

MASARYKOVA UNIVERZITA

PEDAGOGICKÁ FAKULTA

Katedra matematiky



**Aplikace diferenciálního počtu funkcí jedné
proměnné ve slovních úlohách**

Diplomová práce

Brno 2008

Autor práce: Zdeněk Hrnčířík Vedoucí práce: RNDr. Šárka Hošková, Ph.D.

Bibliografický záznam

HRNČIŘÍK, Zdeněk. *Aplikace diferenciálního počtu funkcí jedné proměnné ve slovních úlohách : diplomová práce*. Brno : Masarykova univerzita, Fakulta pedagogická, Katedra matematiky, 2008. 78 s. Vedoucí diplomové práce RNDr. Šárka Hošková, Ph.D.

Anotace

Diplomová práce „Aplikace diferenciálního počtu funkcí jedné proměnné ve slovních úlohách“ je rozdělena na čtyři hlavní části.

V úvodní části práce jsou shrnuty základní historické souvislosti infinitesimálního počtu s důrazem na diferenciální počet.

V hlavní části jsou uvedeny základními pojmy diferenciálního počtu, jejich interpretace na středních školách a ukázky aplikace diferenciálního počtu v běžném životě.

Vyvrcholením mé diplomové práce je sbírka řešených a neřešených problémových úloh, které mohou pomoci při výuce na středních školách.

Abstract

Diploma thesis „Applications of differential calculus of functions of one variable to word problems“ is divided to four main parts.

In the introductory part an elementary historical overview of infinitesimal calculus with emphasis on differential calculus is given.

The main part of the work deals with basic concepts of differential calculus, their interpretation at high school and its applications in real life.

The goal of this diploma thesis is the collection of exercises, which can help during an educational process at high school.

Klíčová slova

Diferenciální počet, limita, spojitost, derivace, aplikace, extrémální úlohy.

Keywords

Differential calculus, limit, continuity, derivative, application, extremization problems.

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem diplomovou práci vypracoval samostatně s použitím uvedené literatury. Souhlasím, aby byla tato práce uložena v knihovně Pedagogické fakulty Masarykovy univerzity v Brně a využívána ke studijním účelům.

V Brně dne 17. 4. 2008

.....

Zdeněk Hrnčířík

Poděkování

Rád bych poděkoval RNDr. Šárce Hoškové, Ph.D. za odborné vedení, cenné rady a připomínky, které přispěli k realizaci této diplomové práce. Dále chci poděkovat RNDr. Karlu Lepkovi, Dr. za užitečné konzultace, které mi poskytl a tím přispěl k vylepšení obsahu a zdokonalení mé diplomové práce.

Obsah

ÚVOD.....	8
1. ÚVOD DO INFINITEZIMÁLNÍHO POČTU	9
2. INFINITEZIMÁLNÍ POČET – ZAKLADATELÉ A OBJEV	9
2.1 <i>SPOR O PRVENSTVÍ OBJEVU INFINITEZIMÁLNÍHO POČTU –</i>	
<i>G. W. LEIBNIZ NEBO I. NEWTON ?</i>	<i>10</i>
2.2 <i>HISTORICKÝ VÝVOJ INFINITEZIMÁLNÍHO POČTU OD POČÁTKU AŽ PO SOUČASNOST</i>	<i>10</i>
3. NEJVÝZNAMNĚJŠÍ MYSLITELÉ INFINITEZIMÁLNÍHO POČTU, JEJICH	
 MYŠLENKY A DÍLA.....	14
3.1 <i>EUDOXUS Z KNIDU (ASI 408 – 355 PŘ. N. L.).....</i>	<i>14</i>
3.2 <i>ARCHIMÉDES ZE SYRAKUS (OKOLO 287 – 212 PŘ. N. L.).....</i>	<i>17</i>
3.2.1 „Kvadratura paraboly“	18
3.2.2 Archimédova mechanická metoda pro výpočet kvadratur	20
3.3 <i>JOHANNES KEPLER (1571 – 1630)</i>	<i>22</i>
3.4 <i>PIERRE DE FERMAT (1601 – 1665).....</i>	<i>24</i>
3.5 <i>ISAAC NEWTON (1643 – 1727)</i>	<i>26</i>
3.6 <i>GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ (1646 – 1716)</i>	<i>28</i>
4. ELEMENTÁRNÍ POJMY DIFERENCIÁLNÍHO POČTU	31
4.1 <i>ZÁKLADNÍ POJMY ZAVÁDĚNÉ NA SŠ.....</i>	<i>31</i>
4.1.1 Směrnice přímky	31
4.1.2 Směrnice tečny.....	33
4.2 <i>LIMITA</i>	<i>34</i>
4.2.1 Motivace limity	34
4.2.2 Definice limity – Heineho	35
4.2.3 Definice limity - Cauchyova	35
4.3 <i>SPOJITOST</i>	<i>36</i>
4.3.1 Motivace spojitosti.....	36
4.3.2 Definice spojitosti	36
4.3.3 Definice spojitosti pomocí limity	36
4.4 <i>DERIVACE.....</i>	<i>37</i>
4.4.1 Geometrická motivace derivace	37
4.4.2 Fyzikální motivace derivace	39
4.4.3 Definice derivace	41
4.5 <i>DIFERENCIÁL FUNKCE</i>	<i>42</i>

4.6	<i>ZÁKLADNÍ DEFINICE A VĚTY DIFERENCIÁLNÍHO POČTU</i>	43
4.6.1	Lagrangeova věta (o střední hodnotě)	43
4.6.2	Monotónnost a derivace	44
4.6.3	Extrémy – lokální maxima, minima	45
5.	APLIKACE DIFERENCIÁLNÍHO POČTU	46
5.1	Tečna ke křivce	46
5.2	Vzdálenost bodu od přímky	47
5.3	Přibližné řešení rovnice - metoda tečen	48
5.4	Postup při vyšetřování průběhu funkce	49
5.5	Lineární aproximace a tělesná hmotnost – Odhad ideální váhy	52
5.6	Praktické vyšetřování extrémů – Tuhost nosníku	53
5.7	Výpočet rychlosti objektů – Rychlost pohybujícího se stínu lampy	54
5.8	Optimalizační úlohy	55
6.	ŘEŠENÉ PROBLÉMOVÉ SLOVNÍ ÚLOHY	58
6.1	<i>PROBLÉM STAVBY BAZÉNU</i>	58
6.2	<i>PROBLÉM PARNÍHO KOTLE</i>	59
6.3	<i>PROBLÉM STAVBY SILÁŽNÍ JÁMY</i>	60
6.4	<i>PROBLÉM LÍNÉHO KOSA</i>	61
6.5	<i>PROBLÉM LOMU SVĚTLA</i>	62
6.6	<i>PROBLÉM VNUKA</i>	63
6.7	<i>PROBLÉM STŘEDOVĚKÉHO STAVITELE</i>	64
6.8	<i>PROBLÉM NÁRUŽIVÉHO KAFAŘE</i>	65
6.9	<i>PROBLÉM GONDOLIÉRA</i>	66
6.10	<i>PROBLÉM LETECKÉ SPOLEČNOSTI</i>	67
6.11	<i>PROBLÉM STAVITELE SILNIC</i>	68
6.12	<i>PROBLÉM DVOU RADIOAMATÉRŮ</i>	69
6.13	<i>PROBLÉM SVÁŘEČE</i>	70
7.	NEŘEŠENÉ SLOVNÍ ÚLOHY NA PROCVIČENÍ	71
7.1	<i>NEŘEŠENÉ SLOVNÍ ÚLOHY S UVEDENÝMI VÝSLEDKY</i>	71
7.2	<i>NEŘEŠENÉ SLOVNÍ ÚLOHY BEZ UVEDENÝCH VÝSLEDKŮ</i>	75
	ZÁVĚR	77
	RESUMÉ	78
	SUMMARY	78
	POUŽITÁ LITERATURA	79

ÚVOD

S nově zavedenými reformami školství a tím vzniklého školního vzdělávacího programu se ve své diplomové práci snažím doplnit osnovy učiva středoškolské matematiky. Konkrétně jsem se zaměřil na učivo diferenciálního počtu.

Zde se nabízí otázka, zda mají být základy infinitezimálního počtu zařazeny do osnov středoškolského učiva? Myslím si, že alespoň se základními metodami diferenciálního a integrálního počtu by měli být seznámeni všichni studenti středních škol. Uvědomuji si, že dané učivo je pro žáky příliš abstraktní a tudíž obtížné. Ze své zkušenosti ovšem vím, že pokud se studenti „proberou“ tím množstvím definic a vět, stává se pro ně tato partie jednou z nejzajímavějších částí celé matematiky.

Ve své diplomové práci se proto zaměřuji na přiblížení („polidštění“) učiva studentům. Svě v ní mohou také najít učitelé středních škol a zájemci o matematiku, použijí-li ji jako inspiraci k výkladu nebo k následnému hlubšímu studiu.

Dílním cílem mé diplomové práce je přiblížit historické souvislosti vývoje infinitezimálního počtu s větším důrazem na diferenciální počet. Nejprve se zaměřuji na historické osobnosti, kde popisují jejich základní metody a úlohy, které později vedly k objevu infinitezimálního počtu, jak jej známe dnes. Uvedením stručného vývoje a základů infinitezimálního počtu bych rád přispěl učitelům ke zkvalitnění výuky. Interpretace historických objevů jsou převážně metodami středoškolské matematiky. Což byl také můj záměr, aby byl předkládaný text pro studenty i učitele, co možná nejsrozumitelnější. „Středoškolské“ postupy zpracování myšlenek nejvýznamnějších myslitelů infinitezimálního počtu chápu jako předstupeň ke studiu daného učiva a k jeho patřičnému pochopení. Jsem si vědom, že i malý rozsah výuky dané problematiky na střední škole vyžaduje zavedení mnoha nových pojmů. Jelikož určitá přesnost a systém matematiky musí být zachovány, uvádím také nezbytné základní definice, věty a jejich interpretace. Tyto nové pojmy se dají na školách interpretovat pomocí vhodných aplikačních, motivačních i konkrétních příkladů, které ve své diplomové práci uvádím.

Hlavním cílem mé diplomové práce jsou ukázky aplikací diferenciálního počtu s využitím problémových příkladů. Vytvořením souboru řešených a neřešených příkladů chci ukázat využití diferenciálního počtu v konkrétních reálných situacích.

Jednotlivé historické a životopisné údaje byly čerpány z různých pramenů, jejich výčet je vždy uveden na konci každé kapitoly nebo odstavce.

1. ÚVOD DO INFINITEZIMÁLNÍHO POČTU

Svět, v němž žijeme, je v neustálém pohybu. Pohyb je všudypřítomný, bez něj by žádný život neexistoval. Některé druhy pohybů se zdají chaotické, ale většina z nich jsou pravidelné pohyby a mají svůj vnitřní řád. Tudíž by měly být přístupné matematickému studiu. Matematické nástroje jsou ale ve své podstatě statické, v žádném případě nezahrnují pohyb. Abychom mohli tento pohyb zkoumat, bylo nutné nalézt způsob, jak pomocí statických nástrojů zachytit proces změny. Lidstvu to trvalo téměř 2 000 let – výsledkem byl vývoj infinitezimálního počtu ve 2. pol. 17. století. Tento jedinečný objev znamenal jeden z největších mezníků ve vývoji lidstva a měl na náš život stejně revoluční dopad jako třeba vynález kola nebo knihtisku.

Infinitezimální počet zahrnuje diferenciální a integrální počty, které k sobě neoddělitelně patří. Ve své podstatě se skládá z řady metod, které popisují a zpracovávají struktury, v nichž je obsaženo nekonečno, a to struktury jak nekonečně velkých, tak i nekonečně malých veličin. Struktury pohybu a změny, popisované infinitezimálním počtem, odpovídají pohybu a změnám pozorovaným v okolním reálném prostředí. [2]

2. INFINITEZIMÁLNÍ POČET – ZAKLADATELÉ A OBJEV

Anglický matematik, fyzik a astronom Isaac Newton (1643 – 1727) a německý matematik, fyzik, filosof, právník a diplomat Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 – 1716) vytvořili, nezávisle na sobě, infinitezimální počet, který se stal základní matematickou metodou současnosti. Tyto metody našly řadu použití nejen v samotné matematice, ale i v přírodních vědách a technice. Newton, který k celé problematice přistupoval především jako fyzik, zformuloval základní problémové úlohy v letech 1665 – 1666. Newton trpěl chorobným strachem z možné kritiky a tak většinu svých prací nepublikoval. Oproti tomu Leibniz ke svým výsledkům sice dospěl později, až v letech 1673 – 1676, ale první výklad infinitezimálního počtu (s dodnes užívanou symbolikou) publikoval již v roce 1684. Mnozí britští matematici se ohradili a nařkli Leibnize z toho, že přebral Newtonovy myšlenky. Koncem 17. stol. vznikl nepříjemný spor o prvenství (o kterém podrobněji pojednávám níže). Ačkoliv Leibniz zcela jistě získal některé své myšlenky studiem Newtonovy práce, jeho přínos byl natolik významný, že v současné době považujeme za zakladatele oba zmíněné muže. [1,7,8,19]

2.1 ***Spor o prvenství objevu infinitezimálního počtu – G. W. Leibniz nebo I. Newton ?***



G. W. Leibniz a I. Newton jsou dnes považováni za dva zakladatele infinitezimálního počtu. Newton byl o 3 roky starší, a v oblasti matematiky vzdělanější. Právě při prvním vzájemném setkání v roce 1672 v Londýně si Leibniz uvědomil nedostatky ve svém matematickém vzdělání a začal systematicky pracovat na jejich odstranění. V krátkém čase tří let se mu to podařilo v takové míře, že výsledkem byl objev základních tvrzení nového kalkulu.

Newton formuloval svůj princip o 10 let dříve za úplně jiných okolností – na anglickém venkově, kam se uchýlil v době morové epidemie. Za pozornost stojí skutečnost, že Newtonovi bylo tehdy pouhých 22 let, a zároveň i to, že při jeho objevu sehrála velkou úlohu mechanika.

Spor o prvenství objevu infinitezimálního znepríjemnil Leibnizovi poslední roky života. Sedmdesátiletý hannoverský knihovník Gottfried Wilhelm Leibniz umírá opuštěný a ukřivděný. Zato Isaac Newton ho přežil o plných 11 let a byl pochován s poctami náležícími členům anglického královského rodu.

Další vývoj postupoval na kontinentu po Leibnizově linii. Kontinentální vývoj šel nezadržitelně vpřed. Kulminoval sice již v 18. století, ale diferenciální a integrální počet se postupně stal jedním z pevných základů nejen matematiky, ale celé vědy vůbec. [1,7,8,19]

2.2 ***Historický vývoj infinitezimálního počtu od počátku až po současnost***

Celá historie infinitezimálního počtu začíná již ve starověkém Řecku. Řecká matematika byla obecná; byla to zcela jiná matematika než třeba tehdejší matematika egyptská nebo babylónská. Egypťané a Babylóňané byli matematiky praxe. Oproti tomu Řekové nepočítali proto, aby něco změřili. Počítali proto, aby zároveň filosofovali. Již starověký řecký filosof Zénón několika dráždivými paradoxy ukázal, že pochopení nekonečna je klíčem k porozumění podstaty pohybu a změny. Řecký filosof Anaxagoras vyslovil tvrzení: „*V malém není nejmenšího, nýbrž je vždy ještě menší. Avšak také ve velkém je vždy ještě něco, co je větší.*“ To je formulace zcela odpovídající myšlenkám infinitezimálního počtu, který se začal rozvíjet o celých 2000 let později.

Řecký učenec Eudoxos byl sice žákem Platónovým, ale uchýloval se spíše k učení Anaxagora. Eudoxos překonal v matematice rozpor mezi konečným a nekonečným. Docela moderně zvládl pojem *libovolně malé veličiny*. Prohlašoval totiž: „*Odečteme-li od nějaké veličiny polovinu nebo více než polovinu a opakujeme-li tento postup dostatečně často, pak se vždy můžeme dostat k veličině, která je menší než nějaká daná veličina téhož druhu.*“ S Eudoxovými myšlenkami se ztotožnil i Euklides, neboť se dívá na kružnici jako na pravidelný mnohoúhelník o nekonečně velkém počtu stran. Důkazy užívající této myšlenky nazýváme **exhaustivní (vyčerpávací)**, z latinského exhaustire = vyčerpávat. Jako by se totiž daný obrazec, tím že se mu jinými obrazci stále více a více přibližujeme, postupně vyčerpával. Asi nejvýznamnější výsledky práce pro vývoj infinitezimálního počtu položil Archimédes ze Syrakus. Snažil se, co nejvíce, přiblížit skutečnosti a jak matematicky vystihnout ono nepřímé a nepravidelné, totiž křivky a křivé plochy. Tehdy se ovšem neobešel bez pomoci nekonečna, protože chceme-li křivé pokládat za přímé, musíme to křivé rozdělit na nekonečně malé dílky, které již můžeme považovat za přímé. Chceme-li přejít od nepravidelného k pravidelnému, musíme použít výše zmiňovanou exhaustivní metodu. Starověká matematika se stala nejen základem dalších prací, ale často i vzorem hodným následování.

Velká etapa rozvoje matematiky ve starověku, která vyvrcholila dílem Archiméda, skončila přibližně v 2. stol. př. n. l. Vývoj matematiky po řeckých myslitelích již nebyl tak jednoznačný. Římané ani později Arabové příliš nepochopili řeckou kulturu a většinu řeckých knih zničili. Naštěstí někteří arabští kalifové pochopili smysl řecké kultury. Dali posbírat pozůstalé řecké spisy a nechali je přeložit do arabštiny. Nová etapa rozvoje matematiky pokračuje v Číně a v Indii, a odtud se přes Arábii dostává do středověké Evropy.

Pokud jde o matematiku středověku, opakovalo se v ní mnoho z toho, co se dávno předtím řešilo ve starověku. V tomto období je matematika na relativně nízké úrovni. V Evropě existovaly čtyři hlavní oblasti, které se podílely na rozvoji matematiky: Itálie, Německo, Francie a Anglie. Tyto země se nejvíce snažily o vývoj v matematice, bohužel jejímu vývoji bránil vliv římskokatolické církve. Středověcí scholastikové se zabývali spojitostí, ale vyhýbali se kontroverznímu problému nekonečna. Jako příklad za všechny uvedu učeného františkána Tomáše z Bradwardinu, který napsal *Dílo o spojitosti*. Poprvé se hovoří o tom, že existuje něco jako časový průběh nějaké veličiny, což nasvědčuje příchodu nového myšlení v matematice, z něhož vyrůstá náš dnešní svět vědy a techniky.

