

Parciální derivace

Robert Mařík

2. října 2009

Obsah

Teorie.	3
Cvičení.	8
$x^2 + xy + y^3$	8
$(x + y)e^{-x}$	24
$\frac{x + y^2}{y - 1}$	38
$\operatorname{arctg} \frac{y}{x}$	53
$\sqrt{1 - x^2 - y^2}$	69
$(x^2 + y)e^{x^2 - y}$	80
$e^{x^2 + y^2}$	93

Teorie.

Definice (parciální derivace podle x v bodě). Necht' $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ je funkce dvou proměnných. Řekneme, že funkce má **v bodě** (x, y) **parciální derivaci podle proměnné x** rovnu číslu $f'_x(x, y)$, jestliže existuje konečná limita

$$f'_x(x, y) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}.$$

Podle definice vidíme, že při parciální derivaci podle x se vlastně jedná o to, že na funkci dvou proměnných $f : z = f(x, y)$ pohlížíme pouze jako na funkci proměnné x a derivace této funkce (ve smyslu derivace funkce jedné proměnné) je parciální derivace funkce f podle proměnné x .

Definice (parciální derivace podle x). Řekneme, že funkce má *na otevřené množině M parciální derivaci podle x* , jestliže má v každém bodě množiny M parciální derivaci podle x . Předpisem, který každému bodu takovéto množiny M přiřadí hodnotu parciální derivace podle x v tomto bodě je definována funkce nazývaná *parciální derivace podle x* .

Podobně, pohlížíme-li na funkci f pouze jako na funkci proměnné y , je derivace této funkce jedné proměnné parciální derivací funkce f podle y .

Definice (parciální derivace podle y). Parciální derivaci podle y definujeme pomocí limity

$$f'_y(x, y) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}.$$

Definice (vyšší derivace). Opětovným derivováním těchto funkcí dostáváme druhé a vyšší derivace (podobně jako v jednorozměrném případě).

Poznámka 1. Derivaci funkce $z = f(x, y)$ podle x označujeme též $f_x, z'_x, z_x, \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial x}$. Podobně pro derivaci podle y . Druhé derivace označujeme $z''_{xx}, f''_{yy}, z''_{xy}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ a podobně.

Následující věta ukazuje, že smíšené druhé derivace jsou většinou totožné, tj. že druhé derivace existují ve většině případů pouze tři.

Věta 1 (Schwarzova věta). Jsou-li parciální derivace f''_{xy} a f''_{yx} definované a spojité na otevřené množině M , jsou totožné, tj. pro všechna $(x, y) \in M$ platí

$$f''_{xy}(x, y) = f''_{yx}(x, y).$$

Definice (hladké funkce). Buď M otevřená množina. Řekneme, že funkce f je *hladká* na M , jestliže má na množině M spojitě všechny první parciální derivace. Řekneme, že funkce f je na M *hladká řádu k* , jestliže má na množině M spojitě všechny parciální derivace do řádu k včetně. Množinu spojitých funkcí na M označujeme $C(M)$, množinu hladkých funkcí $C^1(M)$, množinu hladkých funkcí řádu k označujeme $C^k(M)$.

Poznámka 2. V bodě, ve kterém má funkce jedné proměnné derivaci, je funkce spojitá a má tečnu. U funkce více proměnných podobná věta neplatí, z existence parciálních derivací neplyne spojitost. Spojitost plyne až z *existence* a *spojitosti* parciálních derivací. Následující věta udává, že funkce hladké v okolí nějakého bodu jsou v tomto bodě spojitě, mají tomto bodě tečnou rovinu a funkční hodnoty těchto funkcí lze aproximovat funkčními hodnotami na této tečné rovině, tj. že v okolí bodu dotyku leží body na grafu funkce blízko tečné roviny.

Věta 2. Necht' funkce f má definované a spojité parciální derivace v okolí bodu (x_0, y_0) . Potom platí následující.

- Funkce f je v bodě (x_0, y_0) spojitá.
- Rovina o rovnici

$$z = f(x_0, y_0) + f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

je tečná rovina ke grafu funkce f v bodě $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$

- Platí přibližný vzorec

$$f(x, y) \approx f(x_0, y_0) + f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0).$$

V tomto vzorci je přesnost tím větší, čím

- je menší vzdálenost bodů (x, y) a (x_0, y_0) ,
- jsou menší druhé derivace funkce f (pokud existují).

Cvičení.

Zadání. V následujících cvičeních nalezněte parciální derivace do řádu dva (včetně). U všech těchto funkcí jsou smíšené parciální derivace stejné.

Najděte derivace funkce $z(x, y) = x^2 + xy + y^3$ do řádu dva.

Najděte derivace funkce $z(x, y) = x^2 + xy + y^3$ do řádu dva.

$$z'_x = 2x + 1 \cdot y + 0$$

Derivujeme součet ($x^2 + xy + y^3$) podle x .

- x^2 derivujeme jako funkci jedné proměnné.
- Proměnnou y v součinu xy považujeme při derivaci podle x za konstantu a proto derivujeme podle pravidla pro derivaci konstantního násobku. Derivace funkce x podle x je obyčejná derivace funkce jedné proměnné.
- Člen y^3 neobsahuje proměnnou x . Proto je tento člen při derivaci podle x považován za konstantu a derivováním vypadne (derivace konstantní funkce je nula).

Najděte derivace funkce $z(x, y) = x^2 + xy + y^3$ do řádu dva.

$$z'_x = 2x + 1 \cdot y + 0 = 2x + y$$

Upravíme.

Najděte derivace funkce $z(x, y) = x^2 + xy + y^3$ do řádu dva.

$$z'_x = 2x + 1 \cdot y + 0 = 2x + y$$

$$z'_y = 0 + x \cdot 1 + 3y^2$$

Derivujeme součet ($x^2 + xy + y^3$) podle y .

- x^2 derivujeme jako konstantu, protože tento člen neobsahuje proměnnou y .
- Faktor x ve výraze xy lze považovat za konstantní násobek a při derivování tedy zůstává $(xy)'_y = x(y)'_y$. Derivace y podle y je obyčejná derivace.
- Člen y^3 derivujeme jako funkci jedné proměnné.

Najděte derivace funkce $z(x, y) = x^2 + xy + y^3$ do řádu dva.

$$z'_x = 2x + 1 \cdot y + 0 = 2x + y$$

$$z'_y = 0 + x \cdot 1 + 3y^2 = x + 3y^2$$

Upravíme.

Najděte derivace funkce $z(x, y) = x^2 + xy + y^3$ do řádu dva.

$$z'_x = 2x + 1 \cdot y + 0 = 2x + y$$

$$z'_y = 0 + x \cdot 1 + 3y^2 = x + 3y^2$$

$$z''_{xx} = (2x + y)'_x$$

Derivujeme z'_x podle x

Najděte derivace funkce $z(x, y) = x^2 + xy + y^3$ do řádu dva.

$$z'_x = 2x + 1 \cdot y + 0 = 2x + y$$

$$z'_y = 0 + x \cdot 1 + 3y^2 = x + 3y^2$$

$$z''_{xx} = (2x + y)'_x = 2 \cdot 1 + 0$$

Užijeme pravidlo pro derivaci součtu a derivaci konstantního násobku.

