - 1 = (x+1)(x^2 + x - 1)$$

Kořeny polynomu ve druhé závorce bude vhodné počítat pomocí vzorce pro výpočet kořenů kvadratické rovnice.

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \doteq \frac{-1 \pm 2{,}24}{2} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} x_1 = \frac{-3{,}24}{2} = -1{,}62 \\ x_2 = \frac{1{,}24}{2} = 0{,}62 \end{array}$$

Rovnice má tedy 3 reálná řešení : –1,62 , –1 a 0,62.

Příklad 4. Separujte všechny reálné kořeny rovnice $x^4 - 4x^3 - x^2 + 2x - 6 = 0$.
Řešení:
1) Pro kořeny rovnice platí $x_i \in (-7,7)$.
Celkem má kořeny 4, z toho kladné reálné budou 3 nebo 1. (Změny znaménka mezi 1. a 2., 3. a 4., 4. a 5. koeficientem.)
$P(-x) = (-x)^4 - 4(-x)^3 - (-x)^2 + 2(-x) - 6 = x^4 + 4x^3 - x^2 - 2x - 6$ záporný kořen bude jeden (Změna mezi 2. a 3.koeficientem)

2) Interval (–7,7) by bylo pracné dělit na intervaly délky 1. Kromě toho není nutné volit dělicí body pravidelně. Ukážeme si během následujícího výpočtu.

Použijeme Hornerovo schéma a zvolíme si pro začátek podintervaly délky 3:

	1	–4	–1	2	–6
–7	1	–11	76	–530	3704
–4	1	–8	31	–122	482

Všimněme si, že funkční hodnota mezi body -7 a -4 hodně klesla, takže bude vhodnější použít kratší podinterval. Použijeme –2:

	1	–4	–1	2	–6
–7	1	–11	76	–530	3704
–4	1	–8	31	–122	482
–2	1	–6	11	–20	34

Dál uvážíme to, že pro $x = 0$ je hodnota polynomu záporná. (V bodě 0 je hodnotou polynomu absolutní člen.) Proto vypočítáme hodnotu $P(-1)$, abychom hned zjistili, zda přechází polynom z kladných hodnot do záporných na intervalu (–2,–1) nebo (–1,0).

	1	–4	–1	2	–6
–7	1	–11	76	–530	3704
–4	1	–8	31	–122	482
–2	1	–6	11	–20	34
–1	1	–5	4	–2	–4

Ke změně znaménka polynomu tedy dochází v intervalu (–2,–1).

Zbytek intervalu projdeme s krokem 2:

	1	–4	–1	2	–6
–7	1	–11	76	–530	3704
–4	1	–8	31	–122	482
–2	1	–6	11	–20	34
–1	1	–5	4	–2	–4
0					–6
2	1	–2	–5	–8	–22
4	1	0	–1	–2	–14
6	1	2	11	68	402

Kladný kořen leží v intervalu (4,6).

Poznámka: Kdybychom kladný kořen chtěli aproximovat metodou půlení intervalu, byla by chyba v prvním kroku 1, ve druhém 0,5, atd. Tedy pro dosažení konkrétní přesnosti bychom museli provést víc kroků půlením. Proto je pro ruční výpočet výhodné začít půlit interval délky 1. Interval (4,6) ještě rozdělíme.

	1	–4	–1	2	–6
–7	1	–11	76	–530	3704
–4	1	–8	31	–122	482
–2	1	–6	11	–20	34
–1	1	–5	4	–2	–4
0					–6
2	1	–2	–5	–8	–22
4	1	0	–1	–2	–14
5	1	1	4	22	104
6	1	2	11	68	402

Kořen leží v intervalu (4,5).

Příklad 5. Řešte v **R** rovnici $x^3 + x - 3 = 0$ s přesností alespoň 0,1.
Řešení:
$x_i \in (-4,4)$, kořeny jsou celkem 3. Ze znaménkových změn v posloupnosti koeficientů polynomu plyne, že jeden reálný kořen bude kladný.
$P(-x) = -x^3 - x - 3$ … žádná změna $\Rightarrow$ záporný reálný kořen nemá.

Víme-li, že rovnice má jediný reálný kořen, který leží v intervalu (0,4), mohli bychom hned aplikovat metodu půlení intervalu:

a_k	$x_k = \frac{a_k + b_k}{2}$	b_k	$\operatorname{sgn} P(a_k)$	$P(x_k)$	$\operatorname{sgn} P(b_k)$	Chyba = $\frac{b_k - a_k}{2}$
0	2	4	–	7	+	2
0	1	2	–	–1	+	1
1	1,5	2	…	…	…	0,5 …

Výpočet by k dosažení požadované přesnosti byl o dva kroky delší.

Nebo bychom mohli nejdříve, jako při separaci, rozdělit interval na menší podintervaly a zjistit, ve kterých bodech polynom změnil znaménko:

	1	0	1	–3	$\operatorname{sgn} P(x_k)$
0	1	0	1	–3	–
1	1	1	2	–1	–
2	1	2	5	7	+

Hledaný kořen leží v intervalu (1,2).

Potom

a_k	$x_k = \dfrac{a_k + b_k}{2}$	b_k	$\operatorname{sgn} P(a_k)$	$P(x_k)$	$\operatorname{sgn} P(b_k)$	Chyba $= \dfrac{b_k - a_k}{2}$
1	1,5	2	–	1,875	+	0,5
1	1,25	1,5	–	0,20313	+	0,25
1	1,125	1,25	–	–0,45117	+	0,125
1,125	1,1875	1,25				$0{,}0625 < 0{,}1$

Závěr: $x \doteq 1{,}1875$

Poznámka:

Tuto rovnici bychom mohli řešit i **graficky**. Pokud si nákres provedete dostatečně precizně, je možné přesnost dodržet.

Rovnici upravíme: $x^3 + x - 3 = 0$

$$x^3 = 3 - x\,.$$

Budeme tedy hledat průsečíky grafů funkcí $y = x^3$ a $y = 3 - x$.