Temno vývoje matematiky ve středověké Evropě bylo vystřídáno renesancí. Obzvláště matematika v 16. století zrekonstruovala ztracené poznatky Řecka, Číny, Indie a Arábie, ale také sama k těmto poznatkům netriviálně přispěla. V období renesance se v Itálii vytvářelo vhodné společenské prostředí pro rozvoj umění a vůbec všeobecné vzdělanosti, tedy i matematiky. Proto se italští učenci začali zabývat prvními kvadraturami (výpočty obsahů, objemů). Mezi nejvýznamnější patřili Galileo Galilei (1564 – 1642) a jeho žák Bonaventura Cavalieri (1598 – 1647). V této době byla Paříž považována za evropské centrum umění a vzdělanosti. Mezi nejvýznamnější představitele patřili toulouský soudce Pierre de Fermat (1601 – 1665), filosof René Descartes (1596 – 1650) a pařížský matematik Blaise Pascal (1623 – 1662). Na Fermata, Descarta a Pascala navázal Leibnizův učitel v Paříži, holandský vědec Christian Huygens (1629 – 1695). Je tu ještě anglická stopa odvoditelná od Archiméda. Začíná u Johna Wallise (1616 – 1703), který byl samouk a vychoval světu Isaaca Barrowa (1630 – 1677), Newtonova učitele a zároveň velkorysého člověka. Barrow totiž Newtonovi uvolnil místo profesora na univerzitě v Cambridgi.

Nyní přichází již zmiňovaný prioritní spor mezi Newtonem a Leibnizem (podrobnosti v kapitole 2.1). Vítězství Angličanů v tomto prioritním sporu (o kterém sami rozhodovali) nic nepřineslo. Další vývoj pokračoval rychlým tempem po „Leibnizově linii“. Měli na tom zásluhu zejména švýcarští matematici bratři Jacob (1654 – 1705) a Johann (1667 – 1748) Bernoulliiovi. Jejich přičiněním vznikla i první učebnice diferenciálního počtu, kterou napsal jejich žák Guillaume de l'Hospital (1601 – 1704).

V 18. století se do historie matematické analýzy zapsali Joseph Louis de Lagrange (1736 – 1813), Leonhard Euler (1707 – 1783) a Pierre Simon de Laplace (1789 – 1827).

V 19. století zavedl francouzský matematik Augustin Louis Cauchy (1789 – 1857) pojem limita funkce a společně s Bernardem Riemannem (1826 – 1866) podstatně přispěli k upřesnění základních pojmů matematické analýzy. Aritmetický základ jí dal německý matematik Karl Weierstrass (1815 – 1897), který svým „ $\epsilon - \delta$ “ jazykem výrazně ovlivnil další vývoj.

Ve druhé polovině 20. století Abraham Robinson (1918 – 1974) založil tzv. *nestandardní analýzu*.

Náznak historického vývoje by byl jistě neúplný, pokud bych neuvedl některá jména našich matematiků, kteří také určitou měrou, ať už větší či menší, přispěli k rozvoji matematické analýzy. Český matematik a astronom Joseph Stepling (1716 – 1778) vydal v roce 1751 knihu „*Exercitationes geometrico-analyticae*“, první původní práci z matematické analýzy v Čechách. Úroveň univerzitního vyučování matematiky pozvedl profesor pražské Karlovy univerzity Jan Tesánek (1728 – 1788). Nesmazatelnou stopu zanechal i matematik, filosof a logik Bernard Bolzano (1781 – 1848) působící v Čechách, profesor teologie na univerzitě v Praze v letech 1805 – 1820. Mnoho vysokoškolských učebnic napsal profesor Univerzity Karlovy v Praze František Josef Studnička (1836 – 1903). Ve 20. století dosáhl světového ohlasu prof. Eduard Čech (1893 – 1960), který také významně ovlivnil rozvoj české matematiky a její výuky. Matematickou analýzou se zabývali i další významní čeští matematici Matyáš Lerch (1860 – 1892) a Vojtěch Jarník (1897 – 1970), autor vysokoškolských učebnic. [1,3,4,5,7,10,19]

3. NEJVÝZNAMNĚJŠÍ MYSLITELÉ INFINITEZIMÁLNÍHO POČTU, JEJICH MYŠLENKY A DÍLA

3.1 Eudoxus z Knidu (asi 408 – 355 př. n. l.)



Zavedl tzv. *exhaustivní (vyčerpávající) metodu*. Tato metoda byla založena na principu umožňující aproximaci kruhu mnohoúhelníky. Využil přitom znalosti, že obsah plochy, která je vymezena danou křivkou (např. kružnice) je roven obsahu nějakého mnohoúhelníka a platí:

1. Je – li útvar A obsažen v jiném útvaru B , pak obsah $S(A)$ je menší nebo roven obsahu $S(B)$.
2. Je – li útvar C sjednocením nepřekrývajících se útvarů A a B , pak pro jejich obsahy platí $S(C) = S(A) + S(B)$.

Eudoxus se tedy snažil plochu neznámého obrazce získat pomocí mnohoúhelníků $P_0, P_1, \dots$, kterými daný obrazec „vyčerpával“. Podstatou jeho přístupu bylo to, že obsah tohoto mnohoúhelníka snadno vypočítali tím, že jej rozdělili na vzájemně se nepřekrývajících trojúhelníky. [4,8,10]

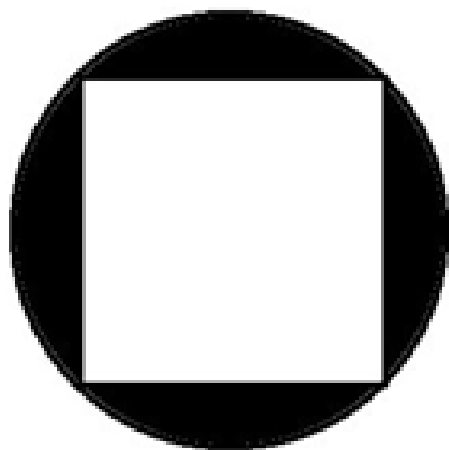
Motivační příklad: Eudoxova exhaustivní (vyčerpávající) metoda.

ZADANÍ: Určeme obsah $S(C)$ daného kruhu C , jestliže známe jeho poloměr.

ŘEŠENÍ: Necht' P_0 je jemu vepsaný čtverec,
 P_1 je jemu vepsaný pravidelný 8 – úhelník obsahující P_0 ,
 P_2 je jemu vepsaný 16 – úhelník obsahující $P_1 \dots$
 P_n je jemu vepsaný n – úhelník obsahující $P_{n-1}, \dots, P_1, P_0$, kde $n \in \mathbb{N}_0$.

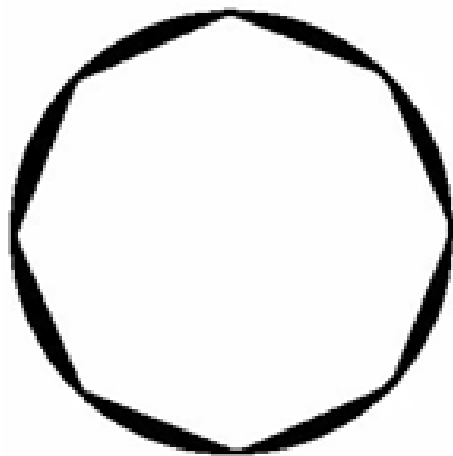
Nyní označme doplněk $A_n = S(C) - S(P_n)$ – na *obr. 1* a *obr. 2* - oblast vyplněná černě.

$$A_0 = S(C) - S(P_0)$$



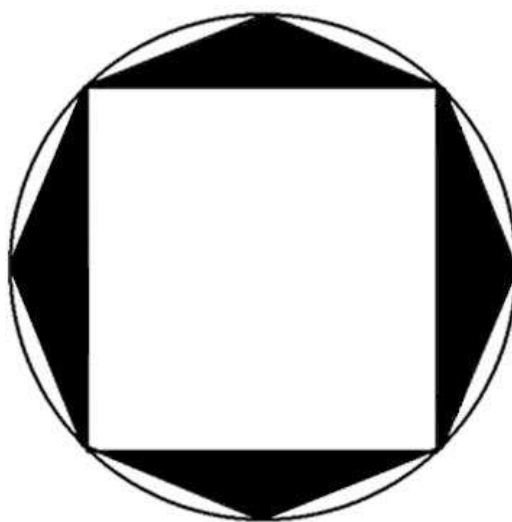
Obr. 1

$$A_1 = S(C) - S(P_1)$$



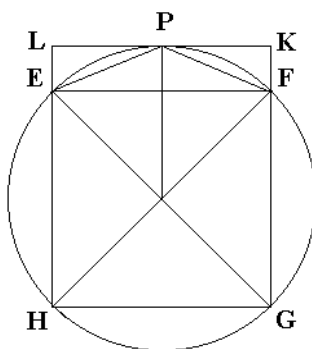
Obr. 2

Potom platí: $A_0 - A_1 = S(C) - S(P_0) - [S(C) - S(P_1)] = S(P_1) - S(P_0)$ (viz *obr. 3*).



Obr. 3

Dále Eudoxus ve svém výpočtu pokračoval konstrukcí pomocného obdélníku EFKL (viz obr. 4), takto:



Obr. 4

Nechť E, F jsou dva sousední vrcholy čtverce P_0 . Bod P je vrchol osmiúhelníka P_1 a nachází se mezi body L a K. Při tomto označení platí:

$$A_0 - A_1 = S(P_1) - S(P_0) = 4 \cdot S(EFP) = 2 \cdot S(EFKL) > \overline{2 \cdot S(EFP)} = \frac{1}{2} (S(C) - S(P_0)) = \frac{1}{2} A_0$$

$$A_0 - A_1 > \frac{1}{2} A_0,$$

$$\frac{1}{2} A_0 > A_1.$$

Podobně dostaneme nerovnost $\frac{1}{2} A_1 > A_2, \frac{1}{2} A_2 > A_3, \dots$.

Exhaustivní metoda je založena na nekonečném dělení veličiny a jejím základem je následující tvrzení:

Jestliže od dané veličiny odečteme její část větší než její polovina a od zbytku opět jeho část větší než jeho polovina a budeme tak činit dále, zbude nějaká veličina, jež bude menší než libovolná kladná veličina (tj., chyba“).

Z těchto nerovností dochází Eudoxus k závěru, že pro libovolné $r > 0$ existuje takové $n \in \mathbb{N}_0$, pro které platí:

$$A_n < r,$$

$$S(C) - S(P_n) < r.$$

ZÁVĚR: Když předepíšeme určitou, jakoukoliv malou kladnou „chybu“ r , pak existuje n -úhelník, který „vyplní“ daný kruh tak, že se doplněk do kruhu neliší o víc než je předepsaná chyba r .

Exhaustivní metodu můžeme považovat za starověkou limitní metodu, která již umožňuje poměrně přesné výpočty obsahů resp. objemů a je považována za prvopočátek infinitezimálních úvah. [1,8,10]

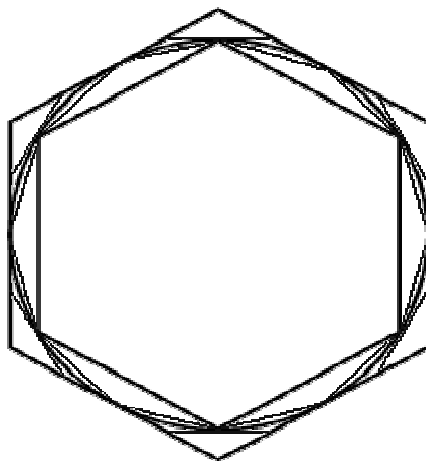
3.2 Archimédes ze Syrakus (okolo 287 – 212 př. n. l)



Je považován za největšího matematika starověku. Archimédes široce užíval svých znalostí v praxi. Na rozdíl od Eukleidovy snahy o soustavné uspořádání dosavadních poznatků, Archimédes vnesl do matematiky především své vlastní objevy, zejména při stanovení velikosti ploch křivočarých útvarů v rovině. Tyto jeho objevy jsou začátkem myšlenek, na kterých byl budován po dvou tisíc letech infinitezimální počet.

Podobně jako pojednání většiny antických autorů, ani Archimédovy práce neukazovaly analytické metody, jimiž se směřovalo k získání výsledků, nýbrž výsledky předkládaly v hotové podobě – synteticky.

Archimédes obohatil a vylepšil Eudoxovu exhaustivní metodu. Kromě vepsaných mnohoúhelníků zavedl i opsané mnohoúhelníky. Plocha kruhu je tedy „stlačována“ mezi plochy opsaných a vepsaných mnohoúhelníků (viz obr. 5).



Obr. 5

Archimédovým nejvýznamnějším přínosem v matematice jsou věty o obsahu rovinných útvarů a o objemu těles. Archimédovy práce zabývající se obsahy, objemy a délkami jsou: *Měření kruhu*, *Kvadratura paraboly*, *O kouli a válci*, *O spirálách*, *O konoidech a sféroidech a Metoda*.

Prvních pět rozvíjí exhaustivní metodu, kterou Archimédes aplikoval na širokou škálu problémů. Tyto matematické problémy jsou dnes typickými aplikacemi integrálního počtu. Šestá práce, neznámá do roku 1906, popisuje heuristickou infinitezimální metodu.

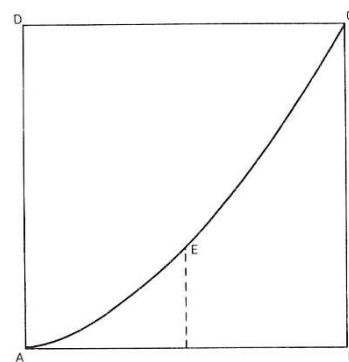
Parabola patřila mezi oblíbené Archimédovy křivky, proto o jeho práci *Kvadratura paraboly* pojednám trochu podrobněji.

3.2.1 „Kvadratura paraboly“

Archimédes jako první uskutečnil kvadraturu úseče paraboly neboli výpočet jejího obsahu obrazce. Využil při tom Eudoxovu exhaustivní metodu. Původně, jak sám říká, dospěl k výsledku „mechanicky“ metodou rovnoramenné páky a teprve potom jej dokázal geometrickými prostředky.

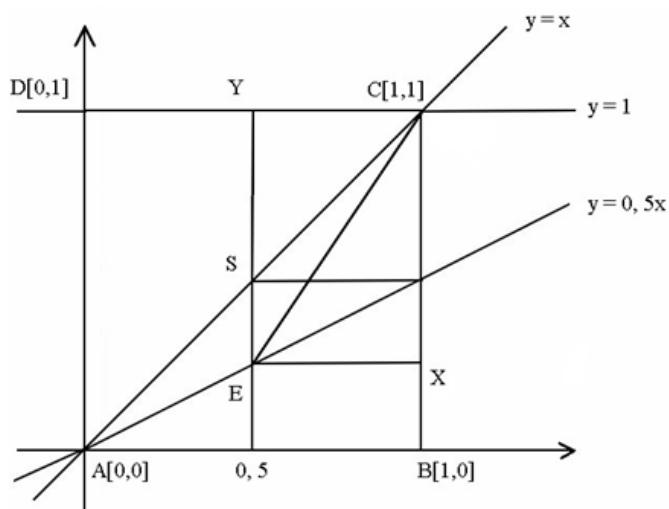
Motivační příklad: Archimédova metoda výpočtu kvadratury úseče paraboly.

ZADÁNÍ: Mějme čtverec ABCD se stranou $|AB| = 1$, který nám tento čtverec rozdělí část paraboly $y = x^2$. Vypočítejme obsah obrazce ABC (viz obr. 6). Součet obsahů obou obrazců je zřejmě roven 1, tedy $S(ABC) + S(ACD) = 1$. V polovině úsečky AB vztyčíme kolmici, která protne oblouk paraboly v bodě E (viz obr. 6).



Obr. 6

ŘEŠENÍ: Nejprve si čtverec ABCD vložíme do kartézské soustavy souřadnic s počátkem v bodě A. Rozdělíme ho funkcí $y = x$ na dva shodné trojúhelníky ACD, ABC. Obsah trojúhelníka ACD je zřejmě $\frac{1}{2}$. Obsah trojúhelníka AEC je $\frac{1}{8}$ (viz obr. 7).

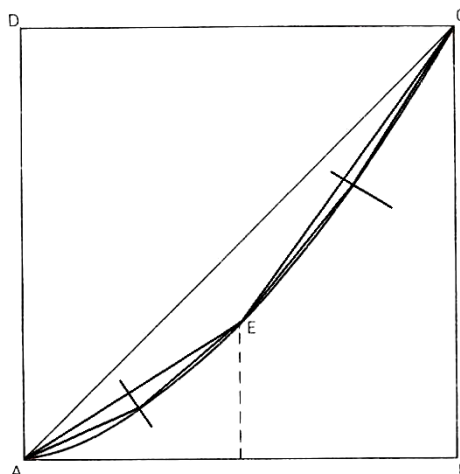


Obr. 7

Zřejmě:

$$\begin{aligned} S(AEC) &= S(AES) + S(ECS) = \\ &= S(AES) + (S(EXCY)/2 - S(SCY)) = \\ &= \frac{1}{16} + \left(\frac{3}{8} \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{8} \right) = \frac{1}{8}. \end{aligned}$$

Ze středů úseček AE, EC vztyčíme kolmice, které protnou oblouk paraboly v dalších dvou bodech (viz *obr. 8*). Dostáváme tak další dva trojúhelníky, obsah každého z nich bude $\left(\frac{1}{8}\right)^2$. Dalším obdobným postupem sestrojíme další čtyři trojúhelníky, obsah každého z nich bude $\left(\frac{1}{8}\right)^3$ atd.



Obr. 8

Tyto trojúhelníky postupně vyplní obrazec AECD nad obloukem paraboly. Pro jeho obsah dostaneme

$$\begin{aligned} S(\text{AECD}) &= \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + 2 \cdot \frac{1}{8^3} + 2^3 \cdot \frac{1}{8^4} + \dots = \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{8} + \frac{1}{4^2} \cdot \frac{1}{8} + \frac{1}{4^3} \cdot \frac{1}{8} + \dots = \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{8} \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \dots \right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{8} \cdot \frac{4}{3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

ZÁVĚR: Obsah obrazce ABC je tudíž $S(\text{ABC}) = 1 - S(\text{AECD}) = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$. [10]

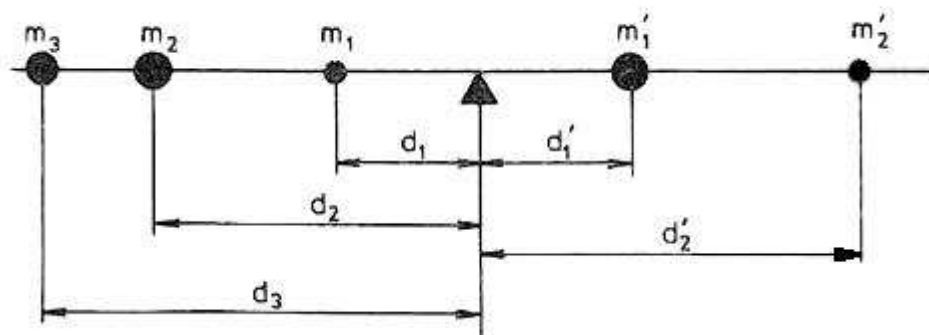
Již zde lze nalézt základy infinitezimálního počtu, ale na rozdíl od Newtona a Leibnize, Archimédes o těchto pojmech výslovně nemluví a nepoužívá ani odpovídající symboliku. Archimédes užíval své metody jen ve speciálních případech, kdežto v 17. století se tato metoda stala obecnou.