Najděte derivace funkce $z(x, y) = x^2 + xy + y^3$ do řádu dva.

$$z'_x = 2x + 1 \cdot y + 0 = 2x + y$$

$$z'_y = 0 + x \cdot 1 + 3y^2 = x + 3y^2$$

$$z''_{xx} = (2x + y)'_x = 2 \cdot 1 + 0 = 2$$

Upravíme.

Najděte derivace funkce $z(x, y) = x^2 + xy + y^3$ do řádu dva.

$$z'_x = 2x + 1 \cdot y + 0 = 2x + y$$

$$z'_y = 0 + x \cdot 1 + 3y^2 = x + 3y^2$$

$$z''_{xx} = (2x + y)'_x = 2 \cdot 1 + 0 = 2$$

$$z''_{xy} = (2x + y)'_y$$

Abychom našli z''_{xy} , budeme derivovat z'_x podle y .

Najděte derivace funkce $z(x, y) = x^2 + xy + y^3$ do řádu dva.

$$z'_x = 2x + 1 \cdot y + 0 = 2x + y$$

$$z'_y = 0 + x \cdot 1 + 3y^2 = x + 3y^2$$

$$z''_{xx} = (2x + y)'_x = 2 \cdot 1 + 0 = 2$$

$$z''_{xy} = (2x + y)'_y = 0 + 1$$

Použijeme pravidlo pro derivaci součtu. Protože x považujeme nyní za konstantu, je člen $(2x)$ také konstanta.

Najděte derivace funkce $z(x, y) = x^2 + xy + y^3$ do řádu dva.

$$z'_x = 2x + 1 \cdot y + 0 = 2x + y$$

$$z'_y = 0 + x \cdot 1 + 3y^2 = x + 3y^2$$

$$z''_{xx} = (2x + y)'_x = 2 \cdot 1 + 0 = 2$$

$$z''_{xy} = (2x + y)'_y = 0 + 1 = 1$$

Upravíme.

Najděte derivace funkce $z(x, y) = x^2 + xy + y^3$ do řádu dva.

$$z'_x = 2x + 1 \cdot y + 0 = 2x + y$$

$$z'_y = 0 + x \cdot 1 + 3y^2 = x + 3y^2$$

$$z''_{xx} = (2x + y)'_x = 2 \cdot 1 + 0 = 2$$

$$z''_{xy} = (2x + y)'_y = 0 + 1 = 1$$

$$z''_{yy} = (x + 3y^2)'_y$$

Abychom našli z''_{yy} derivujeme z'_y podle y .

Najděte derivace funkce $z(x, y) = x^2 + xy + y^3$ do řádu dva.

$$z'_x = 2x + 1 \cdot y + 0 = 2x + y$$

$$z'_y = 0 + x \cdot 1 + 3y^2 = x + 3y^2$$

$$z''_{xx} = (2x + y)'_x = 2 \cdot 1 + 0 = 2$$

$$z''_{xy} = (2x + y)'_y = 0 + 1 = 1$$

$$z''_{yy} = (x + 3y^2)'_y = 0 + 3 \cdot 2y^1$$

Použijeme vzorec pro derivaci součtu, derivaci konstantního násobku a derivaci mocninné funkce.

Najděte derivace funkce $z(x, y) = x^2 + xy + y^3$ do řádu dva.

$$z'_x = 2x + 1 \cdot y + 0 = 2x + y$$

$$z'_y = 0 + x \cdot 1 + 3y^2 = x + 3y^2$$

$$z''_{xx} = (2x + y)'_x = 2 \cdot 1 + 0 = 2$$

$$z''_{xy} = (2x + y)'_y = 0 + 1 = 1$$

$$z''_{yy} = (x + 3y^2)'_y = 0 + 3 \cdot 2y^1 = 6y$$

Upravíme.

Najděte derivace funkce $z(x, y) = x^2 + xy + y^3$ do řádu dva.

$$z'_x = 2x + 1 \cdot y + 0 = 2x + y$$

$$z'_y = 0 + x \cdot 1 + 3y^2 = x + 3y^2$$

$$z''_{xx} = (2x + y)'_x = 2 \cdot 1 + 0 = 2$$

$$z''_{xy} = (2x + y)'_y = 0 + 1 = 1$$

$$z''_{yy} = (x + 3y^2)'_y = 0 + 3 \cdot 2y^1 = 6y$$

Hotovo.

Najděte derivace funkce $z(x, y) = (x + y)e^{-x}$ do řádu dva.

Najděte derivace funkce $z(x, y) = (x + y)e^{-x}$ do řádu dva.

$$z'_x = (x + y)'_x \cdot e^{-x} + (x + y) \cdot (e^{-x})'_x$$

- Funkce se skládá ze dvou faktorů v součinu.

$$z = (x + y) \cdot e^{-x}.$$

- Oba faktory obsahují proměnnou x a při derivaci podle x tedy musíme nutně funkci derivovat jako součin dvou funkcí.

Najděte derivace funkce $z(x, y) = (x + y)e^{-x}$ do řádu dva.

$$\begin{aligned}z'_x &= (x + y)'_x \cdot e^{-x} + (x + y) \cdot (e^{-x})'_x \\ &= (1 + 0)e^{-x} + (x + y) \cdot e^{-x} \cdot (-1)\end{aligned}$$

Dál použijeme obvyklá pravidla pro derivování, proměnnou y při tom považujeme za konstantu.

Najděte derivace funkce $z(x, y) = (x + y)e^{-x}$ do řádu dva.

$$\begin{aligned}z'_x &= (x + y)'_x \cdot e^{-x} + (x + y) \cdot (e^{-x})'_x \\ &= (1 + 0)e^{-x} + (x + y) \cdot e^{-x} \cdot (-1) = e^{-x} \cdot (1 - x - y)\end{aligned}$$

Vytkneme e^{-x} .

Najděte derivace funkce $z(x, y) = (x + y)e^{-x}$ do řádu dva.

$$\begin{aligned}z'_x &= (x + y)'_x \cdot e^{-x} + (x + y) \cdot (e^{-x})'_x \\ &= (1 + 0)e^{-x} + (x + y) \cdot e^{-x} \cdot (-1) = e^{-x} \cdot (1 - x - y)\end{aligned}$$

$$z'_y = (x + y)'_y \cdot e^{-x}$$

- Derivujme nyní podle y . Funkce je součinem dvou faktorů

$$z = (x + y) \cdot e^{-x}.$$

- Zelený výraz **neobsahuje** proměnnou y a považujeme jej tedy za konstantu. Jedná se tedy vlastně o konstantní násobek funkce $(x + y)$, kterou zderivujeme snadno.

Najděte derivace funkce $z(x, y) = (x + y)e^{-x}$ do řádu dva.

$$\begin{aligned}z'_x &= (x + y)'_x \cdot e^{-x} + (x + y) \cdot (e^{-x})'_x \\ &= (1 + 0)e^{-x} + (x + y) \cdot e^{-x} \cdot (-1) = e^{-x} \cdot (1 - x - y)\end{aligned}$$

$$z'_y = (x + y)'_y \cdot e^{-x} = (0 + 1)e^{-x}$$

Provedeme derivaci, jak jsme popsali výše.

Najděte derivace funkce $z(x, y) = (x + y)e^{-x}$ do řádu dva.

$$\begin{aligned}z'_x &= (x + y)'_x \cdot e^{-x} + (x + y) \cdot (e^{-x})'_x \\ &= (1 + 0)e^{-x} + (x + y) \cdot e^{-x} \cdot (-1) = e^{-x} \cdot (1 - x - y)\end{aligned}$$

$$z'_y = (x + y)'_y \cdot e^{-x} = (0 + 1)e^{-x} = e^{-x}$$

Upravíme.

Najděte derivace funkce $z(x, y) = (x + y)e^{-x}$ do řádu dva.

$$\begin{aligned}z'_x &= (x + y)'_x \cdot e^{-x} + (x + y) \cdot (e^{-x})'_x \\ &= (1 + 0)e^{-x} + (x + y) \cdot e^{-x} \cdot (-1) = e^{-x} \cdot (1 - x - y)\end{aligned}$$

$$z'_y = (x + y)'_y \cdot e^{-x} = (0 + 1)e^{-x} = e^{-x}$$

$$z''_{xx} = e^{-x} \cdot (-1) \cdot (1 - x - y) + e^{-x}(0 - 1 - 0)$$

- Pro nalezení z''_{xx} derivujeme z'_x podle x .
- Proměnná x je obsažena v obou výrazech figurujících v součinu a je tedy nutno použít pravidlo pro derivaci součinu dvou funkcí.

Najděte derivace funkce $z(x, y) = (x + y)e^{-x}$ do řádu dva.

$$\begin{aligned}z'_x &= (x + y)'_x \cdot e^{-x} + (x + y) \cdot (e^{-x})'_x \\ &= (1 + 0)e^{-x} + (x + y) \cdot e^{-x} \cdot (-1) = e^{-x} \cdot (1 - x - y)\end{aligned}$$

$$z'_y = (x + y)'_y \cdot e^{-x} = (0 + 1)e^{-x} = e^{-x}$$

$$\begin{aligned}z''_{xx} &= e^{-x} \cdot (-1) \cdot (1 - x - y) + e^{-x}(0 - 1 - 0) \\ &= e^{-x}(-1 + x + y - 1)\end{aligned}$$

Vytkneme výraz, který se opakuje.

Najděte derivace funkce $z(x, y) = (x + y)e^{-x}$ do řádu dva.

$$\begin{aligned}z'_x &= (x + y)'_x \cdot e^{-x} + (x + y) \cdot (e^{-x})'_x \\ &= (1 + 0)e^{-x} + (x + y) \cdot e^{-x} \cdot (-1) = e^{-x} \cdot (1 - x - y)\end{aligned}$$

$$z'_y = (x + y)'_y \cdot e^{-x} = (0 + 1)e^{-x} = e^{-x}$$

$$\begin{aligned}z''_{xx} &= e^{-x} \cdot (-1) \cdot (1 - x - y) + e^{-x}(0 - 1 - 0) \\ &= e^{-x}(-1 + x + y - 1) = e^{-x}(x + y - 2)\end{aligned}$$

Upravíme.

Najděte derivace funkce $z(x, y) = (x + y)e^{-x}$ do řádu dva.

$$\begin{aligned}z'_x &= (x + y)'_x \cdot e^{-x} + (x + y) \cdot (e^{-x})'_x \\ &= (1 + 0)e^{-x} + (x + y) \cdot e^{-x} \cdot (-1) = e^{-x} \cdot (1 - x - y)\end{aligned}$$

$$z'_y = (x + y)'_y \cdot e^{-x} = (0 + 1)e^{-x} = e^{-x}$$

$$\begin{aligned}z''_{xx} &= e^{-x} \cdot (-1) \cdot (1 - x - y) + e^{-x}(0 - 1 - 0) \\ &= e^{-x}(-1 + x + y - 1) = e^{-x}(x + y - 2)\end{aligned}$$

$$z''_{xy} = (e^{-x})'_x$$

Abychom našli smíšenou derivaci, vypočteme buď $(z'_x)'_y$ nebo $(z'_y)'_x$.
Druhá možnost se zdá býti schůdnější.

Najděte derivace funkce $z(x, y) = (x + y)e^{-x}$ do řádu dva.

$$\begin{aligned}z'_x &= (x + y)'_x \cdot e^{-x} + (x + y) \cdot (e^{-x})'_x \\ &= (1 + 0)e^{-x} + (x + y) \cdot e^{-x} \cdot (-1) = e^{-x} \cdot (1 - x - y)\end{aligned}$$

$$z'_y = (x + y)'_y \cdot e^{-x} = (0 + 1)e^{-x} = e^{-x}$$

$$\begin{aligned}z''_{xx} &= e^{-x} \cdot (-1) \cdot (1 - x - y) + e^{-x}(0 - 1 - 0) \\ &= e^{-x}(-1 + x + y - 1) = e^{-x}(x + y - 2)\end{aligned}$$

$$z''_{xy} = (e^{-x})'_x = -e^{-x}$$

Protože funkce z'_y je funkcí jedné proměnné, derivujeme jako v diferenciální počtu funkce jedné proměnné pomocí řetězového pravidla pro derivaci složené funkce:

$$(e^{-x})' = e^{-x}(-x)' = e^{-x}(-1)$$

Najděte derivace funkce $z(x, y) = (x + y)e^{-x}$ do řádu dva.

$$\begin{aligned}z'_x &= (x + y)'_x \cdot e^{-x} + (x + y) \cdot (e^{-x})'_x \\ &= (1 + 0)e^{-x} + (x + y) \cdot e^{-x} \cdot (-1) = e^{-x} \cdot (1 - x - y)\end{aligned}$$

$$z'_y = (x + y)'_y \cdot e^{-x} = (0 + 1)e^{-x} = e^{-x}$$

$$\begin{aligned}z''_{xx} &= e^{-x} \cdot (-1) \cdot (1 - x - y) + e^{-x}(0 - 1 - 0) \\ &= e^{-x}(-1 + x + y - 1) = e^{-x}(x + y - 2)\end{aligned}$$

$$z''_{xy} = (e^{-x})'_x = -e^{-x}$$

$$z''_{yy} = 0$$

Abychom našli z''_{yy} , budeme derivovat z'_y podle y . Pozor! Proměnná y v derivaci z'_y vůbec nefiguruje. Výraz z'_y je tedy konstanta vzhledem k y a jeho derivace je nula.

Najděte derivace funkce $z(x, y) = (x + y)e^{-x}$ do řádu dva.

$$\begin{aligned}z'_x &= (x + y)'_x \cdot e^{-x} + (x + y) \cdot (e^{-x})'_x \\ &= (1 + 0)e^{-x} + (x + y) \cdot e^{-x} \cdot (-1) = e^{-x} \cdot (1 - x - y)\end{aligned}$$

$$z'_y = (x + y)'_y \cdot e^{-x} = (0 + 1)e^{-x} = e^{-x}$$

$$\begin{aligned}z''_{xx} &= e^{-x} \cdot (-1) \cdot (1 - x - y) + e^{-x}(0 - 1 - 0) \\ &= e^{-x}(-1 + x + y - 1) = e^{-x}(x + y - 2)\end{aligned}$$

$$z''_{xy} = (e^{-x})'_x = -e^{-x}$$

$$z''_{yy} = 0$$

Hotovo.

Najděte derivace funkce $z(x, y) = \frac{x + y^2}{y - 1}$ do řádu dva.