V další kapitole stručně uvádím, jak přicházel ke svým objevům, které ovlivnily další vývoj matematiky.

3.2.2 Archimédova mechanická metoda pro výpočet kvadratur

Již ve starověku bylo známo, že když na jednu stranu váhy umístíme ve vzdálenostech $d_1, d_2, \dots, d_p$ konečný systém bodů o hmotnosti $m_1, m_2, \dots, m_p$ a na druhou stranu ve vzdálenostech $d'_1, d'_2, \dots, d'_q$ hmotnosti $m'_1, m'_2, \dots, m'_q$ (viz obr. 9), tak soustava bude v rovnováze právě tehdy, když platí:

$$\sum_{i=1}^p m_i d_i = \sum_{j=1}^q m'_j d'_j,$$



Obr. 9

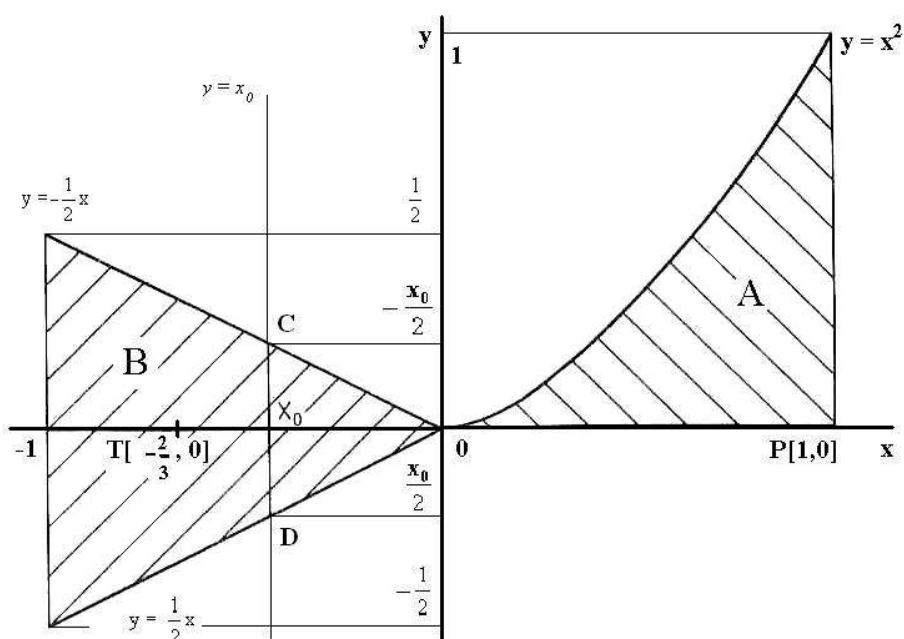
Tento známý fakt z fyziky použil Archimédes pro výpočet obsahů rovinných množin. Na jednu stranu páky umístil rovinný útvar, jehož obsah určoval, a na druhou stranu páky rovinný útvar, jehož obsah a těžiště znal. Ilustrujme to opět na kvadratuře paraboly.[10]

Motivační příklad: Archimédova mechanická metoda pro výpočet kvadratur

ZADÁNÍ: Máme vypočítat obsah množiny $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x^2\}$.

Na opačnou stranu osy x nanese trojúhelník $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; -1 \leq x \leq 0, +\frac{x}{2} \leq y \leq -\frac{x}{2}\}$,

který má těžiště v bodě $T = (-\frac{2}{3}, 0)$ (viz obr. 10).



Obr. 10

ŘEŠENÍ: Archimédes, jako vynikající mechanik a praktik, si představoval kartézskou soustavu souřadnic jako rovnoramennou páku. V libovolném bodě $x_0 \in \langle -1, 0 \rangle$ protíná přímka $y = x_0$ množinu B v úsečce CD délky x_0 . Je to stejné, jako kdyby byla na rovnoramenné páce do bodu x_0 dána hmotnost x_0 . Celkový přínos k momentu sil $\sum m_i d_i$ je tedy $x_0 \cdot x_0 = x_0^2 \cdot 1$, a to je zase to stejné, jako kdybychom do bodu $P = (1, 0)$ umístili hmotnost x_0^2 .

ZÁVĚR: Když umístíme těžiště množiny A do bodu P, tak se vyváží s množinou B (jejíž obsah známe) s těžištěm v bodě T. Pro obsah $S(A)$ pak platí:

$$S(A) \cdot 1 = S(B) \cdot \frac{2}{3},$$

$$S(A) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3},$$

$$S(A) = \frac{1}{3}.$$

Charakteristickým rysem Archimédovy matematické práce bylo chápání vzájemného vztahu různých úloh. To mu dovolilo řešit jedním a týmž formálním postupem úlohy různého obsahu. Archimédes obrátil svou pozornost, nikoliv na samotné veličiny, ale spíše k proměnným veličinám. Sledoval jejich změnu a zřetelně tak zaváděl do geometrie pohyb. Tímto zkoumáním veličin pozvedl na vyšší stupeň abstrakce a mohl odhlédnout od konkrétních zvláštností zkoumaných veličin. Dnes bychom řekli, že dokázal pochopit vnitřní funkcionální vztahy mezi veličinami.

Ve svých pojednáních podstatně rozvinul exhaustivní metodu na určení obsahů a objemů. Tím se nepřímým způsobem zabýval zkoumáním dolního a horního součtu omezujícího danou veličinu. Dále objevil metody na stanovení tečen ke křivkám a na určení extrémů funkcí. Tedy Archimédes rozpracoval pojmy, které po dvou tisíciletích vedly k základům diferenciálního a integrálního počtu.

Nejzřetelnější zvláštností Archimédova matematického působení je jeho vztah k mechanice, sblížení teorie s praxí. I zde uměl Archimédes překonat aristokratické a idealistické předsudky o „nizkosti“ praktických znalostí. Postavil matematickou metodu do služby přírodním vědám a technice a vytvořil ve svých pracích významný vzor toho „přesného a systematického zkoumání“. Archimédovy práce měly široký vliv na celý další rozvoj matematiky. Metody a ideje obsažené v těchto pracích, i když nebyly vyjádřeny jasnými pojmy a symbolikou, se uchovaly prostřednictvím arabských překladů do novověku a staly se východiskem k vytvoření matematické analýzy. [1,4,5,8,10]

3.3 Johannes Kepler (1571 – 1630)



Německý matematik, astrolog, známý především jako astronom, vydal v roce 1615 pojednání *Nova stereometria doliorum vinariorum* (*Nová stereometrie vinných sudů*), kde zabýval problémem určení objemů těchto nádob. Kepler postupoval metodou *rozdělení tělesa na nekonečně mnoho nekonečně malých „kusů“*, jejichž objem lze výpočtem jednoduše určit. Použil tedy ten druh úvahy, které se říká **infinitesimální úvaha**. Postup si osvětlíme na Keplerově způsobu určování obsahu kruhu, ale ještě předtím malá zajímavost ze života, která ho přivedla k základním myšlenkám infinitesimálního počtu.

Zajímavost z Keplerova života

V Linci, kde Kepler v roce 1612 bydlel, byla toho roku velká úroda vína. Kepler si tehdy pro sebe vydražil několik sudů tohoto božského moku a byl velmi překvapen, když prodavač strčil do otvoru v zátce proutek a ze vzdálenosti otvoru od protější strany vypočítal objem sudu. Začal hloubat, jak je možné, že jedním měřením na dálku lze určit objem. Tento problém sudu vedl Keplera k tomu, že vypočítává objem velkého množství sudů různých tvarů, tedy řečeno matematicky - objem různých rotačních těles. Už základní Keplerova úloha o ideálním sudu, který by měl při minimální spotřebě materiálu maximální obsah, je svou podstatou úlohou nového typu.

Motivační příklad: Keplerova metoda výpočtu obsahu kruhu

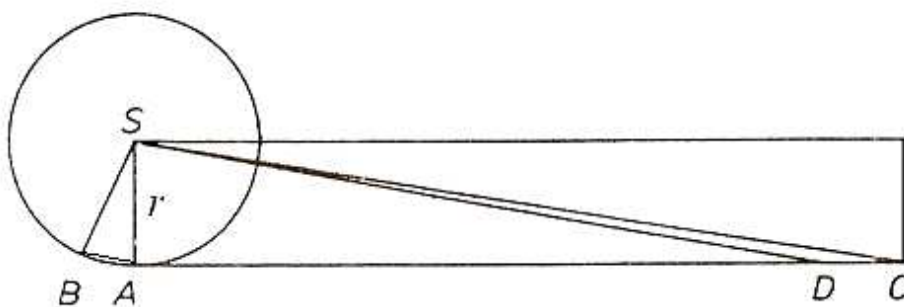
ZADÁNÍ: Vypočítejme obsah kruhu $S(K)$ s poloměrem r .

ŘEŠENÍ: Kružnice, která ohraničuje kruh K , obsahuje tolik částí, kolik má bodů - tedy nekonečně mnoho. Každou z (nekonečně malých) částí kružnice považujeme za základnu BA rovnoramenného trojúhelníka s ramenem SA , které se rovná poloměru r kruhu a jehož vrchol ležící proti základně je umístěn ve středu kruhu S . Obsah kruhu $S(K)$ je pak roven součtu obsahů všech takových rovnoramenných trojúhelníků SBA .

Na *obr. 11* je kružnice se středem S rozvinuta do úsečky AC tak, že poloměr SA je k ní kolmý. Nekonečně malému BA na kružnici odpovídá dílek DC na úsečce AC . Trojúhelníky BAS , DCS mají společnou výšku AS a základnu stejné délky, tedy mají stejný obsah. Tuto proceduru lze zopakovat pro každou nekonečně malou část kružnice. Po sečtení nekonečného počtu nekonečně malých trojúhelníků Kepler správně usoudil, že obsah trojúhelníku ACS je roven obsahu kruhu a dostal tím známý vzorec:

$$S(K) = S(ACS) = \frac{1}{2}(|SA| \cdot |AC|),$$

podle kterého je obsah kruhu roven polovině součinu poloměru a obvodu kruhu $o(K)$, tj. $S(K) = \frac{1}{2}r \cdot o(K) = \frac{1}{2}r \cdot 2\pi r = \pi r^2$



Obr. 11

ZÁVĚR: Již tento jednoduchý příklad ukazuje, že v pozadí úvahy stojí infinitezimální technika „součtu nekonečného počtu nekonečně malých veličin“. Kepler ji nijak zvlášť nezdůrazňoval, sloužila mu však k určování objemů různých těles a ve zmíněné práci vyústila v praktickou metodu, jíž se objem sudu určí pomocí hůlky, kterou se zjistí potřebné délky. [1,8]

3.4 Pierre de Fermat (1601 – 1665)



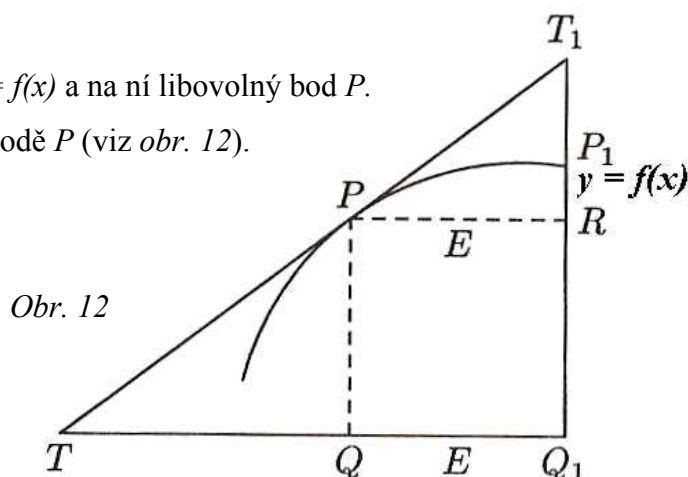
Všestranně nadaný člověk a vynikající soudce, který celý svůj život strávil ve francouzském městě Toulouse. Studium matematiky se věnoval „jen“ ve svém volném čase. Většina jeho matematických objevů je známa pouze z jeho korespondence se svými současníky. Položil spolu s Descartesem základy analytické geometrie v rovině, která byla klíčem k dalšímu rozvoji infinitezimálního počtu. V tomto období se diferenciální počet vyvíjel nezávisle na integrálním počtu. Fermat pěstoval obě zmiňované disciplíny.

Hlavním tématem mé diplomové práce je diferenciálnímu počtu, zmíním se proto o Fermatově metodě hledání tečen. Tato metoda je popsána v jeho rukopise z roku 1637 *Methodus ad Disquirendam et Maximam et Minimam* (Metoda nalezení maxim a minim).

Motivační příklad: Fermatova metoda hledání tečen

ZADÁNÍ: Necht' je dána křivka $y = f(x)$ a na ní libovolný bod P .

Hledáme tečnu PT k této křivce v bodě P (viz obr. 12).



Obr. 12

ŘEŠENÍ: Fermatův postup je založen na nalezení délky úsečky $|TQ|$, tj. bodu T . Spojením bodů T a P lze získat hledanou tečnu. Fermat určil požadovanou délku úsečky $|TQ|$ takto:

Necht' úsečka QQ_1 délky E je částí přímky TQ . Trojúhelník TQP je podobný trojúhelníku PRT_1 , tedy

$$\frac{|TQ|}{|PQ|} = \frac{E}{|T_1R|}.$$

Podle Fermata je úsečka T_1R „téměř stejně dlouhá“ jako úsečka $P_I R$ (jsou-li body Q, Q_I „dostatečně blízko“), tzn. $Q_1 \longrightarrow Q, P_1 \longrightarrow T_1$ a proto:

$$\frac{|TQ|}{|PQ|} = \frac{E}{|P_1Q_1| - |PQ|}.$$

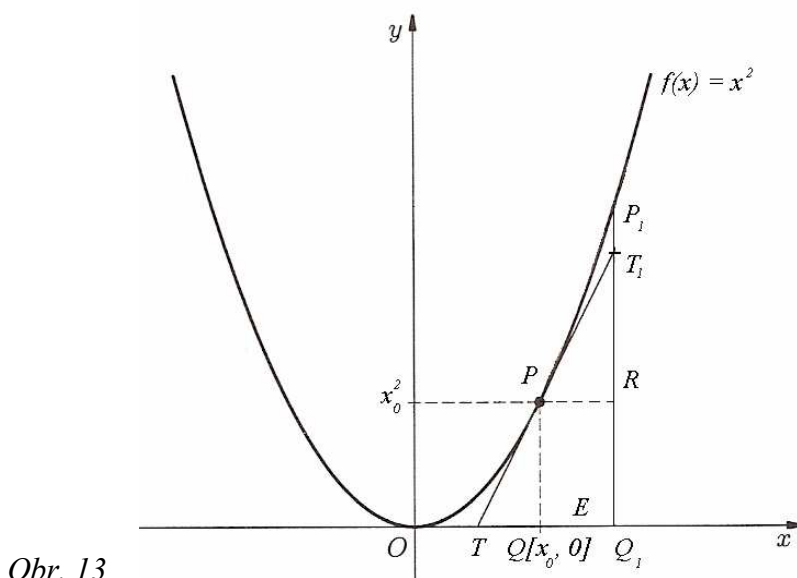
Použijeme – li dnešního zápisu ($|PQ| = f(x)$), dostaneme

$$|TQ| = \frac{E \cdot f(x)}{f(x+E) - f(x)}.$$

ZÁVĚR: Dále Fermat (po dosazení konkrétních hodnot) vydělil čítec i jmenovatel číslem E a nakonec položil $E=0$, tak obdržel délku $|TO|$ a tím hledanou tečnu určenou body P a T.

Konkrétní příklad: Užití Fermatovy metody na hledání tečny k $f(x) = x^2$.

ZADÁNÍ: Hledáme tečnu k funkci $f(x) = x^2$ v libovolném bodě $P[x_0, x_0^2]$ (viz obr. 13).



ŘEŠENÍ: Podle výše odvozeného vztahu je

$$|TQ| = \frac{E.x_0^2}{(x_0 + E)^2 - x_0^2} = \frac{E.x_0^2}{x_0^2 + 2E.x_0 + E^2 - x_0^2}.$$

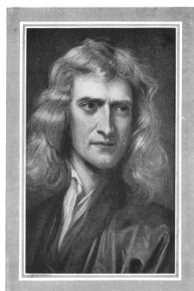
Vydělíme – li celý zlomek číslem E , tj. $|TQ| = \frac{x_0^2}{2x_0 + E}$. Nakonec položíme $E = 0$, pak

dostáváme výsledek $|TQ| = \frac{x_0}{2}$.

ZÁVĚR: Na základě tohoto výsledku známe průsečík T hledané tečny s osou x a tím i samotnou tečnu, která je určena dvěma body T a P.

Fermatova metoda tečen inspirovala mnoho dalších matematiků. Podle slov d'Alemberta je Fermat dokonce prvním, kdo použil diferenciály k nalezení tečny. Newton v jednom dopise napsal, že jeho myšlenky o diferenciálním počtu byly motivovány právě studiem Fermatovy metody tečen. [1,8,10,14]

3.5 Isaac Newton (1643 – 1727)

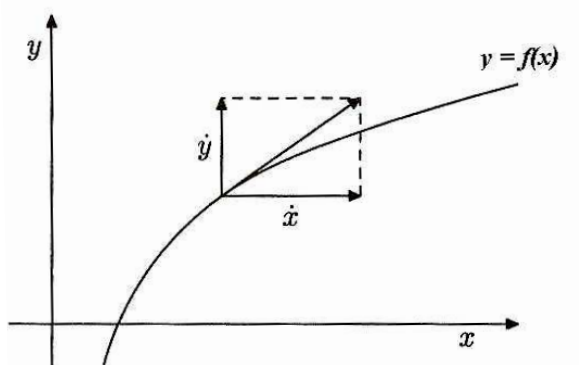


Sir Isaac Newton

Newton vytvořil tzv. teorii fluxí a fluent v letech 1665 – 1666, v době svého pobytu na venkově, kdy uprchl z Cambridge před morem. Využitím Descartesových znalostí o analytické geometrii si Newton představoval rovinnou křivku jako množinu průsečíků vždy dvou přímek rovnoběžných se souřadnicovými osami x , y , pohybujících se rychlostmi x' a y' (x' je okamžitá rychlost pohybu přímky rovnoběžné s osou x a y' je okamžitá rychlost pohybu přímky rovnoběžné s osou y).