Najděte derivace funkce $z(x, y) = \frac{x + y^2}{y - 1}$ do řádu dva.

$$z'_x = \frac{1}{y - 1} \cdot (1 + 0)$$

- Abychom měli derivování co nejpohodlnější, napíšeme funkci ve tvaru součinu $\frac{1}{y - 1} \cdot (x + y^2)$.
- Výraz $\frac{1}{y - 1}$ neobsahuje x a je tedy při derivování podle x konstantním násobkem. Potom je derivování snadné.
- Zbývá zderivovat člen $(x + y^2)$ jako součet.

Najděte derivace funkce $z(x, y) = \frac{x + y^2}{y - 1}$ do řádu dva.

$$z'_x = \frac{1}{y - 1} \cdot (1 + 0) = \frac{1}{y - 1}$$

Upravíme.

Najděte derivace funkce $z(x, y) = \frac{x + y^2}{y - 1}$ do řádu dva.

$$z'_x = \frac{1}{y - 1},$$

$$z'_y = \frac{(x + y^2)'_y (y - 1) - (x + y^2)(y - 1)'_y}{(y - 1)^2}$$

Při derivování podle y musíme použít vzorec pro derivaci podílu, protože proměnná y figuruje i v čitateli i ve jmenovateli a finta z předchozího kroku je nyní nepoužitelná. Derivujeme tedy podíl

$$\frac{x + y^2}{y - 1}.$$

Najděte derivace funkce $z(x, y) = \frac{x + y^2}{y - 1}$ do řádu dva.

$$z'_x = \frac{1}{y - 1},$$

$$\begin{aligned} z'_y &= \frac{(x + y^2)'_y(y - 1) - (x + y^2)(y - 1)'_y}{(y - 1)^2} \\ &= \frac{(0 + 2y)(y - 1) - (x + y^2)(1 - 0)}{(y - 1)^2} \end{aligned}$$

Dokončíme derivaci čitatele a jmenovatele.

Najděte derivace funkce $z(x, y) = \frac{x + y^2}{y - 1}$ do řádu dva.

$$z'_x = \frac{1}{y - 1},$$

$$\begin{aligned} z'_y &= \frac{(x + y^2)'_y(y - 1) - (x + y^2)(y - 1)'_y}{(y - 1)^2} \\ &= \frac{(0 + 2y)(y - 1) - (x + y^2)(1 - 0)}{(y - 1)^2} \\ &= \frac{2y^2 - 2y - (x + y^2)}{(y - 1)^2} \end{aligned}$$

Upravíme.

Najděte derivace funkce $z(x, y) = \frac{x + y^2}{y - 1}$ do řádu dva.

$$z'_x = \frac{1}{y - 1},$$

$$\begin{aligned} z'_y &= \frac{(x + y^2)'_y(y - 1) - (x + y^2)(y - 1)'_y}{(y - 1)^2} \\ &= \frac{(0 + 2y)(y - 1) - (x + y^2)(1 - 0)}{(y - 1)^2} \\ &= \frac{2y^2 - 2y - (x + y^2)}{(y - 1)^2} \\ &= \frac{y^2 - 2y - x}{(y - 1)^2} \end{aligned}$$

Ještě upravíme a máme výsledek.

Najděte derivace funkce $z(x, y) = \frac{x + y^2}{y - 1}$ do řádu dva.

$$z'_x = \frac{1}{y - 1}, \quad z'_y = \frac{y^2 - 2y - x}{(y - 1)^2},$$

Našli jsme první derivace a použijeme je k výpočtu druhých derivací.

Najděte derivace funkce $z(x, y) = \frac{x + y^2}{y - 1}$ do řádu dva.

$$z'_x = \frac{1}{y - 1}, \quad z'_y = \frac{y^2 - 2y - x}{(y - 1)^2}, \quad z''_{xx} = 0,$$

$$z''_{yx} = 0$$

- Pro nalezení z''_{xx} budeme derivovat z'_x podle x .
- Protože z'_x neobsahuje proměnnou x , považujeme tento výraz při derivování podle x za konstantu a derivace konstanty je nula.

Najděte derivace funkce $z(x, y) = \frac{x + y^2}{y - 1}$ do řádu dva.

$$z'_x = \frac{1}{y - 1}, \quad z'_y = \frac{y^2 - 2y - x}{(y - 1)^2}, \quad z''_{xx} = 0,$$

$$z''_{xx} = 0$$

$$z''_{xy} = -1 \cdot (y - 1)^{-2} \cdot (1 - 0)$$

- Pro nalezení z''_{xy} budeme derivovat z'_x podle y .
- Protože z'_x neobsahuje x , jedná se vlastně o funkci jedné proměnné a použijeme obyčejnou derivaci.

Najděte derivace funkce $z(x, y) = \frac{x + y^2}{y - 1}$ do řádu dva.

$$z'_x = \frac{1}{y - 1}, \quad z'_y = \frac{y^2 - 2y - x}{(y - 1)^2}, \quad z''_{xx} = 0, \quad z''_{xy} = -\frac{1}{(y - 1)^2}$$

$$z''_{xx} = 0$$

$$z''_{xy} = -1 \cdot (y - 1)^{-2} \cdot (1 - 0) = -\frac{1}{(y - 1)^2}$$

Upravíme.

Najděte derivace funkce $z(x, y) = \frac{x + y^2}{y - 1}$ do řádu dva.

$$z'_x = \frac{1}{y - 1}, \quad z'_y = \frac{y^2 - 2y - x}{(y - 1)^2}, \quad z''_{xx} = 0, \quad z''_{xy} = -\frac{1}{(y - 1)^2}$$

$$z''_{yy} = \frac{(2y - 2)(y - 1)^2 - (y^2 - 2y - x) \cdot 2 \cdot (y - 1) \cdot (1 - 0)}{(y - 1)^4}$$

- Pro nalezení z''_{yy} derivujeme $z'_y = \frac{y^2 - 2y - x}{(y - 1)^2}$ podle y . Protože y je i v čitateli i ve jmenovateli, použijeme vzorec pro derivaci podílu.
- Výraz $(y - 1)^2$ derivujeme jako složenou funkci.

Najděte derivace funkce $z(x, y) = \frac{x + y^2}{y - 1}$ do řádu dva.

$$z'_x = \frac{1}{y - 1}, \quad z'_y = \frac{y^2 - 2y - x}{(y - 1)^2}, \quad z''_{xx} = 0, \quad z''_{xy} = -\frac{1}{(y - 1)^2}$$

$$\begin{aligned} z''_{yy} &= \frac{(2y - 2)(y - 1)^2 - (y^2 - 2y - x) \cdot 2 \cdot (y - 1) \cdot (1 - 0)}{(y - 1)^4} \\ &= 2(y - 1) \frac{(y - 1)^2 - (y^2 - 2y - x)}{(y - 1)^4} \end{aligned}$$

Vytkneme výraz $2(y - 1)$

Najděte derivace funkce $z(x, y) = \frac{x + y^2}{y - 1}$ do řádu dva.

$$z'_x = \frac{1}{y - 1}, \quad z'_y = \frac{y^2 - 2y - x}{(y - 1)^2}, \quad z''_{xx} = 0, \quad z''_{xy} = -\frac{1}{(y - 1)^2}$$

$$\begin{aligned} z''_{yy} &= \frac{(2y - 2)(y - 1)^2 - (y^2 - 2y - x) \cdot 2 \cdot (y - 1) \cdot (1 - 0)}{(y - 1)^4} \\ &= 2(y - 1) \frac{(y - 1)^2 - (y^2 - 2y - x)}{(y - 1)^4} \\ &= 2 \frac{x + 1}{(y - 1)^3} \end{aligned}$$

Upravíme čitatel – roznásobíme a sečteme odpovídající si členy.

Najděte derivace funkce $z(x, y) = \frac{x + y^2}{y - 1}$ do řádu dva.

$$z'_x = \frac{1}{y - 1}, \quad z'_y = \frac{y^2 - 2y - x}{(y - 1)^2}, \quad z''_{xx} = 0, \quad z''_{xy} = -\frac{1}{(y - 1)^2}$$

$$\begin{aligned} z''_{yy} &= \frac{(2y - 2)(y - 1)^2 - (y^2 - 2y - x) \cdot 2 \cdot (y - 1) \cdot (1 - 0)}{(y - 1)^4} \\ &= 2(y - 1) \frac{(y - 1)^2 - (y^2 - 2y - x)}{(y - 1)^4} \\ &= 2 \frac{x + 1}{(y - 1)^3} \end{aligned}$$

Hotovo.

Najděte derivace funkce $z(x, y) = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$ do řádu dva.

Najděte derivace funkce $z(x, y) = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$ do řádu dva.

$$z'_x = \frac{1}{1 + \frac{y^2}{x^2}} \cdot y \cdot (-1)x^{-2}$$

- Derivujeme funkci $\operatorname{arctg}(\cdot)$ podle pravidla $(\operatorname{arctg} f(x))' = \frac{1}{1 + f^2(x)}$ (derivace funkce arkustangens a derivace složené funkce).
- Výraz $\frac{y}{x}$ derivujeme jako součin **konstantního výrazu** a **mocninné funkce**, tj. $\frac{y}{x} = y \cdot x^{-1}$.

Najděte derivace funkce $z(x, y) = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$ do řádu dva.

$$z'_x = \frac{1}{1 + \frac{y^2}{x^2}} \cdot y \cdot (-1)x^{-2} = -\frac{x^2}{x^2 + y^2} \cdot \frac{y}{x^2}$$

Upravíme. Mimo jiné použijeme úpravu

$$\frac{1}{1 + \frac{y^2}{x^2}} = \frac{x^2}{x^2 \left(1 + \frac{y^2}{x^2}\right)} = \frac{x^2}{x^2 + y^2}$$

a

$$x^{-2} = \frac{1}{x^2}.$$

Najděte derivace funkce $z(x, y) = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$ do řádu dva.

$$z'_x = \frac{1}{1 + \frac{y^2}{x^2}} \cdot y \cdot (-1)x^{-2} = -\frac{x^2}{x^2 + y^2} \cdot \frac{y}{x^2} = -\frac{y}{x^2 + y^2}$$

Vynásobíme zlomky. Člen x^2 se zkrátí.

Najděte derivace funkce $z(x, y) = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$ do řádu dva.

$$z'_x = \frac{1}{1 + \frac{y^2}{x^2}} \cdot y \cdot (-1)x^{-2} = -\frac{x^2}{x^2 + y^2} \cdot \frac{y}{x^2} = -\frac{y}{x^2 + y^2}$$

$$z'_y = \frac{1}{1 + \frac{y^2}{x^2}} \cdot \frac{1}{x} \cdot 1$$

Použijeme vzorec $(\operatorname{arctg}(f(x)))' = \frac{1}{1 + f^2(x)} f'(x)$ a výraz $\frac{y}{x}$

derivujeme jako součin **konstanty** a **mocninné funkce**, tj.

$$\frac{y}{x} = \frac{1}{x} \cdot y$$

Najděte derivace funkce $z(x, y) = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$ do řádu dva.

$$z'_x = \frac{1}{1 + \frac{y^2}{x^2}} \cdot y \cdot (-1)x^{-2} = -\frac{x^2}{x^2 + y^2} \cdot \frac{y}{x^2} = -\frac{y}{x^2 + y^2}$$

$$z'_y = \frac{1}{1 + \frac{y^2}{x^2}} \cdot \frac{1}{x} \cdot 1 = \frac{x^2}{x^2 + y^2} \cdot \frac{1}{x}$$

Upravíme.

Najděte derivace funkce $z(x, y) = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$ do řádu dva.

$$z'_x = \frac{1}{1 + \frac{y^2}{x^2}} \cdot y \cdot (-1)x^{-2} = -\frac{x^2}{x^2 + y^2} \cdot \frac{y}{x^2} = -\frac{y}{x^2 + y^2}$$

$$z'_y = \frac{1}{1 + \frac{y^2}{x^2}} \cdot \frac{1}{x} \cdot 1 = \frac{x^2}{x^2 + y^2} \cdot \frac{1}{x} = \frac{x}{x^2 + y^2}$$

Vynásobíme zlomky a zkrátíme x .

Najděte derivace funkce $z(x, y) = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$ do řádu dva.

$$z'_x = -\frac{y}{x^2 + y^2},$$

$$z'_y = \frac{x}{x^2 + y^2},$$

Našli jsme první derivace.

Najděte derivace funkce $z(x, y) = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$ do řádu dva.

$$z'_x = -\frac{y}{x^2 + y^2},$$

$$z'_y = \frac{x}{x^2 + y^2},$$

$$z''_{xx} = -y \cdot (-1) \cdot (x^2 + y^2)^{-2} \cdot (2x + 0)$$

Derivujeme $z'_x = -y \cdot (x^2 + y^2)^{-1}$ podle x . Člen $(-y)$ je **konstantní násobek** a dále používáme pravidlo pro **derivaci složené funkce** $(x^2 + y^2)^{-1}$.

Najděte derivace funkce $z(x, y) = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$ do řádu dva.

$$z'_x = -\frac{y}{x^2 + y^2},$$

$$z'_y = \frac{x}{x^2 + y^2},$$

$$z''_{xx} = -y \cdot (-1) \cdot (x^2 + y^2)^{-2} \cdot (2x + 0) = \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}$$

Upravíme.

Najděte derivace funkce $z(x, y) = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$ do řádu dva.

$$z'_x = -\frac{y}{x^2 + y^2},$$

$$z'_y = \frac{x}{x^2 + y^2},$$

$$z''_{xx} = -y \cdot (-1) \cdot (x^2 + y^2)^{-2} \cdot (2x + 0) = \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$z''_{xy} = -\frac{1 \cdot (x^2 + y^2) - y \cdot (0 + 2y)}{(x^2 + y^2)^2}$$

Derivujeme $z'_x = -\frac{y}{x^2 + y^2}$ podle y pomocí vzorce pro derivaci podílu.

Najděte derivace funkce $z(x, y) = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$ do řádu dva.

$$z'_x = -\frac{y}{x^2 + y^2},$$

$$z'_y = \frac{x}{x^2 + y^2},$$

$$z''_{xx} = -y \cdot (-1) \cdot (x^2 + y^2)^{-2} \cdot (2x + 0) = \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$z''_{xy} = -\frac{1 \cdot (x^2 + y^2) - y \cdot (0 + 2y)}{(x^2 + y^2)^2} = -\frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

Upravíme čítelel.