Okamžitá rychlost pohybujícího se průsečíku, tj. vektor rychlosti pohybu tohoto bodu, vznikne složením obou složek pohybu x' , y' podle rovnoběžníkového pravidla.

Podíl $\frac{y'}{x'}$ je směrnici tečny ke křivce opsané průsečíkem zmíněných pohybujících se přímek (viz obr. 14).



Obr. 14

Z našeho pohledu jsou fluenty funkce, které popisují závislost dráhy pohybu na čase. Fluxe x' , y' rychlosti (derivacemi podle času), jakými rostou fluenty a momenty fluxí ($x'o$, $y'o$) jsou nekonečně malé přírůstky veličin. Čas je u Newtona jen pomocným pojmem a slouží spíše jako příklad nezávisle proměnné veličiny. Nekonečně malé přírůstky takové veličiny označuje písmenem „o“.

Ve dnešní symbolice:

Pro fluxe platí:

$$x' = \frac{dx}{dt}, \quad y' = \frac{dy}{dt},$$

pro jejich poměr platí:

$$\frac{y'}{x'} = \frac{dy}{dx}.$$

Newton formuloval základní úlohy své matematické analýzy takto:

1. Ze znalosti dráhy pohybu hmotného bodu v každém okamžiku lze nalézt rychlost tohoto pohybu v určitém čase – *výpočet derivace*.
2. Ze znalosti rychlosti hmotného bodu v každém okamžiku určit dráhu, kterou tento bod urazí za určitý čas – *výpočet integrálu*.

Motivační příklad: Newtonova metoda fluent a fluxii.

ZADÁNÍ: Vypočítejme pro fluentu $y = x^2$ její fluxi.

ŘEŠENÍ: Newton si vzal tzv. *nekonečně malou veličinu* o . Za čas, za který se x změní na $x + o$, se veličina x^2 změní na $(x + o)^2$, tedy

$$y + oy' = (x + o)^2 = x^2 + 2xo + o^2.$$

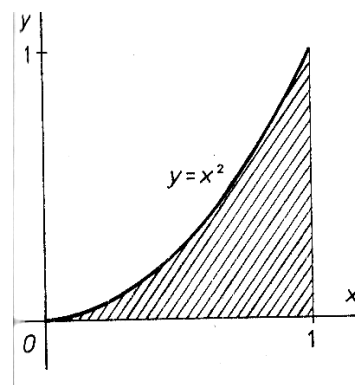
Protože $y = x^2$, dostáváme

$$oy' = 2xo + o^2,$$

$$y' = 2x + o.$$

Veličina o je však nekonečně malá a proto ji můžeme zanedbat, tudíž pro fluentu $y = x^2$ dostaneme fluxi (rychlost) $y' = 2x$.

Poznámka. Již zmiňovaný Archimédes věděl, že parabola $y = x^2$ vytvoří spolu s úsečkami $y = 0$, $x = 1$ útvar o obsahu $1/3$ (viz obr. 15).

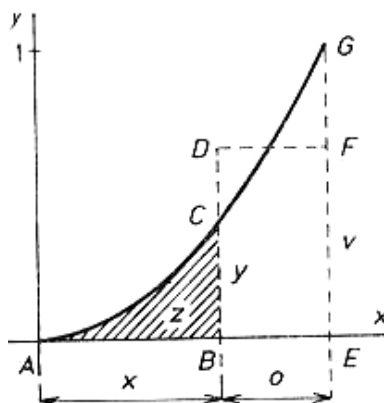


Obr. 15

Konkrétní příklad:

ZADÁNÍ: Necht' je dán obrazec o obsahu $S(z) = \frac{x^3}{3}$ (viz obr. 16), určíme fluentu, které odpovídá?

ŘEŠENÍ: Změní – li se x na $x + o$, tak se změní $S(z)$ na $S(z + ov)$ (jelikož $y = BC$, $v = EF$, přičemž obsah obrazce $S(BEGC)$ je roven obsahu obdélníka $S(BEFD)$).



Obr. 16

$$\text{Proto: } S(z + ov) = \frac{1}{3}(x + o)^3 = \frac{1}{3}x^3 + \frac{3x^2o}{3} + \frac{3xo^2}{3} + \frac{o^3}{3} = \frac{1}{3}x^3 + x^2o + xo^2 + \frac{o^3}{3}.$$

ZÁVĚR: Protože o je nekonečně malé, tedy $S(z) = \frac{x^3}{3}$ je obsah odpovídající fluentě $y = x^2$.

[1,6,7,8]

3.6 Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 – 1716)

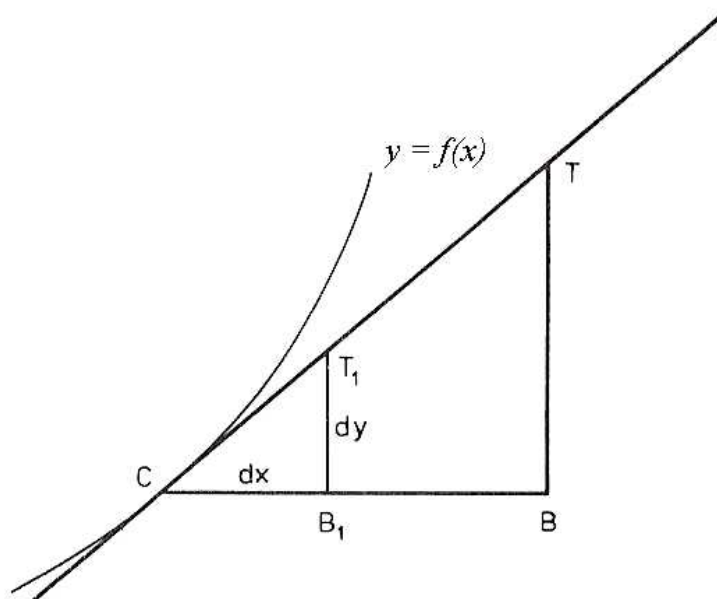


I Leibniz měl své nekonečně malé veličiny – diferenciály, které na rozdíl od Newtonových ležatých „óček“ označoval znakem dx (*diferenciál*). Leibniz studoval systematicky pomocí diferenciálů tečny ke křivkám. V Paříži se Leibniz seznámil s Pascalovou idejí tzv. *charakteristického trojúhelníka*, kterou zobecnil pro libovolné křivky.

Motivační příklad: Leibnizova metoda hledání tečen

ZADÁNÍ: Odvodme směrnici tečny k ke křivce $y = f(x)$ pomocí charakteristického trojúhelníka.

ŘEŠENÍ: Tečna je určena trojúhelníkem BTC (viz obr. 17), ale zároveň miniaturním trojúhelníkem B_1T_1C s nekonečně malými stranami $dx = |B_1C|$, $dy = |B_1T_1|$.



Obr. 17

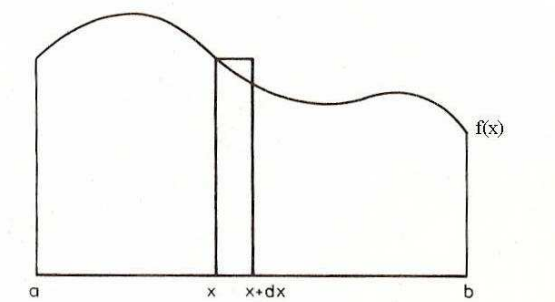
ZÁVĚR: Z podobnosti těchto trojúhelníků vyplývá, že $\frac{|BT|}{|BC|} = \frac{dy}{dx} = k$.

Lebnizovo označení (např. derivace $f'(x_0)$ funkce $y = f(x)$ jako podílu dy/dx) se ukázalo být tak účelné, že přetrvalo věky.

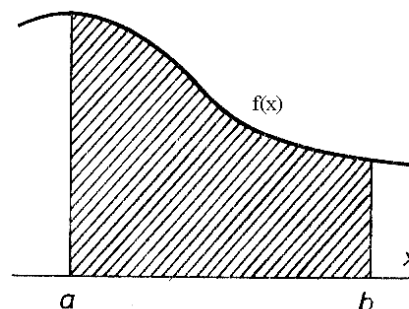
Alespoň náznakem uvedu základní úlohu integrálního počtu, na kvadraturu, to znamená na výpočet obsahu množiny určené grafem funkce f a intervalem $\langle a, b \rangle$.

Leibniz postupoval takto: Vzal nekonečně malý úsek na ose x délky dx . Potom obsah nekonečně úzkého obdélníku se šířkou dx a délkou $f(x)$ je $f(x) dx$ (viz obr. 19). Zbývá sčítat nekonečně mnoho takových malých veličin (viz obr. 20). Tento součet se nazývá integrál. Od Leibnize pochází i jeho označení pro integrování $\int$. Tento symbol vznikl protažením písmene S (z latinského *Summa* = součet).

Tedy obsah dané množiny je $\int_a^b f(x)dx$.



Obr. 19

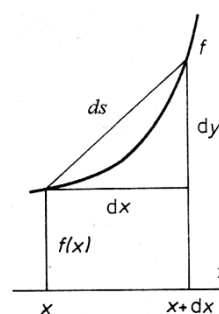


Obr. 20

Lebniz uměl tímto způsobem vypočítat i jiné míry geometrických objektů, například délku křivky:

Vzal si nekonečně malý úsek křivky ds (grafu funkce $f(x)$) na obr. 21) a byl schopen jeho délku vypočítat pomocí Pythagorovy věty:

$$\begin{aligned} ds &= \sqrt{dx^2 + dy^2}, \\ s &= \int \sqrt{dx^2 + dy^2}, \\ s &= \int \sqrt{\frac{dx^2 + dy^2}{dx^2}} dx, \\ s &= \int \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx. \end{aligned}$$



Obr. 21

Uvědomil si, že délka celé křivky bude součtem nekonečně mnoha takových malých veličin, tedy integrál $\int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx$. [7,8,10]

4. ELEMENTÁRNÍ POJMY DIFERENCIÁLNÍHO POČTU

Diferenciální počet je součástí jedné ze základních matematických disciplín – matematické analýzy.

Metody matematické analýzy umožňují přesný popis a řešení řady složitých jevů v přírodě, které by nebylo možné popsat metodami elementární matematiky. Znalosti diferenciálního počtu jsou nezbytné u mnoha vědních odvětví. Neobejde se bez nich žádný inženýr v oboru strojírenství, stavebnictví, elektrotechniky, ekonomie aj.

4.1 Základní pojmy zaváděné na SŠ

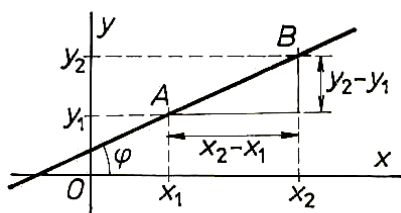
4.1.1 Směrnice přímky

Budeme hledat vhodnou veličinu, která nám umožní popsat, jak rychle se mění jedna veličina při změnách veličiny druhé. U přímky je takovou vhodnou veličinou *směrnice* (zpravidla označujeme symbolem k):

Je-li směrnice kladná, přímka roste, je-li záporná tak klesá. Je-li směrnice blízká k nule, přímka roste pozvolna, je-li mnohem větší než jedna, přímka rychle roste, je-li mnohem menší než minus jedna, přímka rychle klesá.

Motivační příklad: Určení směrnice a rovnice přímky dané dvěma body.

ZADÁNÍ: Mějme dány dva různé body $A[x_1, y_1]$ a $B[x_2, y_2]$, určíme rovnici přímky, na níž tyto body leží (viz obr. 22).



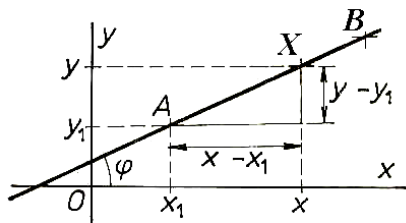
Obr. 22

ŘEŠENÍ: Předpokládejme, že přímka svírá s kladnou poloosou x úhel $\varphi = \pi/2$, takže má smysl hovořit o *směrnici přímky*, tedy o čísle k , pro které platí, že

$$k = \operatorname{tg} \varphi = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Známe – li směrnici k , můžeme vyslovit podmínku pro to, aby bod $X[x, y]$ ležel na dané přímce AB (viz *obr. 23*):

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = k, \text{ kde } x \neq x_1 \text{ a dále platí: } y - y_1 = k \cdot (x - x_1).$$



Obr. 23

ZÁVĚR: Obecný zápis hledané přímky je $y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x - x_1)$.

Konkrétní příklad:

ZADÁNÍ: Napište rovnici přímky, která prochází body $A[1, y_1]$, $B[2, y_2]$ paraboly $y = x^2$.

ŘEŠENÍ:

Dle *obr. 24* zřejmě platí:

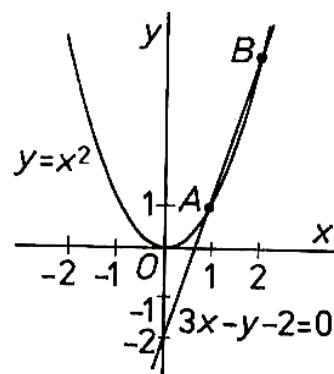
$$y_1 = x_1^2 = 1^2 = 1,$$

$$y_2 = x_2^2 = 2^2 = 4.$$

Pro rovnici hledané přímky platí:

$$y - y_1 = k \cdot (x - x_1),$$

$$y - 1 = k(x - 1).$$



Obr. 24

A pro směrnici k platí:

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{4 - 1}{2 - 1} = \frac{3}{1} = 3,$$

$$y - 1 = 3 \cdot (x - 1),$$

$$y - 1 = 3x - 3.$$

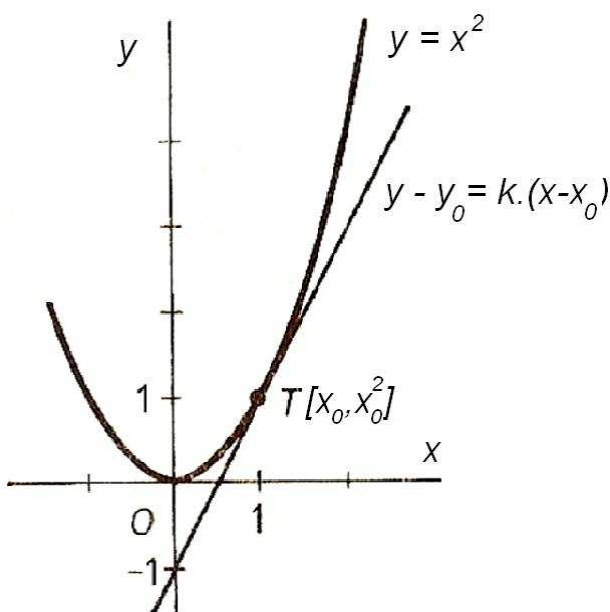
ZÁVĚR: Hledaná rovnice přímky je $3x - y - 2 = 0$. [6,7]

4.1.2 Směrnice tečny

Motivační příklad: Odvození směrnice tečny k parabole.

ZADÁNÍ: Mějme danu parabolu $y = x^2$ a k ní tečnu v dotykovém bodě $T[x_0, x_0^2]$ (viz obr. 25). Nalezněme směrnici tečny.

ŘEŠENÍ: Obecně pro tečnu platí následující předpis: $y - y_0 = k \cdot (x - x_0)$. Bod $T[x_0, x_0^2]$ je jediným společným bodem paraboly a tečny a pro tento jejich průsečík platí následující dvě rovnice:

$$\begin{array}{r} y - y_0 = k(x - x_0) \\ y = x^2 \\ \hline x^2 - x_0^2 = k(x - x_0) \\ x^2 - k(x - x_0) - x_0^2 = 0 \\ x_{1,2} = \frac{k \pm \sqrt{k^2 - 4 \cdot (kx_0 - x_0^2)}}{2} \end{array}$$


Obr. 25

Předpokládáme pouze jeden společný bod, proto pro diskriminant platí:

$$\begin{aligned} D = 0, \text{ tedy } \quad & k^2 - 4 \cdot (kx_0 - x_0^2) = 0, \\ & k^2 - 4kx_0 + 4x_0^2 = 0, \\ & k_{1,2} = \frac{4x_0 \pm \sqrt{16x_0^2 - 16x_0^2}}{2}, \\ & k = 2 \cdot x_0. \end{aligned}$$

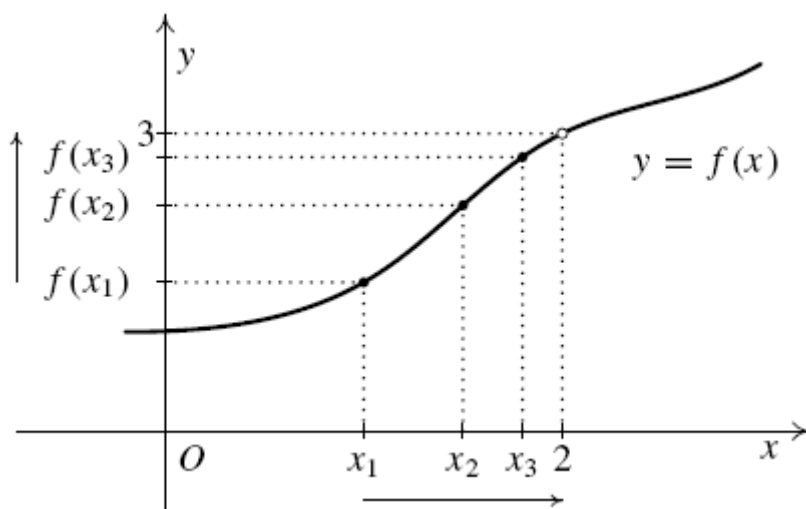
ZÁVĚR: Hledaná směrnice tečny k dané parabole $y = x^2$ v bodě $T[x_0, x_0^2]$ je $2x_0$.