Najděte derivace funkce $z(x, y) = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$ do řádu dva.

$$z'_x = -\frac{y}{x^2 + y^2},$$

$$z'_y = \frac{x}{x^2 + y^2},$$

$$z''_{xx} = -y \cdot (-1) \cdot (x^2 + y^2)^{-2} \cdot (2x + 0) = \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$z''_{xy} = -\frac{1 \cdot (x^2 + y^2) - y \cdot (0 + 2y)}{(x^2 + y^2)^2} = -\frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

Vynásobíme se záporným znaménkem před zlomkem.

Najděte derivace funkce $z(x, y) = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$ do řádu dva.

$$z'_x = -\frac{y}{x^2 + y^2},$$

$$z'_y = \frac{x}{x^2 + y^2},$$

$$z''_{xx} = -y \cdot (-1) \cdot (x^2 + y^2)^{-2} \cdot (2x + 0) = \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$z''_{xy} = -\frac{1 \cdot (x^2 + y^2) - y \cdot (0 + 2y)}{(x^2 + y^2)^2} = -\frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$z''_{yy} = x \cdot (-1) \cdot (x^2 + y^2)^{-2} \cdot (0 + 2y)$$

Derivujeme $z'_y = x \cdot (x^2 + y^2)^{-1}$ podle y , přičemž x považujeme za **konstantu** a $(x^2 + y^2)^{-1}$ za **mocninnou funkci s vnitřní složkou** $(x^2 + y^2)$.

Najděte derivace funkce $z(x, y) = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$ do řádu dva.

$$z'_x = -\frac{y}{x^2 + y^2},$$

$$z'_y = \frac{x}{x^2 + y^2},$$

$$z''_{xx} = -y \cdot (-1) \cdot (x^2 + y^2)^{-2} \cdot (2x + 0) = \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$z''_{xy} = -\frac{1 \cdot (x^2 + y^2) - y \cdot (0 + 2y)}{(x^2 + y^2)^2} = -\frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$z''_{yy} = x \cdot (-1) \cdot (x^2 + y^2)^{-2} \cdot (0 + 2y) = -\frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}$$

Upravíme.

Najděte derivace funkce $z(x, y) = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$ do řádu dva.

$$z'_x = -\frac{y}{x^2 + y^2},$$

$$z'_y = \frac{x}{x^2 + y^2},$$

$$z''_{xx} = -y \cdot (-1) \cdot (x^2 + y^2)^{-2} \cdot (2x + 0) = \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$z''_{xy} = -\frac{1 \cdot (x^2 + y^2) - y \cdot (0 + 2y)}{(x^2 + y^2)^2} = -\frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$z''_{yy} = x \cdot (-1) \cdot (x^2 + y^2)^{-2} \cdot (0 + 2y) = -\frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}$$

Hotovo.

Najděte derivace funkce $z(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ do řádu dva.

Najděte derivace funkce $z(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ do řádu dva.

$$z'_x = \frac{1}{2}(1 - x^2 - y^2)^{-1/2}(-2x)$$

Derivujeme jako složenou funkci, vnější složka je mocninná s exponentem $\frac{1}{2}$ a derivaci složené funkce počítáme ze vzorce

$$\left(f(g(x))\right)' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

Najděte derivace funkce $z(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ do řádu dva.

$$z'_x = \frac{1}{2}(1 - x^2 - y^2)^{-1/2}(-2x) = -\frac{x}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}$$

Upravíme.

Najděte derivace funkce $z(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ do řádu dva.

$$z'_x = \frac{1}{2}(1 - x^2 - y^2)^{-1/2}(-2x) = -\frac{x}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}$$

$$z'_y = \frac{1}{2}(1 - x^2 - y^2)^{-1/2}(-2y)$$

Derivujeme jako složenou funkci, vnější složka je mocninná s exponentem $\frac{1}{2}$ a derivaci složené funkce počítáme ze vzorce

$$(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

Najděte derivace funkce $z(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ do řádu dva.

$$z'_x = \frac{1}{2}(1 - x^2 - y^2)^{-1/2}(-2x) = -\frac{x}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}$$

$$z'_y = \frac{1}{2}(1 - x^2 - y^2)^{-1/2}(-2y) = -\frac{y}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}$$

Upravíme.

Najděte derivace funkce $z(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ do řádu dva.

$$z'_x = -\frac{x}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}$$

$$z'_y = -\frac{y}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}$$

$$z''_{xx} = -\frac{1 \cdot \sqrt{1 - x^2 - y^2} - x \cdot \frac{1}{2} \cdot (1 - x^2 - y^2)^{-1/2}(-2x)}{1 - x^2 - y^2}$$

Derivujeme jako podíl funkcí

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$$

Najděte derivace funkce $z(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ do řádu dva.

$$z'_x = -\frac{x}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}$$

$$z'_y = -\frac{y}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}$$

$$\begin{aligned} z''_{xx} &= -\frac{1 \cdot \sqrt{1 - x^2 - y^2} - x \cdot \frac{1}{2} \cdot (1 - x^2 - y^2)^{-1/2} \cdot (-2x)}{1 - x^2 - y^2} \\ &= -\frac{(1 - x^2 - y^2) + x^2}{(1 - x^2 - y^2)^{3/2}} \end{aligned}$$

Rozšíříme zlomek výrazem $\sqrt{1 - x^2 - y^2}$. Tím odstraníme složený zlomek.

Najděte derivace funkce $z(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ do řádu dva.

$$z'_x = -\frac{x}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}$$

$$z'_y = -\frac{y}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}$$

$$\begin{aligned} z''_{xx} &= -\frac{1 \cdot \sqrt{1 - x^2 - y^2} - x \cdot \frac{1}{2} \cdot (1 - x^2 - y^2)^{-1/2}(-2x)}{1 - x^2 - y^2} \\ &= -\frac{(1 - x^2 - y^2) + x^2}{(1 - x^2 - y^2)^{3/2}} = \frac{y^2 - 1}{(1 - x^2 - y^2)^{3/2}} \end{aligned}$$

Upravíme.

Najděte derivace funkce $z(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ do řádu dva.

$$z'_x = -\frac{x}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}$$

$$z'_y = -\frac{y}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}$$

$$\begin{aligned} z''_{xx} &= -\frac{1 \cdot \sqrt{1 - x^2 - y^2} - x \cdot \frac{1}{2} \cdot (1 - x^2 - y^2)^{-1/2}(-2x)}{1 - x^2 - y^2} \\ &= -\frac{(1 - x^2 - y^2) + x^2}{(1 - x^2 - y^2)^{3/2}} = \frac{y^2 - 1}{(1 - x^2 - y^2)^{3/2}} \end{aligned}$$

$$z''_{xy} = -x \left(-\frac{1}{2}\right) (1 - x^2 - y^2)^{-3/2}(-2y)$$

Přepíšeme derivaci podle x do tvaru $z'_x = -x \cdot (1 - x^2 - y^2)^{-1/2}$, x považujeme za konstantu (derivujeme podle y) a použijeme pravidlo pro derivaci konstantního násobku a derivaci složené funkce.

Najděte derivace funkce $z(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ do řádu dva.

$$z'_x = -\frac{x}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}$$

$$z'_y = -\frac{y}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}$$

$$z''_{xx} = -\frac{1 \cdot \sqrt{1 - x^2 - y^2} - x \cdot \frac{1}{2} \cdot (1 - x^2 - y^2)^{-1/2}(-2x)}{1 - x^2 - y^2}$$

$$= -\frac{(1 - x^2 - y^2) + x^2}{(1 - x^2 - y^2)^{3/2}} = \frac{y^2 - 1}{(1 - x^2 - y^2)^{3/2}}$$

$$z''_{xy} = -x \left(-\frac{1}{2}\right) (1 - x^2 - y^2)^{-3/2}(-2y) = -\frac{xy}{(1 - x^2 - y^2)^{3/2}}$$

Upravíme.

Najděte derivace funkce $z(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ do řádu dva.

$$z'_x = -\frac{x}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}$$

$$z'_y = -\frac{y}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}$$

$$z''_{xx} = -\frac{1 \cdot \sqrt{1 - x^2 - y^2} - x \cdot \frac{1}{2} \cdot (1 - x^2 - y^2)^{-1/2}(-2x)}{1 - x^2 - y^2}$$

$$= -\frac{(1 - x^2 - y^2) + x^2}{(1 - x^2 - y^2)^{3/2}} = \frac{y^2 - 1}{(1 - x^2 - y^2)^{3/2}}$$

$$z''_{xy} = -x \left(-\frac{1}{2}\right) (1 - x^2 - y^2)^{-3/2}(-2y) = -\frac{xy}{(1 - x^2 - y^2)^{3/2}}$$

$$z''_{yy} = \frac{x^2 - 1}{(1 - x^2 - y^2)^{3/2}}$$

Výpočet z''_{yy} je podobný jako výpočet z''_{xx} .

Najděte derivace funkce $z(x, y) = (x^2 + y)e^{x^2 - y}$ do řádu dva.

Najděte derivace funkce $z(x, y) = (x^2 + y)e^{x^2 - y}$ do řádu dva.

$$z'_x = 2x \cdot e^{x^2 - y} + (x^2 + y) \cdot e^{x^2 - y} (2x)$$

Derivace součinu

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$$

Najděte derivace funkce $z(x, y) = (x^2 + y)e^{x^2 - y}$ do řádu dva.

$$z'_x = 2x \cdot e^{x^2 - y} + (x^2 + y) \cdot e^{x^2 - y}(2x) = 2xe^{x^2 - y}(x^2 + y + 1)$$

Vytkneme $2xe^{x^2 - y}$.

Najděte derivace funkce $z(x, y) = (x^2 + y)e^{x^2 - y}$ do řádu dva.

$$z'_x = 2x \cdot e^{x^2 - y} + (x^2 + y) \cdot e^{x^2 - y}(2x) = 2xe^{x^2 - y}(x^2 + y + 1)$$

$$z'_y = 1 \cdot e^{x^2 - y} + (x^2 + y) \cdot e^{x^2 - y}(-1)$$

Derivace součinu

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$$

Najděte derivace funkce $z(x, y) = (x^2 + y)e^{x^2 - y}$ do řádu dva.

$$z'_x = 2x \cdot e^{x^2 - y} + (x^2 + y) \cdot e^{x^2 - y}(2x) = 2xe^{x^2 - y}(x^2 + y + 1)$$

$$z'_y = 1 \cdot e^{x^2 - y} + (x^2 + y) \cdot e^{x^2 - y}(-1) = e^{x^2 - y}(1 - x^2 - y^2)$$

Upravíme vytknutím $e^{x^2 - y}$.

Najděte derivace funkce $z(x, y) = (x^2 + y)e^{x^2-y}$ do řádu dva.

$$z'_x = 2x \cdot e^{x^2-y} + (x^2 + y) \cdot e^{x^2-y}(2x) = 2xe^{x^2-y}(x^2 + y + 1)$$

$$z'_y = 1 \cdot e^{x^2-y} + (x^2 + y) \cdot e^{x^2-y}(-1) = e^{x^2-y}(1 - x^2 - y^2)$$

$$z''_{xx} = e^{x^2-y}(2x) \cdot (2x^3 + 2xy + 2x) + e^{x^2-y}(6x^2 + 2y + 2)$$

Přepíšeme derivaci z'_x do tvaru

$$z'_x = e^{x^2-y} \cdot (2x^3 + 2xy + 2x)$$

a použijeme pravidlo pro derivaci součinu

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'.$$

Najděte derivace funkce $z(x, y) = (x^2 + y)e^{x^2-y}$ do řádu dva.

$$z'_x = 2x \cdot e^{x^2-y} + (x^2 + y) \cdot e^{x^2-y}(2x) = 2xe^{x^2-y}(x^2 + y + 1)$$

$$z'_y = 1 \cdot e^{x^2-y} + (x^2 + y) \cdot e^{x^2-y}(-1) = e^{x^2-y}(1 - x^2 - y^2)$$

$$\begin{aligned} z''_{xx} &= e^{x^2-y}(2x) \cdot (2x^3 + 2xy + 2x) + e^{x^2-y}(6x^2 + 2y + 2) \\ &= 2e^{x^2-y}(2x^4 + 2x^2y + 2x^2 + 3x^2 + y + 1) \end{aligned}$$

Vytkneme $2e^{x^2-y}$.

Najděte derivace funkce $z(x, y) = (x^2 + y)e^{x^2 - y}$ do řádu dva.

$$z'_x = 2x \cdot e^{x^2 - y} + (x^2 + y) \cdot e^{x^2 - y}(2x) = 2xe^{x^2 - y}(x^2 + y + 1)$$

$$z'_y = 1 \cdot e^{x^2 - y} + (x^2 + y) \cdot e^{x^2 - y}(-1) = e^{x^2 - y}(1 - x^2 - y^2)$$

$$\begin{aligned} z''_{xx} &= e^{x^2 - y}(2x) \cdot (2x^3 + 2xy + 2x) + e^{x^2 - y}(6x^2 + 2y + 2) \\ &= 2e^{x^2 - y}(2x^4 + 2x^2y + 2x^2 + 3x^2 + y + 1) \\ &= 2e^{x^2 - y}(2x^4 + 2x^2y + 5x^2 + y + 1) \end{aligned}$$

Upravíme v závorce.

Najděte derivace funkce $z(x, y) = (x^2 + y)e^{x^2 - y}$ do řádu dva.

$$z'_x = 2x \cdot e^{x^2 - y} + (x^2 + y) \cdot e^{x^2 - y}(2x) = 2xe^{x^2 - y}(x^2 + y + 1)$$

$$z'_y = 1 \cdot e^{x^2 - y} + (x^2 + y) \cdot e^{x^2 - y}(-1) = e^{x^2 - y}(1 - x^2 - y^2)$$

$$z''_{xy} = e^{x^2 - y} \cdot (-2x) + e^{x^2 - y} \cdot (-2x) = -4xe^{x^2 - y}$$

Začneme u parciální derivace

$$z'_y = e^{x^2 - y}(1 - x^2 - y^2)$$

a derivujeme podle x pomocí pravidla pro derivaci součinu

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$$

Najděte derivace funkce $z(x, y) = (x^2 + y)e^{x^2 - y}$ do řádu dva.

$$z'_x = 2x \cdot e^{x^2 - y} + (x^2 + y) \cdot e^{x^2 - y}(2x) = 2xe^{x^2 - y}(x^2 + y + 1)$$

$$z'_y = 1 \cdot e^{x^2 - y} + (x^2 + y) \cdot e^{x^2 - y}(-1) = e^{x^2 - y}(1 - x^2 - y^2)$$

$$\begin{aligned} z''_{xy} &= e^{x^2 - 1}(2x) \cdot (1 - x^2 - y) + e^{x^2 - y} \cdot (-2x) \\ &= 2xe^{x^2 - y}(1 - x^2 - y - 1) \end{aligned}$$

Vytkneme $2xe^{x^2 - y}$.