4.2 Limita

Limita funkce patří k základním pojmům matematické analýzy. Vystihuje lokální chování funkce v okolí jistého bodu, v němž ani její funkční hodnota nemusí být definována. Pochopení a použití tohoto termínu nám umožní přesněji popsat vlastnosti i formálně jednoduchých funkcí v okolí bodů, kde funkční předpis nedefinuje funkční hodnotu, nebo ji stanoví odlišně od ostatních bodů, nebo kde dochází v okolí takového bodu k obtížně kontrolovatelným rychlým změnám funkčních hodnot. [16]

4.2.1 Motivace limity

Na *obr. 26* je znázorněn graf funkce f , která není definována v bodě $x = 2$. Vezměme hodnoty $x_1 = 1$, $x_2 = 1,5$, $x_3 = 1,8, \dots$ nezávisle proměnné, které se budou čím dál více přibližovat k hodnotě 2 (z levé strany), a podívejme se, jak se chovají funkční hodnoty v těchto bodech.



Obr. 26

Je vidět, že se tyto hodnoty, tj. $f(x_1)$, $f(x_2)$, $f(x_3)$, $\dots$, čím dál více „přibližují“ k číslu $y = 3$. Při přibližování zprava k $x = 2$ je situace analogická. [17]

Intuice nám napovídá, že funkce má v bodě x_0 limitu L , jestliže při $x \rightarrow x_0$ pro posloupnost hodnot této funkce platí $f(x) \rightarrow L$. Proto pojem limity funkce v bodě zavedeme nejprve pomocí definice, která zpřesňuje toto intuitivní pojetí s pomocí pojmu limity posloupnosti (*Heine*). [16]

4.2.2 Definice limity – Heineho

Funkce $f(x)$ má v bodě x_0 svého definičního oboru $D(f)$ limitu $L \in R$, jestliže pro každou posloupnost bodů $\{x_n\} \subset D(f)$, $x_n \neq x_0$, $\{x_n\} \rightarrow x_0$ a posloupnost funkčních hodnot $\{f(x_n)\}$ konverguje k číslu L .

Používaný symbolický způsob zápisu je

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L, \text{ nebo } f(x) \rightarrow L \text{ pro } x \rightarrow x_0. \quad (\text{Heine})$$

Při vyšetřování limit funkcí je vzhledem k obtížné kontrole splnění předpokladů této definice (... pro každou posloupnost ...) často vhodnější jiná, ekvivalentní formulace definice limity funkce (Cauchy). [16]

4.2.3 Definice limity - Cauchyova

Cauchyova definice limity využívá pojem tzv. **okolí bodu**.

Okolím bodu $x_0 \in R$ nazýváme libovolný otevřený interval $(x_0 - r, x_0 + r)$, kde r je kladné reálné číslo (*poloměr okolí*), který značíme $O(x_0)$. Ryzím (též *prstencovým*) okolím bodu x_0 rozumíme množinu $O(x_0) \setminus \{x_0\}$.

Nechť funkce $f(x)$ je definovaná v určitém okolí bodu x_0 , s výjimkou bodu x_0 . Řekneme, že funkce f má v bodě $x_0 \in R$ limitu $L \in R$, jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že pro všechna $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, $x \neq x_0$, platí $f(x) \in (L - \varepsilon, L + \varepsilon)$.

Používaný symbolický způsob zápisu je

$$|f(x) - L| < \varepsilon, \text{ jakmile } |x - x_0| < \delta, \quad x \neq x_0 \quad (\text{bod } x_0 \text{ leží v tzv. } \delta\text{-okolí bodu } x_0),$$

$$\text{a píšeme } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L. \quad (\text{Cauchy})$$

Objasněme si smysl předchozí definice:

Zvolíme libovolný (libovolně úzký) pás o šířce 2ε kolem přímky $y = L$. K němu musíme umět najít interval $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ o šířce 2δ kolem bodu x_0 tak, aby graf funkce f na množině $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus x_0$ ležel celý ve zvoleném pásu. [16,17]

Poznámka ("experimentální stanovení limity"). Chceme-li odhadnout, zda jistá limita existuje či nikoliv, lze použít následující postup: zvolíme nějakou posloupnost čísel, která se blíží k číslu x_0 a postupně počítáme funkční hodnoty funkce f v těchto číslech. Měla by vycházet posloupnost čísel, které se přibližují k jistému číslu L . Pokud toto skutečně vychází, je pravděpodobné, že toto číslo L je limitou funkce f v bodě x_0 ve smyslu výše vedené definice. Toto přibližování může být porušeno v bodech, které jsou již "značně blízko" bodu x_0 , což bývá způsobeno omezenou přesností kalkulátorů.

Následující vlastnost nám dává informaci o vztahu limity v bodě a funkční hodnoty v tomto bodě. Ty mohou být zcela nezávislé, mohou existovat obě současně a být různé, nebo kterákoliv z nich existovat nemusí. Pokud však obě existují a jsou stejné, je *funkce spojitá*. [15]

4.3 Spojitost

4.3.1 Motivace spojitosti

Základním pojmem matematické analýzy je pojem *spojitost funkce*. Spojitost funkce upřesňuje intuitivní představu funkce, jejichž graf se „nepřetrhává“. To jest takovou křivkou, která je nepřerušovaná (spojitá). Jde o její "spravedlivé chování" v okolí daného bodu. Spravedlivost pomůže zjistit přibližnou hodnotu funkce v daném bodě pomocí hodnot funkce v blízkých bodech. [15]

4.3.2 Definice spojitosti

Řekneme, že funkce f je spojitá v bodě x_0 , pokud ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že pro $\forall x \in D(f)$ platí

$$|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

(K. Weierstrass 1861)

Dále řekneme, že funkce f je spojitá na otevřeném intervalu $(a, b) \in D(f)$, pokud je spojitá v každém bodě tohoto intervalu.

4.3.3 Definice spojitosti pomocí limity

Řekneme, že funkce $f: R \rightarrow R$ je *spojitá* v bodě $x_0 \in D(f)$, jestliže platí

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

4.4 Derivace

Derivace funkce patří spolu s předchozími pojmy limita a spojitost funkce k základním pojmům diferenciálního počtu. Historickou motivací k zavedení tohoto pojmu byl problém určení směrnice tečny ke grafu funkce v geometrii, popis zákonů pohybu v mechanice (okamžitá rychlost, zrychlení), vyšetřování průběhu funkce a jejích vlastností (monotónnost, konvexnost, konkávnost, extrém). V definici derivace funkce se použije opět limitního přechodu - limity pro podíl přírůstku funkce a přírůstku jejího argumentu.

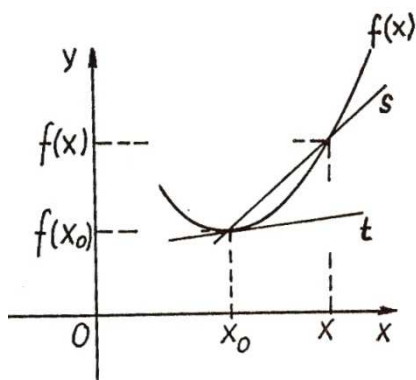
4.4.1 Geometrická motivace derivace

Jednou z nejstarších geometrických úloh, které vedly k formulování pojmu derivace funkce je úloha o nalezení tečny ke grafu spojitě funkce v daném bodě (resp. nalezení rovnice, směrnice této tečny). Jestliže body $[x_0, f(x_0)]$, $[x, f(x)]$ na grafu funkce $f(x)$ vedeme sečnu, pak její směrnice je podílem přírůstku (*diference*) funkční hodnoty k přírůstku

(diferenci) argumentu (viz obr. 27): $\operatorname{tg}(\varphi) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.

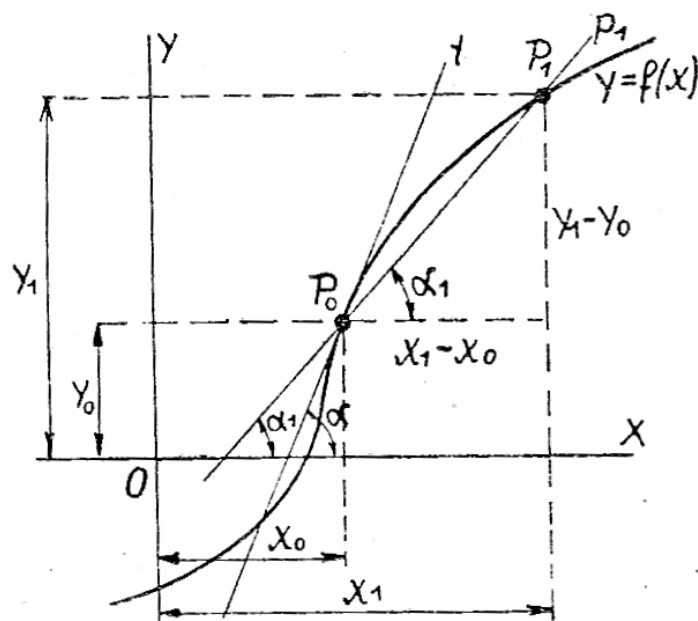
Geometrická představa nám říká, že $f'(x_0)$ limitní případ směrnice sečny grafu (druhý sečný bod se neomezeně blíží k $[x_0, f(x_0)]$).

$f'(x_0)$ je tedy směrnice tečny ke grafu funkce $y = f(x)$ je *geometrickou interpretací derivace*.



Obr. 27

Vezměme si libovolnou funkci $y = f(x)$ (viz obr. 28). Zvolme si na této křivce nějaký bod $P_0[x_0, y_0]$. Protože bod P_0 leží na křivce, musí platit $y_0 = f(x_0)$. Dále si zvolíme na křivce nějaký jiný bod $P_1[x_1, y_1] \neq P_0$. Spojíme nyní body P_0 a P_1 přímkou p_1 . Označíme ještě α_1 úhel, který svírá přímka p_1 s osou Ox . [15,16,17]



Obr. 28

Přímka p_1 se bude ovšem obecně lišit od přímky t (obě však prochází bodem P_0) a také úhel α_1 nebude stejný jako úhel α . Z obrázku lze vidět, že když se bude P_1 „blížit“ po křivce k bodu P_0 , bude se přímka p_1 „blížit“ k přímce t , tedy také úhel α_1 úhlu α .

Uvědomme si nyní, že úhel α_1 dovedeme vždy snadno spočítat pomocí goniometrické funkce *tangens*.

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}.$$

Definujme nyní tedy úhel α (tj. sklon tečny v bodě P_0) přímo jako ten úhel, ke kterému se blíží úhel α_1 . Potom také $\operatorname{tg} \alpha_1$ se bude blížit $\operatorname{tg} \alpha$ a píšeme:

$$\operatorname{tg} \alpha = \lim_{P_1 \rightarrow P_0} \operatorname{tg} \alpha_1 = \lim_{x_1 \rightarrow x_0} \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \lim_{x_1 \rightarrow x_0} \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}.$$

Číslo $\operatorname{tg} \alpha$ závisí jednak na tvaru křivky, tj. na funkci $y = f(x)$, jednak na bodu P_0 , tj. na jeho souřadnici x_0 . Je to číslo nesmírně důležité a je základem celé tzv. vyšší matematiky. Dáváme mu proto zvláštní označení $y'(x_0)$ nebo $f'(x_0)$ a nazýváme je **derivací** funkce $f(x)$ v bodě x_0 . [9]

4.4.2 Fyzikální motivace derivace

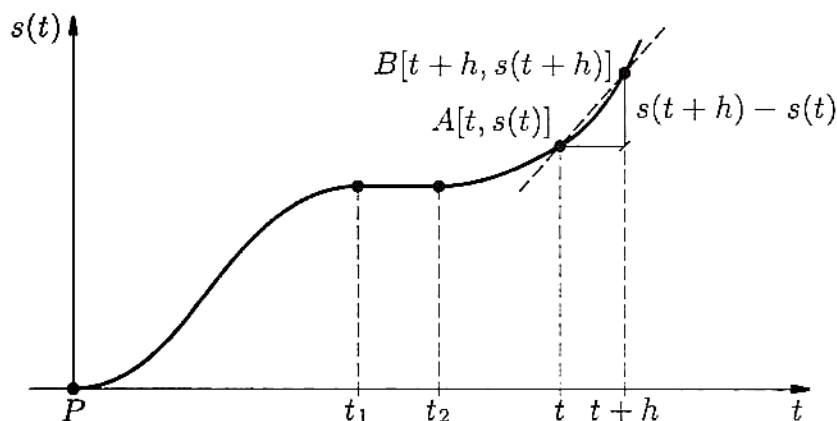
Jestliže se hmotný bod pohybuje po přímce a funkce $s = f(t)$ popisuje jeho polohu v závislosti na čase t , pak jeho průměrná rychlost v časovém intervalu $\langle t_0, t \rangle$ je určena podílem $[f(t) - f(t_0)] / (t - t_0)$. Limitním přechodem při $t \rightarrow t_0$ v tomto podílu, který je až na označení nezávisle proměnné analogický k výrazu pro směrnici sečny – pak zřejmě dostaneme hodnotu okamžité rychlosti takového bodu v čase t_0 . [16]

Vidíme tedy, že fyzikální interpretací takové limity (tedy derivace funkce popisující polohu bodu) je **okamžitá rychlost** takového pohybu.

Motivační příklad: Rychlost a zrychlení auta.

ZADÁNÍ: Necht' auto vyjede v čase $t = 0$ z bodu P . Předpokládejme, že se pohybuje přímočaře. Speciálně v době t_1 do t_2 stojí auto na křižovatce. Označme $s(t)$ dráhu, kterou ujede od okamžiku 0 do okamžiku t . Odvoďte pomocí derivace rychlost a zrychlení auta.

ŘEŠENÍ: Z matematického hlediska je tedy $s(t)$ funkce času t , neboť v každém okamžiku t je $s(t)$ vzdálenost od výchozího bodu P . Příklad grafu takové funkce je na následujícím obrázku 29.



Obr. 29

Uvažujme na časové ose body t a $t + h$, $h \neq 0$. Na grafu funkce $s(t)$ jim odpovídají body $A[t, s(t)]$, $B[t + h, s(t + h)]$. Sečna procházející body A , B má směrnici

$$k = \frac{s(t+h) - s(t)}{(t+h) - t} = \frac{s(t+h) - s(t)}{h}.$$

Fyzikálním významem čísla k pro $h > 0$ je tzv. **průměrná rychlost** auta v časovém intervalu $\langle t, t+h \rangle$.

ZÁVĚR:

První derivace funkce $s(t)$ definovaná vztahem $s'(t) = \frac{ds}{dt} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{s(t+h) - s(t)}{h}$

se nazývá tzv. **okamžitá rychlost** uvažovaného pohybu (tu nám ukazuje tachometr) a značí se $v(t)$, v obecném případě je opět funkcí času t .

Druhá derivace funkce $s(t)$ definovaná vztahem $s''(t) = \frac{d^2s}{dt^2} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{s'(t+h) - s'(t)}{h}$

se nazývá tzv. **zrychlení** uvažovaného pohybu a značí se $a(t)$, v obecném případě je opět funkcí času t . [14]

Motivační příklad: Okamžitá rychlost tělesa.

ZADÁNÍ: Určeme okamžitou rychlost tělesa při volném pádu v čase t_0 .

ŘEŠENÍ: Vycházejme z průměrné rychlosti v_P tělesa v časovém intervalu (t_0, t) a ze známého vztahu pro výpočet dráhy tělesa při jeho volném pádu $s = \frac{1}{2}gt^2$.

$$v_P = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0} = \frac{\frac{1}{2}gt^2 - \frac{1}{2}gt_0^2}{t - t_0} = \frac{\frac{1}{2}g(t^2 - t_0^2)}{t - t_0} = \frac{\frac{1}{2}g(t - t_0)(t + t_0)}{t - t_0} = \frac{1}{2}g(t + t_0).$$

ZÁVĚR: Průměrná rychlost se bude tím více přibližovat k okamžité rychlosti v v čase t_0 , čím bude t bližší k t_0 .

$$v = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0} = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{1}{2}g(t + t_0) = gt_0 = s'(t_0), \text{ kde } s'(t_0) \text{ je derivaci dráhy podle času}$$

v čase t_0 a dále platí: $v + \Delta v = g \cdot (t_0 + dt)$. [6]

Pro konkrétní hodnoty např. pro $t_0 = 5\text{s}$, $\Delta v = 0,1\text{m.s}^{-1}$ platí: $50,1 = 10 \cdot (5 + dt)$
 $0,1 = 10\Delta t$
 $dt \leq 0,01$.

Poznámka. Veličina Δv určuje tolerovanou „chybu.“ Je zřejmé, že čím menší, tím je výsledná rychlost v přesnější. Z předchozího výpočtu vyplývá, že ať zvolíme Δv sebemenší, vždy dokážeme nalézt nekonečně malou veličinu dt - základní myšlenka infinitesimálního počtu.

4.4.3 Definice derivace

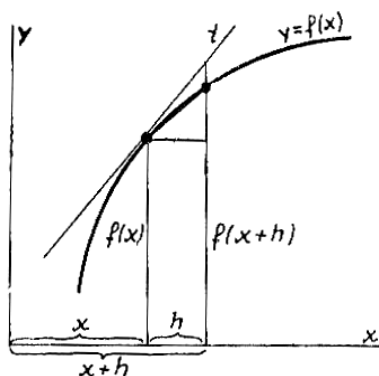
Řekneme, že funkci $y = f(x)$ má v bodě $x_0 \in D(f)$ derivaci $f'(x_0)$ (*je diferencovatelná*), právě když existuje limita

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Pak tuto limitu nazýváme **derivací funkce $f(x)$ v bodě x_0** a označujeme ji symbolem $f'(x_0)$, nebo (Lebnizův tvar) $\frac{df(x_0)}{dx}$.

Ekvivalentní zápis limity v definici derivace funkce $f(x)$ v bodě x má tvar (viz obr. 30)

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$



Obr. 30

Řekneme, že daná funkce má v bodě X **první derivaci**. Značíme $f'(x)$, tedy

$$f'(x) = \frac{df(x)}{dx} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Druhá derivace je pak definovaná vztahem

$$f''(x) = \frac{d^2 f(x)}{dx^2} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(x+h) - f'(x)}{h},$$

obdobně definujeme derivace vyšších řádů.

Poznámka. Funkce může mít derivaci jen tehdy, je-li definována i v jistém okolí tohoto bodu. Libovolná funkce může mít v daném bodě nejvýše jednu derivaci.

Konkrétní příklad:

Mějme danou funkci $f(x) = x^2$. Vypočítejme užitím definice první a druhou derivaci této funkce v libovolném bodě.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{df(x)}{dx} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2xh + h^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (2x + h) = 2x. \end{aligned}$$

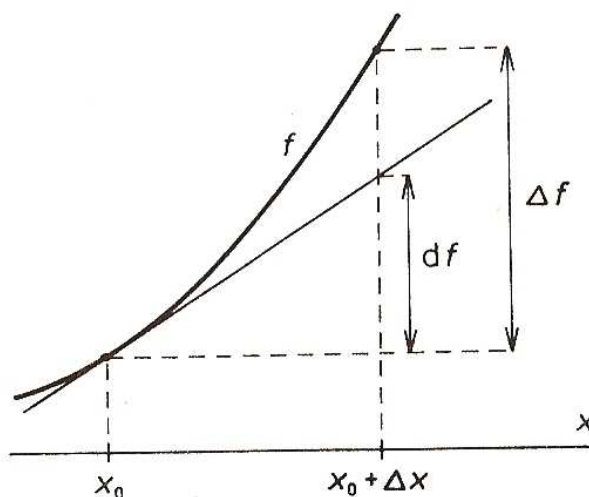
$f'(x) = 2x$ je opět funkcí proměnné x , takže můžeme opět mluvit o její derivaci. Derivaci funkce $f'(x) = 2x$ nazýváme *druhou derivací* funkce $f(x) = x^2$ a píšeme $f''(x)$.

$$f''(x) = \frac{d^2 f(x)}{x^2} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(x+h) - f'(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2(x+h) - 2x}{h} = 2.$$

4.5 Diferenciál funkce

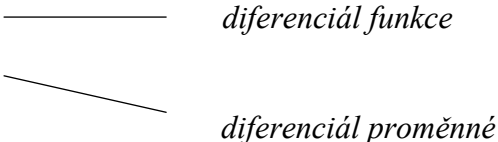
Směrnice tečny v bodě $[x_0, f(x_0)]$ je $f'(x_0)$ a tato směrnice je tangentou směrového úhlu. Z obr. 31 vypočítáme

$$f'(x_0) = \frac{df}{\Delta x}, \text{ tedy } df = f'(x_0) \Delta x.$$



Obr. 31

Číslo $df = f'(x_0)\Delta x$ se nazývá **diferenciál funkce v bodě** x_0 . Diferenciál závisí i na hodnotě Δx , je to tedy funkce. Ale při daném Δx je to reálné číslo. Uvažujme – li funkci $f(x) = x$, její derivace v libovolném bodě x_0 je rovna zřejmě 1, tedy diferenciál je $dx = 1$. Proto se v označení diferenciálu často píše $df = f'(x_0)dx$ anebo $dy = f'(x_0)dx$.

Píšeme $f'(x_0) = \frac{dy}{dx}$. 

Poznámka. Diferenciál umožňuje nahradit některé komplikované výrazy jednoduššími, které se s úspěchem využívají jak při rychlých numerických výpočtech. Hovoříme pak, vzhledem k řádu chyb, kterých se těmito úpravami dopouštíme, o **přiblížení prvního řádu** nebo též o **lineární aproximaci (přiblížení)**.

4.6 Základní definice a věty diferenciálního počtu

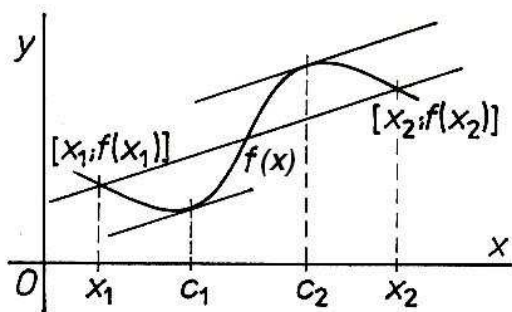
V této kapitole se budu věnovat takovým vlastnostem spojitých a diferencovatelných funkcí, které nám umožní ověřovat a upřesňovat si některé jejich vlastnosti - monotónnost, existenci a lokalizaci maximálních a minimálních (extremálních) hodnot s pomocí jejich první derivace. Budeme zjišťovat, zda veličina popisovaná danou funkcí má rostoucí nebo klesající tendenci, pro kterou hodnotu proměnné nabývá maximální nebo minimální hodnoty atd.

4.6.1 Lagrangeova věta (o střední hodnotě)

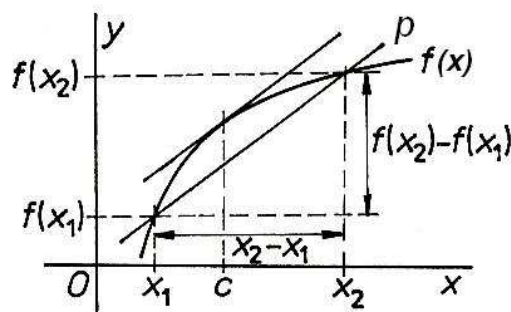
Derivace je pojem lokálního charakteru. Tím pozoruhodnější je možnost vystihnout pomocí derivace celkový charakter funkce. Zprostředkovatelem je věta o střední hodnotě, která dostala jméno podle francouzského matematika J. L. de Lagrangea.

Motivace: Spojme body $[x_1, f(x_1)]$, $[x_2, f(x_2)]$ úsečkou (viz obr. 32). Lagrange zjistil, že pak existuje aspoň jeden takový bod $c \in (x_1, x_2)$, že tečna v bodě $[c, f(c)]$ je rovnoběžná s touto tečnou. Směrnice tečny v bodě c je derivace $f'(c)$. Dále směrnice přímky p je tangens směrového úhlu (viz obr. 33) a proto $\operatorname{tg} \alpha = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$. Jelikož se obě

směrnice rovnají, tak platí, že: $f'(c) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \Rightarrow f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1)$.



Obr. 32



Obr. 33

Věta: (Lagrangeova) – „O střední hodnotě“

Nechť funkce $f(x)$ má derivaci v každém bodě intervalu (a, b) . Nechť $x_1, x_2 \in (a, b), x_1 < x_2$. Pak existuje takové $c \in (x_1, x_2)$, že $f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1)$. [6]

4.6.2 Monotónnost a derivace

Věta: Řekneme, že funkce $f(x)$ je v bodě x_0 **rostoucí**, jestliže pro všechna $x \neq x_0$ z určitého (dostatečně malého) okolí bodu x_0 platí:

$$x > x_0 \Rightarrow f(x) > f(x_0) \quad \wedge \quad x < x_0 \Rightarrow f(x) < f(x_0);$$

$$f'(x_0) > 0.$$

A funkce $f(x)$ je v bodě x_0 **klesající**, jestliže pro všechna $x \neq x_0$ z určitého (dostatečně malého) okolí bodu x_0 platí:

$$x > x_0 \Rightarrow f(x) < f(x_0) \quad \wedge \quad x < x_0 \Rightarrow f(x) > f(x_0);$$

$$f'(x_0) < 0.$$

4.6.3 Extrémy – lokální maxima, minima

Definice: Funkce $f(x)$ nabývá v bodě x_0 **lokálního maxima**, jestliže existuje takové jeho okolí $O(x_0)$, že platí:

$$\forall x \in O(x_0) : f(x) \leq f(x_0) ;$$

Funkce $f(x)$ nabývá v bodě x_0 **lokálního minima**, jestliže existuje takové jeho okolí $O(x_0)$, že platí:

$$\forall x \in O(x_0) : f(x) \geq f(x_0) ;$$

Věta (nutná podmínka existence lokálního extrému):

Nechť má funkce f v bodě x_0 . Má - li f v bodě x_0 lokální extrém, je nutně tato derivace nulová a takovému bodu x_0 říkáme **stacionární**.

$$f'(x_0) = 0.$$

Věta (postačující podmínka existence ostrého lokálního extrému):

Nechť má funkce f v bodě x_0 první a druhou derivaci. Je-li první derivace nulová a druhá derivace nenulová, má funkce f v bodě x_0 ostrý lokální extrém. Je-li $f''(x_0) < 0$, jedná se o **lokální maximum**, je-li $f''(x_0) > 0$, jedná se o **lokální minimum**.

5. APLIKACE DIFERENCIÁLNÍHO POČTU

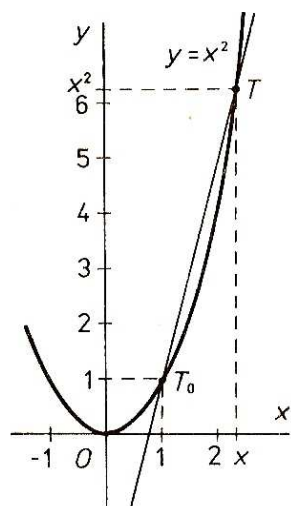
- Tečna ke křivce
- Vzdálenost bodu od přímky
- Přibližné řešení rovnice - metoda tečen
- Vyšetřování průběhu funkce
- Lineární aproximace (přiblížení)
- Praktické vyšetřování extrémů
- Výpočet rychlosti objektů
- Optimalizační úlohy (optimalizace vzdálenosti, optimalizace rychlosti)

5.1 Tečna ke křivce

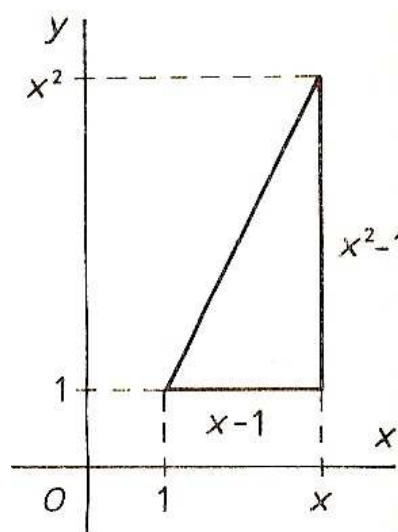
Konkrétní příklad: Určení rovnice tečny k parabole.

ZADÁNÍ: Najdeme rovnici tečny k parabole $y = x^2$ v jejím dotykovém bodě $T_0[1, 1]$.

ŘEŠENÍ: T_0 je daný bod paraboly $y = x^2$ a druhá souřadnice dotykového bodu je $y_1 = 1^2 = 1$. Tedy dotykový bod je $T_0[1, 1]$. Libovolný bod T na křivce $y = x^2$ (obr. 34) má souřadnice $T[x, x^2]$.



Obr. 34



Obr. 35

Proto je směrnice sečny k_s (obr. 35), tzn. tangens úhlu, který tato sečna svírá s kladnou poloosou x) a platí:

$$k_s = \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = x+1.$$

Směrnice sečny bude tím „bližší“ směrnici tečny k_T , čím kratší bude úsek $x - 1$, tedy čím bude x „blíží“ k 1. Směrnice tečny k_S bude tedy limita, pro kterou platí:

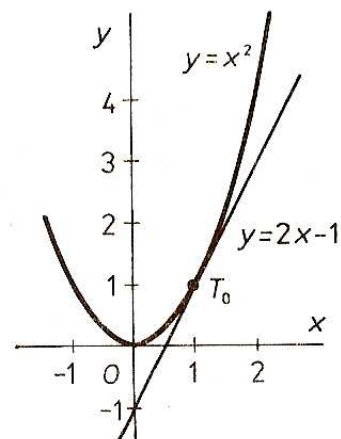
$$k_T = \lim_{x \rightarrow 1} (x + 1) = 2.$$

ZÁVĚR: Nyní již není problém napsat rovnici tečny:

$$\begin{aligned} y - y_1 &= k_T (x - x_1), \\ y - 1 &= 2 \cdot (x - 1). \end{aligned}$$

Anebo po úpravě na obecnou rovnici (obr. 36)

$$2x - y - 1 = 0. \quad [6,7]$$



Obr. 36

5.2 Vzdálenost bodu od přímky

Konkrétní příklad: Určení vzdálenosti bodu od přímky.

ZADÁNÍ: Užitím diferenciálního počtu vypočítejme vzdálenost bodu $A[1,1]$ od přímky $p: 2x - y + 3 = 0$.

ŘEŠENÍ: Hledáme nejmenší ze všech vzdáleností dvou bodů: $A[1,1]$

$$B \in p \wedge B[x, 2x + 3]$$

$$\text{Vzdálenost } |AB| = v = \sqrt{(x-1)^2 + (2x+3-1)^2} = \sqrt{5x^2 + 6x + 5} = (5x^2 + 6x + 5)^{\frac{1}{2}}.$$

$$1. \text{ derivace } v(x): v'(x) = \frac{1}{2} (5x^2 + 6x + 5)^{-\frac{1}{2}} \cdot (10x + 6) = \frac{10x + 6}{2\sqrt{5x^2 + 6x + 5}} = \frac{5x + 3}{\sqrt{5x^2 + 6x + 5}}.$$

$$\text{Lokální extrém: } v'(x) = 0 \quad \dots \quad \frac{5x + 3}{\sqrt{5x^2 + 6x + 5}} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 5x + 3 = 0 \quad \dots \quad x = -\frac{5}{3}.$$

ZÁVĚR: Vzdálenost bodu $A[1,1]$ od přímky $p: 2x - y + 3 = 0$ je $v = \frac{4\sqrt{5}}{5}$.

5.3 Přibližné řešení rovnice - metoda tečen

Motivační příklad:

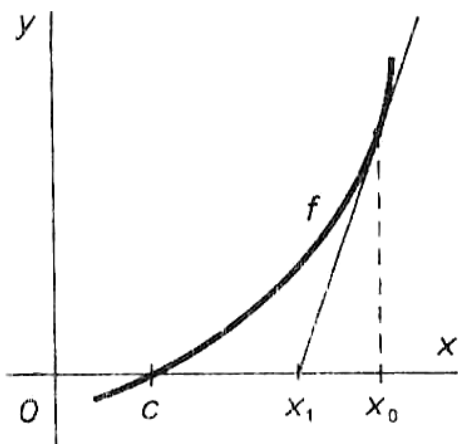
ZADANÍ: Napište rovnici tečny ke grafu funkce $f(x)$ v bodě $[x_0, f(x_0)]$ a najděte průsečík $[x_1, 0]$ této tečny s osou x .

ŘEŠENÍ: Jestliže v bodě $[x_0, f(x_0)]$ sestrojíme tečnu, pak pro její průsečík $[x_1, 0]$ s osou x platí rovnice tečny:

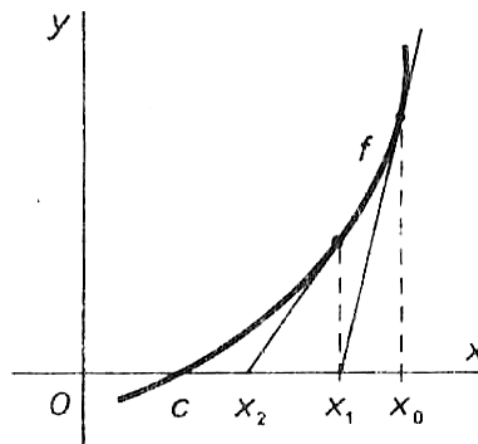
$$\begin{aligned}0 - f(x_0) &= f'(x_0)(x_1 - x_0), \\x_1 - x_0 &= -\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}, \\x_1 &= x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \quad (\text{viz obr. 37}).\end{aligned}$$

Dostali jsme vzorec i pro případně opakování celého postupu. Jestliže v bodě $[x_1, f(x_1)]$ sestrojíme tečnu, pak pro její průsečík $[x_2, 0]$ s osou x zřejmě platí

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} \quad (\text{viz obr. 38}).$$



Obr. 37



Obr. 38

ZÁVĚR: Řešení rovnice $f(x) = 0$ aproximujeme

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \text{ kde } n = 1, 2, 3, \dots$$

Poznámka. Kořen rovnice nelze vždy tímto způsobem přesně vypočítat! [7,12]

Konkrétní příklad: Nalezení kořenu dané rovnice tj. průsečíku tečny s osou x.

ZADÁNÍ: Napište rovnici tečny ke grafu funkce $f: y = x^4 + x^3 - x^2 - 2x - 2$ v bodě $[2, f(x_0)]$ a pokuste se najít průsečík $[x_1, 0]$ této tečny s osou x .

ŘEŠENÍ: Jelikož $x_0 = 2$, je $f(x_0) = 2^4 + 2^3 - 2^2 - 2 \cdot 2 - 2 = 14$.

Dále pro směrnici tečny platí:

$$f'(x_0) = 4x_0^3 + 3x_0^2 - 2x_0 - 2,$$

$$f'(2) = 4 \cdot 2^3 + 3 \cdot 2^2 - 2 \cdot 2 - 2 = 38.$$

Tedy tečna má rovnici:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x_1 - x_0),$$

$$y - 14 = 38(x - 2).$$

$$0 - 14 = 38(x_1 - 2),$$

Pro průsečík $[x_1, 0]$ ležící na tečně platí:

$$x_1 - 2 = -\frac{14}{38},$$

$$x_1 = 2 - \frac{14}{38} = 1,63...$$

ZÁVĚR: Rovnice tečny zadané funkce v bodě $[2, 14]$ je $y - 14 = 38 \cdot (x - 2)$ hledaný průsečík s osou x je po zaokrouhlení $[1,63; 0]$.

5.4 Postup při vyšetřování průběhu funkce

Vyšetřit průběh funkce znamená zjistit všechny její charakteristické vlastnosti a následně jsme schopni konstrukce grafu funkce.

1. Určení definičního oboru funkce, případně oboru hodnot.
2. Rozhodnu, zda funkce není sudá, lichá nebo periodická. V těchto případech se omezíme pouze na část definičního oboru.
3. Určím limity v krajních bodech definičního oboru
4. Vyšetření spojitosti funkce (určím intervaly spojitosti, najdu body nespojitosti funkce a rozhodnu o druhu nespojitosti v daných bodech).
5. Určím body, ve kterých neexistuje první derivace funkce a **stacionární body** ($f'(x) = 0$).

6. Určím intervaly monotónnosti:

- Pokud $f'(x) > 0$ pak je funkce rostoucí
- Pokud $f'(x) < 0$ pak je funkce klesající v daném intervalu

7. Určím body, ve kterých je druhá derivace funkce rovna nule (nalezneme tzv. **inflexní**

body - $f''(x) = 0$) a určím intervaly konvexnosti a konkávnosti.

- Pokud $f''(x) > 0$ pak funkce je konkávní
- Pokud $f''(x) < 0$ pak je funkce konvexní v daném intervalu

8. Ověřím, jestli ve stacionárním bodě nastává lokální extrém. Buď úvahou o monotónnosti, nebo užitím druhé derivace.

9. Najdu funkční hodnoty ve významných bodech (lokální extrémy, inflexní body, průsečíky s osou x a osou y)

10. Na základě získaných výsledků načrtnu graf [12]

Konkrétní příklad: Vyšetření průběhu funkce.

ZADÁNÍ: Vyšetřete průběh funkce $f: y = \frac{x}{1+x^2}$ a načrtněte její graf. Dále provedme

diskuzi o počtu kořenů rovnice $\frac{x}{1+x^2} = p$, kde p je reálný parametr.