Najděte derivace funkce $z(x, y) = (x^2 + y)e^{x^2 - y}$ do řádu dva.

$$z'_x = 2x \cdot e^{x^2 - y} + (x^2 + y) \cdot e^{x^2 - y}(2x) = 2xe^{x^2 - y}(x^2 + y + 1)$$

$$z'_y = 1 \cdot e^{x^2 - y} + (x^2 + y) \cdot e^{x^2 - y}(-1) = e^{x^2 - y}(1 - x^2 - y^2)$$

$$\begin{aligned} z''_{xy} &= e^{x^2 - 1}(2x) \cdot (1 - x^2 - y) + e^{x^2 - y} \cdot (-2x) \\ &= 2xe^{x^2 - y}(1 - x^2 - y - 1) \\ &= -2xe^{x^2 - y}(x^2 + y) \end{aligned}$$

Upravíme.

Najděte derivace funkce $z(x, y) = (x^2 + y)e^{x^2 - y}$ do řádu dva.

$$z'_x = 2x \cdot e^{x^2 - y} + (x^2 + y) \cdot e^{x^2 - y}(2x) = 2xe^{x^2 - y}(x^2 + y + 1)$$

$$z'_y = 1 \cdot e^{x^2 - y} + (x^2 + y) \cdot e^{x^2 - y}(-1) = e^{x^2 - y}(1 - x^2 - y^2)$$

$$z''_{yy} = e^{x^2 - y}(-1) \cdot (1 - x^2 - y) + e^{x^2 - y} \cdot (-1)$$

Pro nalezení z''_{yy} využijeme

$$z'_y = e^{x^2 - y}(1 - x^2 - y^2)$$

a derivujeme jako součin funkcí podle pravidla

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$$

Najděte derivace funkce $z(x, y) = (x^2 + y)e^{x^2-y}$ do řádu dva.

$$z'_x = 2x \cdot e^{x^2-y} + (x^2 + y) \cdot e^{x^2-y}(2x) = 2xe^{x^2-y}(x^2 + y + 1)$$

$$z'_y = 1 \cdot e^{x^2-y} + (x^2 + y) \cdot e^{x^2-y}(-1) = e^{x^2-y}(1 - x^2 - y^2)$$

$$\begin{aligned} z''_{yy} &= e^{x^2-y}(-1) \cdot (1 - x^2 - y) + e^{x^2-y} \cdot (-1) \\ &= (-1)e^{x^2-y}(2 - x^2 - y) \end{aligned}$$

Vytkneme $(-1)e^{x^2-y}$. Hotovo.

Najděte derivace funkce $z(x, y) = e^{x^2+y^2}$ do řádu dva.

Najděte derivace funkce $z(x, y) = e^{x^2+y^2}$ do řádu dva.

$$z'_x = e^{x^2+y^2} \cdot 2x$$

Derivujeme jako složenou funkci

$$\left(f(g(x))\right)' = f'(g(x)) \cdot g'(x).$$

Najděte derivace funkce $z(x, y) = e^{x^2+y^2}$ do řádu dva.

$$z'_x = e^{x^2+y^2} \cdot 2x$$

$$z'_y = e^{x^2+y^2} \cdot 2y$$

Derivujeme jako složenou funkci

$$\left(f(g(x))\right)' = f'(g(x)) \cdot g'(x).$$

Najděte derivace funkce $z(x, y) = e^{x^2+y^2}$ do řádu dva.

$$z'_x = e^{x^2+y^2} \cdot 2x$$

$$z'_y = e^{x^2+y^2} \cdot 2y$$

$$z''_{xx} = e^{x^2+y^2} 2x \cdot 2x + e^{x^2+y^2} \cdot 2$$

Derivujeme jako součin funkcí

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'.$$

Najděte derivace funkce $z(x, y) = e^{x^2+y^2}$ do řádu dva.

$$z'_x = e^{x^2+y^2} \cdot 2x$$

$$z'_y = e^{x^2+y^2} \cdot 2y$$

$$z''_{xx} = e^{x^2+y^2} 2x \cdot 2x + e^{x^2+y^2} \cdot 2 = 2e^{x^2+y^2} (1 + 2x^2)$$

Upravíme.

Najděte derivace funkce $z(x, y) = e^{x^2+y^2}$ do řádu dva.

$$z'_x = e^{x^2+y^2} \cdot 2x$$

$$z'_y = e^{x^2+y^2} \cdot 2y$$

$$z''_{xx} = e^{x^2+y^2} 2x \cdot 2x + e^{x^2+y^2} \cdot 2 = 2e^{x^2+y^2} (1 + 2x^2)$$

$$z''_{xy} = 2x \cdot e^{x^2+y^2} 2y$$

Derivujeme jako konstantní násobek.

Najděte derivace funkce $z(x, y) = e^{x^2+y^2}$ do řádu dva.

$$z'_x = e^{x^2+y^2} \cdot 2x$$

$$z'_y = e^{x^2+y^2} \cdot 2y$$

$$z''_{xx} = e^{x^2+y^2} 2x \cdot 2x + e^{x^2+y^2} \cdot 2 = 2e^{x^2+y^2} (1 + 2x^2)$$

$$z''_{xy} = 2x \cdot e^{x^2+y^2} 2y = 4xye^{x^2+y^2}$$

Upravíme.

Najděte derivace funkce $z(x, y) = e^{x^2+y^2}$ do řádu dva.

$$z'_x = e^{x^2+y^2} \cdot 2x$$

$$z'_y = e^{x^2+y^2} \cdot 2y$$

$$z''_{xx} = e^{x^2+y^2} 2x \cdot 2x + e^{x^2+y^2} \cdot 2 = 2e^{x^2+y^2} (1 + 2x^2)$$

$$z''_{xy} = 2x \cdot e^{x^2+y^2} 2y = 4xye^{x^2+y^2}$$

$$z''_{yy} = e^{x^2+y^2} 2y \cdot 2y + e^{x^2+y^2} \cdot 2$$

Derivujeme jako součin funkcí

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$$

Najděte derivace funkce $z(x, y) = e^{x^2+y^2}$ do řádu dva.

$$z'_x = e^{x^2+y^2} \cdot 2x$$

$$z'_y = e^{x^2+y^2} \cdot 2y$$

$$z''_{xx} = e^{x^2+y^2} 2x \cdot 2x + e^{x^2+y^2} \cdot 2 = 2e^{x^2+y^2} (1 + 2x^2)$$

$$z''_{xy} = 2x \cdot e^{x^2+y^2} 2y = 4xye^{x^2+y^2}$$

$$z''_{yy} = e^{x^2+y^2} 2y \cdot 2y + e^{x^2+y^2} \cdot 2 = 2e^{x^2+y^2} (1 + 2y^2)$$

Upravíme.

To je vše.