ŘEŠENÍ:

1. Definičním oborem funkce f je množina $\mathbb{R}$.

2. Platí: $f(-x) = -f(x)$, protože $\frac{-x}{1-(-x)^2} = -\frac{x}{1+x^2}$. A funkce f je tedy **lichá**.

$$3. \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{1+x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x} + 1} = \frac{0}{0+1} = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{1+x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x} + 1} = \frac{0}{0+1} = 0.$$

4. Funkce f je **spojitá** v $\mathbb{R}$.

5. První derivace:
$$f'(x) = \frac{1+x^2-2x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{(1-x)(1+x)}{(1+x^2)^2}.$$

Stacionární body: $f'(x) = 0 \quad \dots \quad \frac{(1-x)(1+x)}{(1+x^2)^2} = 0.$

$$x = -1 \quad \vee \quad x = 1.$$

6. Monotónnosti: $f'(x) > 0 \quad \dots \quad (1-x)(1+x) > 0.$

Funkce je **rostoucí** na intervalu $x \in (-1, 1)$,

$$f'(x) < 0 \quad \dots \quad (1-x)(1+x) < 0,$$

Funkce je **klesající** na intervalu $x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty).$

7. Druhá derivace:
$$f''(x) = \frac{(-2x) \cdot (1+x^2)^2 - (1-x^2)^2 \cdot 2(1+x^2) \cdot 2x}{(1+x^2)^4}.$$

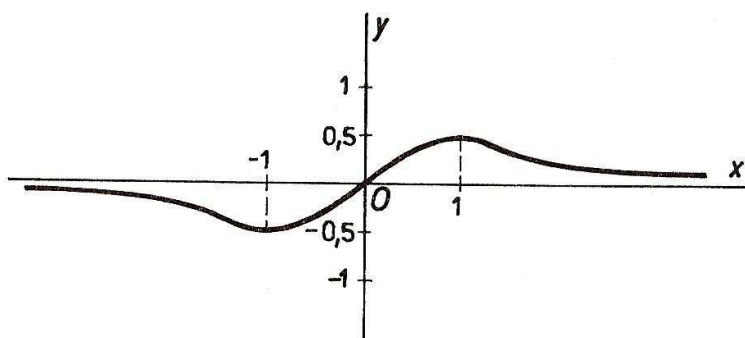
Inflexní bod: $f''(x) = 0 \quad \dots \quad (-2x) \cdot (1+x^2)^2 - (1-x^2)^2 \cdot 2(1+x^2) \cdot 2x = 0$
 $x = 0.$

8. Ověření lokálního extrému: $f''(-1) = \frac{1}{2} > 0 \quad \dots \quad \text{lokální minimum.}$

$$f''(1) = -\frac{1}{2} < 0 \quad \dots \quad \text{lokální maximum.}$$

9. Funkční hodnoty ve významných bodech: $f(-1) = -0,5, f(1) = 0,5, f(0) = 0$
 Průsečík s osou x i s osou y je zřejmě bod $O[0,0]$.

10. Graf:



Obr. 39

ZÁVĚR: Z načrtnutého grafu (viz obr.39) je patrné, že pro rovnici $\frac{x}{1+x^2} = p$, platí:

- Pro $p = -0,5; 0; 0,5$ má rovnice jedno řešení.
- Pro $p \in (-0,5; 0) \cup (0; 0,5)$ má rovnice dvě řešení.
- Pro $p \in (-\infty, -0,5) \cup (0,5; +\infty)$ nemá rovnice řešení. [6]

5.5 Lineární aproximace a tělesná hmotnost – Odhad ideální váhy

Teorie: Index tělesné hmotnosti (BMI - Body Mass Index) je číslo používané jako měřítko obezity, umožňující statistické porovnávání lidí s různou výškou. Index tělesné hmotnosti B je veličina vypočtená podle vzorce

$$B = \frac{m}{v^2}, \text{ kde } m \text{ je hmotnost člověka v kilogramech a } v \text{ jeho výška v metrech.}$$

Všeobecně je ideální BMI v rozmezí 19 až 24. BMI pod 18,5 je považováno za podváhu a BMI vyšší než 30 značí obezitu.

Považujme hodnotu BMI rovnu 22 za zcela ideální. Potom odpovídající ideální hmotnost m člověka (o výšce v) může být vypočtena podle vzorce

$$m = 22 \cdot v^2. \quad (1)$$

Nevýhoda tohoto vzorce je, že po dosazení je nutno použít kalkulaátor. Budeme se snažit najít přibližný vzorec, kterým by bylo možné vzorec (1) nahradit a provést výpočet z paměti.

ZADANÍ: Chceme aproximovat ideální hmotnost m člověka, tedy funkci proměnné v - $f(v) = 22 \cdot v^2$ pomocí lineární funkce v okolí bodu $v_0 = 1,8$ - (což představuje typickou lidskou výšku vyjádřenou v metrech).

ŘEŠENÍ: Nejvhodnější lineární aproximace funkce $y = f(x)$ v okolí bodu x_0 je $y = f(x_0) + f_0'(x_0)(x - x_0)$.

$$f(v_0) = 22 \cdot v_0^2 \dots f(1,8) = 71,28.$$

$$f_0'(v_0) = 44 \cdot v_0 \dots f_0'(1,8) = 79,2.$$

$$y = f(v_0) + f_0'(v_0)(v - v_0),$$

$$y = 71,28 + 79,2 \cdot (v - 1,8).$$

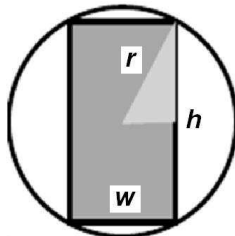
$$\text{Odsud } m \sim 71,28 + 79,2(v - 1,8) = 79,2v - 71,28.$$

Tento vzorec je možno přepsat do tvaru: $m \sim 0,792 \cdot (100v - 89,1) \sim 0,8 \cdot (100v - 90)$.

ZÁVĚR: Rychlý odhad ideální tělesné hmotnosti je tedy následující: Od výšky v centimetrech odečteme hodnotu 90 a od získané hodnoty odečteme ještě 20%. Tím získáme ideální váhu dané osoby. [18]

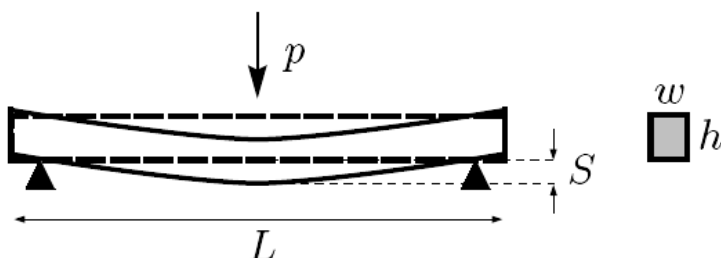
5.6 Praktické vyšetřování extrémů – Tuhost nosníku

ZADÁNÍ: Mějme dřevěnou kulatinu délky L a poloměru r . Naším úkolem je vyříznout z kulatiny nosník obdélníkového průřezu (viz obr. 40), který bude co nejtužší (bude se co nejméně prohýbat).



Obr. 40

ŘEŠENÍ: Uvažujme nosník obdélníkového průřezu $w \times h$, délky L , vyříznutý z kulatiny o poloměru r a zatížený shora tlakem p . Nosník se tímto zatížením prohne o S (viz obr. 41).



Obr. 41

Předpoklady:

$$S = C \frac{pL^4}{wh^3},$$

$$\left(\frac{w}{2}\right)^2 + \left(\frac{h}{2}\right)^2 = r^2,$$

$$w = \sqrt{4r^2 - h^2}.$$

Hledáme w a h tak, aby průhyb S byl minimální.

$$S = C \frac{pL^4}{wh^3} \longrightarrow \text{minimum},$$

Průhyb S je minimální, pokud je jmenovatel wh^3 co největší.

$$wh^3 \longrightarrow \text{maximum},$$

Dosadíme za w (z předpokladů). Průhyb je nyní funkcí jedné proměnné h .

$$\sqrt{4r^2 - h^2} \cdot h^3 \longrightarrow \text{maximum},$$

Předtím než začneme derivovat, tak si výraz umocníme a úloha se zjednoduší.

$$((4r^2 - h^2)h^6)' = (4r^2h^6 - h^8)' = 24r^2h^5 - 8h^7 = 8h^5(3r^2 - h^2),$$

$$\text{necht' } (wh^3)' = 0, \text{ pak } 8h^5(3r^2 - h^2) = 0.$$

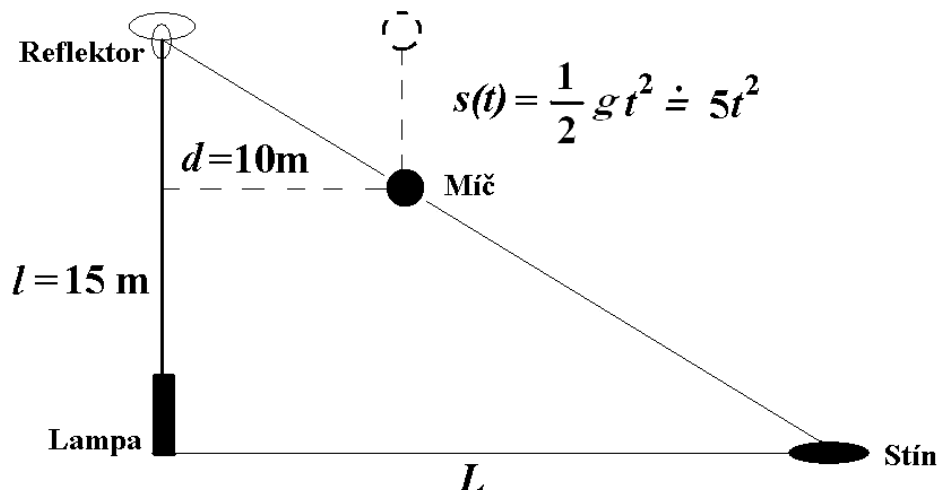
$$h = \sqrt{3} \cdot r \sim 1,73r.$$

ZÁVĚR: Tuhost nosníku bude maximální, pokud je výška nosníku rovna 1,73 – násobku poloměru, tj. přibližně 0,866 – násobku průměru. [18]

5.7 Výpočet rychlosti objektů – Rychlost pohybujícího se stínu lampy

ZADÁNÍ: Z vrcholku 15i metrového lampy svítí reflektor. Deset metrů před reflektorem je ze stejné výšky puštěn míč, který padá volným pádem (viz obr. 42). Jak rychle se pohybuje stín míče půl sekundy po jeho upuštění?

ŘEŠENÍ:



Obr. 42

Pomocí podobných trojúhelníků a vztahu pro dráhu volného pádu vyjádříme vzdálenost L stínu od paty stožáru, platí:

$$\frac{L}{l} = \frac{d}{s},$$

$$L = \frac{d \cdot l}{s}.$$

Pro $d = 10\text{ m}$, $l = 15\text{ m}$, $s = 5t^2$ je vzdálenost stínu od paty stožáru v čase t je:

$$L(t) = \frac{10 \cdot 15}{5t^2} = \frac{30}{t^2}.$$

Rychlost pohybu $\vec{v}$ stínu je $\vec{v}(t) = \frac{dL}{dt} = -2 \frac{30}{t^3} = -\frac{60}{t^3}.$

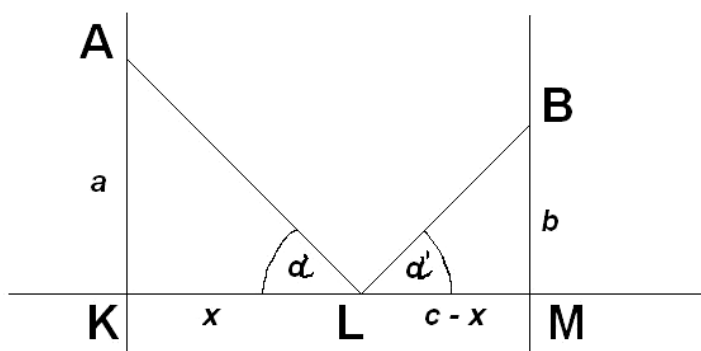
V čase $t = 0,5\text{ s}$ je rychlost rovna $\vec{v}(0,5) = -\frac{60}{(0,5)^3} = -480\text{ m.s}^{-1}$ (znaménko minus nám říká, že se stín pohybuje ve směru opačném proti kladnému smyslu osy x).

ZÁVĚR: Půl sekundy po upuštění míče se jeho stín pohybuje rychlostí 480 m.s^{-1} . [18]

5.8 Optimalizační úlohy

Motivační příklad – hledání optimální dráhy – Ztracený turista

ZADÁNÍ: Turista se ztratil a nachází se v bodě A. Má se dostat do určeného bodu B (viz obr. 43). Aby se zorientoval, musí nejprve přijít na kraj lesa (na obrázku - osa x) a teprve potom je schopen přejít do bodu B. Jakou cestou má jít, má – li být jeho cesta co nejkratší?



Obr. 43

ŘEŠENÍ:

$$f(x) = \sqrt{x^2 + a^2} + \sqrt{(c-x)^2 + b^2},$$

$$f'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + a^2}} + \frac{-2c + 2x}{2\sqrt{(c-x)^2 + b^2}},$$

$$f'(x) = 0 \dots \frac{c-x}{\sqrt{(c-x)^2 + b^2}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}}.$$

Úlohu budu řešit dvojím způsobem:

1. Geometricky (z obrázku) – z goniometrických a z podobnosti trojúhelníků

Vycházím z rovnosti

$$\frac{c-x}{\sqrt{(c-x)^2 + b^2}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}},$$
$$\cos \alpha = \cos \alpha',$$
$$\alpha = \alpha'.$$

Trojúhelníky AKL a LMB jsou podobné (podle věty UU):

$$\frac{a}{x} = \frac{b}{c-x},$$
$$ac - ax = bx,$$
$$x = \frac{a \cdot c}{a + b} = |KL|.$$

2. Algebraicky (početně)

$$\frac{c-x}{\sqrt{(c-x)^2+b^2}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}},$$

$$\frac{(c-x)^2}{(c-x)^2+b^2} = \frac{x^2}{x^2+a^2},$$

$$1 - \frac{b^2}{(c-x)^2+b^2} = 1 - \frac{a^2}{x^2+a^2},$$

$$(x^2+a^2)b^2 = a^2[(c-x)^2+b^2],$$

$$x^2b^2 = a^2(c-x)^2,$$

$$\left(\frac{x}{c-x}\right)^2 = \left(\frac{a}{b}\right)^2,$$

$$\left(\frac{c}{c-x} - 1\right)^2 = \left(\frac{a}{b}\right)^2.$$

Zavedeme substituci: $d = \frac{c}{c-x},$

$$(d-1)^2 = \left(\frac{a}{b}\right)^2,$$

$$d^2 - 2d + \left(1 - \frac{a^2}{b^2}\right) = 0,$$

$$d_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4\left(1 - \frac{a^2}{b^2}\right)}}{2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{1 - \left(1 - \frac{a^2}{b^2}\right)}}{2} = 1 \pm \sqrt{\frac{a^2}{b^2}} = 1 \pm \frac{a}{b} = \frac{b \pm a}{b}.$$

I.

$$\frac{c}{c-x} = \frac{b+a}{b},$$

$$bc = ac + bc - bx - bx,$$

$$x = \frac{a \cdot c}{a+b}.$$

II.

$$\frac{c}{c-x} = \frac{b-a}{b},$$

$$bc = -ac + bc - bx + ax,$$

$$x = \frac{a \cdot c}{a-b}.$$

$$\text{Zřejmě: } \frac{a \cdot c}{a+b} < \frac{a \cdot c}{a-b}, \text{ pro } a, b > 0.$$

ZÁVĚR: Aby turista urazil nejkratší dráhu, musí úhel příchodu a odchodu na kraj lesa být

stejný a vzdálenost $x = \frac{a \cdot c}{a+b} = |KL|$ (podle označení v obrázku).

Motivační příklad – hledání optimální rychlosti – Plavání ryb proti proudu

Snažíme-li se dostat proti proudu řeky z bodu A do bodu B, musíme plavat (či plout) dostatečně rychle, aby nás nestrhával proud, ale ne příliš rychle, abychom se brzo nevyčerpali (nespotřebovali mnoho paliva a „nezavařili“ stroje). Je vhodné znát optimální rychlost $\bar{x}$, která umožní se do cíle dostat s vynaložením minimální energie.

ZADÁNÍ: Uvažujme rybu, která plave proti proudu v řece. Řeka teče rychlostí $\bar{v}$. Ryba popluje takovou rychlostí $\bar{x}$, aby vydala, co nejméně energie E . Rychlosti jsou měřeny vzhledem k břehu.

ŘEŠENÍ: Energie E vydaná za časovou jednotku na plavání je úměrná výrazu $E \sim (\bar{x} + \bar{v})^3$ (třetí mocnině relativní rychlosti ryby vzhledem k vodě).

Vhodnou volbou jednotek dosáhneme toho, že $\bar{v} = 1$. Tedy energie vynaložená na plavání je přímo úměrná výrazu $(\bar{x} + 1)^3$ a době t , kterou plave. Proto $E \sim (\bar{x} + 1)^3 t$.

Ryba popluje dobu $t = \frac{\text{vzdálenost k uplavání}}{\text{rychlost}}$ [časových jednotek], doba plavání je

tedy nepřímo úměrná rychlosti pohybu $\bar{x}$ vzhledem k břehu. Proto $t \sim \frac{1}{\bar{x}}$.

Energie k přeplutí z bodu A do bodu B má být minimální:

$$E = \frac{(\bar{x} + 1)^3}{\bar{x}} \longrightarrow \text{minimální,}$$

$$E' = \left(\frac{(\bar{x} + 1)^3}{\bar{x}} \right)' = \frac{3 \cdot (\bar{x} + 1)^2 \cdot \bar{x} + (\bar{x} + 1)^3 \cdot 1}{\bar{x}^2} = \frac{(\bar{x} + 1)^2 \cdot [3\bar{x} - (\bar{x} + 1)]}{\bar{x}^2} = \frac{(\bar{x} + 1)^2 \cdot (2\bar{x} - 1)}{\bar{x}^2},$$

necht' $E' = 0$, pak $\frac{(\bar{x} + 1)^2 \cdot (2\bar{x} - 1)}{\bar{x}^2} = 0$.

$\bar{x} = \frac{1}{2}$, tj. když ryba plave vzhledem k břehu poloviční rychlostí, než jakou proudí voda. Z povahy úlohy je zřejmé, že se jedná o minimum.

ZÁVĚR: Migrující ryby umí „vyřešit“ tuto optimalizační úlohu (nebo aspoň znají její řešení) - plavou proti proudu poloviční rychlostí, než je rychlost proudu řeky. [18]

6. ŘEŠENÉ PROBLÉMOVÉ SLOVNÍ ÚLOHY

Ve slovních úlohách budeme vždy hledat hodnotu proměnné, pro niž nabývá jistá funkce extrémní hodnoty. Zda v dané hodnotě proměnné lokální extrém existuje, ověříme pomocí druhé derivace jisté funkce.

Postup:

1. Volba proměnné a určení jejího oboru.
2. Vyjádření extremalizované veličiny jako funkce zvolené proměnné.
3. Vyšetření extrému funkce v daném oboru.
4. Kontrola, zda se jedná o požadovaný extrém.

6.1 Problém stavby bazénu

ZADÁNÍ: Bazén má mít čtvercové dno a objem 256000 l. Vypočítejte jeho rozměry tak, aby spotřeba materiálu na vyzdění jeho stěn a dna byla co nejmenší.

ŘEŠENÍ:

Mějme čtvercové dno bazénu o straně x a hloubku h .

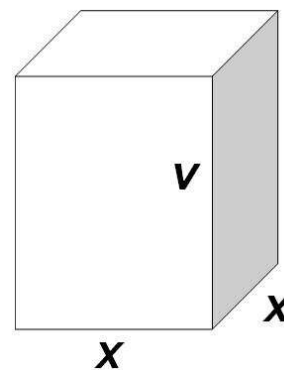
Bazén má tvar kváдру a objem 256 m³.

Podle vzorce pro objem kváдру platí:

$$V = x^2 \cdot h,$$

$$256 = x^2 \cdot h,$$

$$h = \frac{256}{x^2}, \text{ tedy hloubka } h \text{ bazénu je funkce } h(x).$$



Pro povrch stěn a dna bazénu platí vztah:

$$P = x^2 + 4xh,$$

$$P = x^2 + 4x \cdot \frac{256}{x^2}.$$

Hledáme lokální extrém funkce $P(x)$:

$$P'(x) = 0 \dots 2x - \frac{1024}{x^2} = 0,$$

$$x = 8 \text{ m.}$$

Ověříme přes druhou derivaci, jestli se opravdu jedná o lokální minimum.

$$P''(x) = x + \frac{2408}{x^2} = 8 + \frac{2408}{64} = 45,625 > 0 - \text{lokální minimum.}$$

Pro hloubku bazénu platí $h(8) = \frac{256}{8^2} = 4 \text{ m.}$

ZÁVĚR: Velikost podstavy bazénu je 8 m a hloubka bazénu je 4 m. [11]

6.2 Problém parního kotle

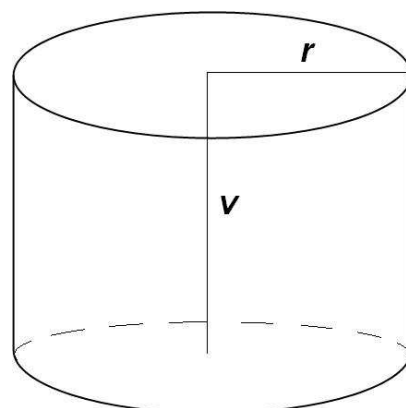
ZADÁNÍ: Určete rozměry parního kotle tvaru válce tak, aby při daném objemu bylo ochlazování páry ve válci nejmenší, tj. aby povrch válce byl minimální.

ŘEŠENÍ:

Povrch válce: $P = 2\pi r^2 + 2\pi r v$.

Z daného objemu válce $V = \pi r^2 v$ vyjádříme v :

$$v = \frac{V}{\pi r^2}.$$



A dosadíme do vztahu pro povrch:

$$P = 2\pi r^2 + 2\pi r \frac{V}{\pi r^2},$$

po úpravě dostáváme funkci $P(r)$:

$$P(r) = 2\pi r^2 + \frac{V}{r}.$$

Hledáme minimum funkce $P(r)$:

$$P'(r) = 0 \dots 4\pi r - \frac{2V}{r^2} = 0,$$

$$r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}.$$

Užitím druhé derivace se přesvědčíme, zda se jedná o minimum:

$$P''(r) = 4\pi + \frac{4V}{r^3},$$

$$P''\left(\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}\right) = 4\pi + \frac{4V}{\frac{V}{2\pi}} = 4\pi + 8\pi = 12\pi > 0 - \text{jedná se o minimum.}$$

Dosazením r do výše uvedeného vztahu pro v dostáváme:

$$v = \frac{V}{\pi \left(\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}\right)^2} = \frac{V}{\sqrt{\frac{\pi^3 V^2}{4\pi^2}}} = \sqrt[3]{V^3 \cdot \frac{4\pi^2}{\pi^3 V^2}} = \sqrt[3]{\frac{4V}{\pi}}.$$

ZÁVĚR: Rozměry hledaného válce jsou $r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$ a $v = \sqrt[3]{\frac{4V}{\pi}}$, takže zřejmě $v = 2r$.

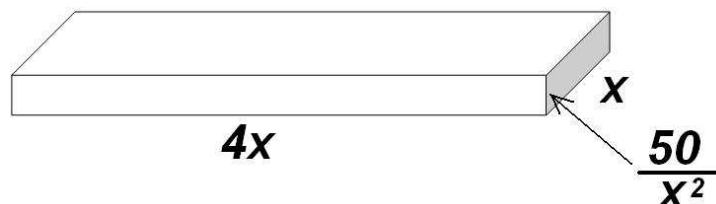
Jedná se tedy o rovnostranný válec. [11]

6.3 Problém stavby silážní jámy

ZADÁNÍ: Silážní jáma má tvar pravoúhlého rovnoběžnostěnu s objemem 200 m^3 . Délka je čtyřnásobkem šířky; 1 m^2 základny je dvakrát levnější než 1 m^2 stěny. Jaké mají být rozměry silážní jámy, aby její stavba byla co nejlevnější?

ŘEŠENÍ:

$$V = 4x \cdot x \cdot y$$
$$200 = 4x \cdot x \cdot y$$
$$y = \frac{50}{x^2}$$



Pro povrch přední (resp. zadní) stěny platí:

$$P_1 = 4x \cdot \frac{50}{x^2}.$$

Pro povrch boční stěny platí:

$$P_2 = x \cdot \frac{50}{x^2}.$$

Pro povrch základny platí:

$$P_3 = 4x \cdot x.$$

Pro povrch silážní jámy platí:

$$P = 2P_1 + 2P_2 + P_3,$$

$$P = 2 \cdot 4x \cdot \frac{50}{x^2} + 2 \cdot x \cdot \frac{50}{x^2} + 4x \cdot x.$$

Jelikož stěny jsou dvakrát dražší než základna, tak při výpočtu celkových nákladů na stavbu je musíme zohlednit tak, že povrch stěn vynásobíme 2.

Pro celkové náklady platí:

$$C = 2 \cdot \left(2 \cdot 4x \cdot \frac{50}{x^2} + 2 \cdot x \cdot \frac{50}{x^2} \right) + 4x \cdot x,$$

$$C = \frac{800}{x} + \frac{200}{x} + 4x^2,$$

$$C = \frac{1000}{x} + 4x^2.$$

Hledáme lokální extrém funkce $C(x)$:

$$C'(x) = 0 \dots -\frac{1000}{x^2} + 8x = 0,$$

$$8x^3 = 1000,$$

$$x = 5.$$

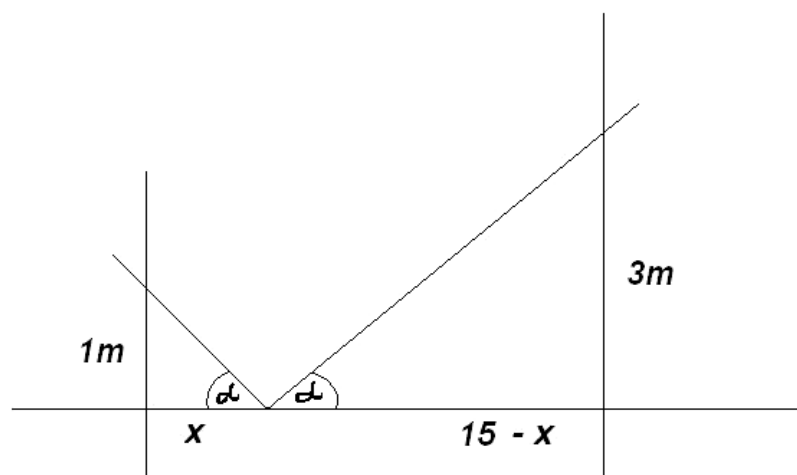
Ověříme přes druhou derivaci, jestli se opravdu jedná o lokální minimum:

$$C''(x) = \frac{2000}{x^3} + 8 = 24 > 0 - \text{lokální minimum.}$$

ZÁVĚR: Rozměry silážní jámy, aby stavba byla co nejlevnější, jsou $20 \text{ m} \times 5 \text{ m} \times 2 \text{ m}$.

6.4 Problém líného kosa

ZADÁNÍ: Na plotě, jehož výška je 1 m, sedí kos. Ve vzdálenosti 15 m od plotu roste strom, který má větev ve výšce 3 m. Na zemi mezi plotem a stromem jsou hustě rozesety žížaly. V jaké vzdálenosti od plotu má kos sezobnout žížalu, aby proletěl trasu plot – žížala – větev po přímkách a po nejkratší dráze? [20]



ŘEŠENÍ: $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{(15-x)^2 + 9}$

Hledáme první derivaci:

$$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} + \frac{2x - 30}{2\sqrt{(15-x)^2 + 9}}$$

Hledáme stacionární body
funkce $f(x)$:

$$f'(x) = 0 \quad \dots \quad \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} = \frac{15-x}{\sqrt{(15-x)^2 + 9}} = \sin \alpha$$

Z podobnosti trojúhelníků platí:

$$\begin{aligned} \frac{x}{1} &= \frac{15-x}{3}, \\ 3x &= 15-x, \\ 4x &= 15, \\ x &= 3,75 \text{ m.} \end{aligned}$$

ZÁVĚR: Aby kos sezobnul žížalu a přitom se nejmén „nadřel“ (tzn. uletěl, co nejkratší dráhu), musí ji sezobnout 3,75 m od plotu.

6.5 Problém lomu světla

ZADÁNÍ: Podle Fermatova principu se světlo šíří z bodu A do bodu B po takové dráze, aby doba šíření byla minimální. Bod A leží v prostředí, v němž je rychlost světla c_1 , bod B v prostředí, v němž je rychlost světla c_2 . Určete dráhu paprsku z bodu A do bodu B.

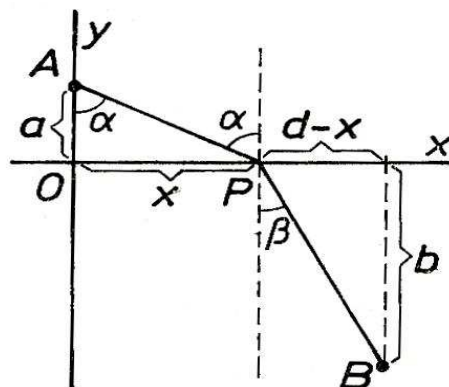
ŘEŠENÍ:

Doba, za kterou urazí světelný paprsek dráhu

$$|AP| = \sqrt{a^2 + x^2} \text{ je } t_1 = \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{c_1}.$$

Doba, za kterou urazí světelný paprsek dráhu

$$|PB| = \sqrt{(d-x)^2 + b^2} \text{ je } t_2 = \frac{\sqrt{(d-x)^2 + b^2}}{c_2}.$$



Celková doba (závislá na poloze bodu P) je $t = t_1 + t_2$, po dosazení dostáváme funkci:

$$t(x) = \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{c_1} + \frac{\sqrt{(d-x)^2 + b^2}}{c_2}.$$

Hledáme lokální minimum funkce $t(x)$:

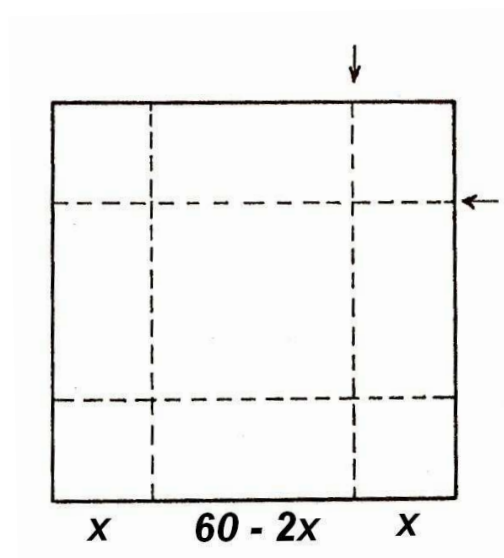
$$t'(x) = 0 \dots \frac{x}{c_1 \sqrt{a^2 + x^2}} - \frac{d-x}{c_2 \sqrt{(d-x)^2 + b^2}} = 0.$$

$$\text{Platí } \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \sin \alpha \text{ a } \frac{d-x}{\sqrt{(d-x)^2 + b^2}} = \sin \beta: \quad \frac{\sin \alpha}{c_1} - \frac{\sin \beta}{c_2} = 0.$$

ZÁVĚR: Vztah $\frac{\sin \alpha}{c_1} = \frac{\sin \beta}{c_2}$ je známý *Snellův zákon lomu světla*. [11]

6.6 Problém vnuka

ZADÁNÍ: Předpokládejme, že jste šikovný dědeček. Váš vnuk za vámi přijde s následujícím úkolem. Chtěl by ze čtvercového kusu tuhého papíru o rozměru 60 cm udělat krabici bez víka s co možná největším objemem. Vaším úkolem je tedy zjistit, jak moc je nutno plech nastříhnout, aby z něj vytvořená krabice měla největší možný objem.



ŘEŠENÍ: Pro objem krabice platí: $V = (60 - 2x)^2 \cdot x$.

Hledáme první derivaci funkce $V(x)$: $V'(x) = 2 \cdot (60 - 2x) \cdot (-2x) + (60 - 2x)^2$,
 $V'(x) = (60 - 2x) \cdot (60 - 6x)$.

Hledáme lokální extrém funkce $V(x)$:

$$V' = 0 \dots 0 = (60 - 2x) \cdot (60 - 6x),$$
$$x = 30 \vee x = 10.$$

Ověříme přes druhou derivaci, jestli se opravdu jedná o lokální maximum:

$$V'' = (-2) \cdot (60 - 6x) + (60 - 2x) \cdot (-6x),$$
$$V''(10) = -20 < 0 - \text{lokální maximum},$$
$$V''(30) = 240 > 0 - \text{není lokální maximum}.$$

ZÁVĚR: Je třeba nastříhnout 10 cm, aby krabice měla největší možný objem. V našem konkrétním příkladě $V(10) = 16000 \text{ cm}^3$. [12]

6.7 Problém středověkého stavitele

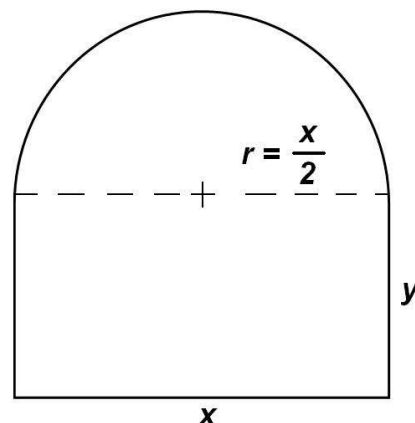
ZADÁNÍ: Představte si, že si vás pozve známý středověký stavitel, který potřebuje poradit s tímto problémem: Má železný pás o délce 200 palců a chtěl by z něj udělat rám románského okna. Jakou má zvolit šířku okna, aby do chrámu procházelo, co nejvíce světla (resp. aby okno mělo co největší plochu)? [20]

ŘEŠENÍ:

Pro obvod rámu románského okna platí:

$$o = \pi \cdot r + x + 2y,$$

$$200 = \pi \frac{x}{2} + x + 2y \quad \Rightarrow \quad y = 100 - \frac{2x + x \cdot \pi}{4}.$$



Pro obsah románského okna platí:

$$S = \frac{\pi \cdot r^2}{2} + x \cdot y \quad \Rightarrow \quad S(x) = \frac{\pi \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^2}{2} + 100x - \frac{2x^2 + x^2 \pi}{4} = \frac{\pi \cdot x^2}{8} + 100x - \frac{x^2(2 + \pi)}{4}.$$

Hledáme první derivaci funkce $S(x)$: $S'(x) = \frac{\pi \cdot x}{4} + 100 - \frac{2 + \pi}{2}x,$

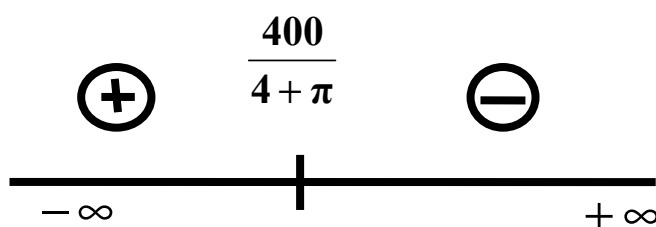
$$S'(x) = 0 \quad \dots \quad \frac{2 + \pi}{2}x = \frac{\pi \cdot x}{4} + 100 \Rightarrow (4 + 2\pi) \cdot x = \pi \cdot x + 400,$$

Hledáme stacionární body:

$$x = \frac{400}{4 + \pi}.$$

Jelikož na intervalu $\left(-\infty, \frac{400}{4 + \pi}\right)$ je funkce $S'(x)$ rostoucí a na intervalu $\left(\frac{400}{4 + \pi}, \infty\right)$

je $S'(x)$ klesající, má funkce $S(x)$ v hodnotě $\frac{400}{4 + \pi}$ své *maximum*.



ZÁVĚR: Aby do chrámu procházelo, co nejvíce světla musí být šířka románského okna

$$\frac{400}{4 + \pi} \sim 56 \text{ palců (1 palec je cca 2,5 cm) = 140 cm.}$$

6.8 Problém náruživého kafaře

ZADÁNÍ: Jako milovník kávy máte následující problém. Máte papír na kávový filtr kruhového tvaru o poloměru 10 cm, vystřihnoutím kruhové výseče o úhlu φ vznikne kávový filtr. Jak zvolíte úhel φ , aby se do něj vešlo co nejvíce kávy? Kolik si budete moci [cm³] maximálně přefiltrovat kávy? [20]

ŘEŠENÍ: Pro objem kávového filtru platí:

$$V = \frac{1}{3}\pi \cdot R^2 v = \frac{1}{3}\pi \cdot R^2 (r^2 - R^2)$$

Z obrázku I, II plyne

$$o = 2\pi \cdot R, \quad o = r\varphi.$$

Tedy platí

$$R = \frac{r\varphi}{2\pi}$$

Po dosazení a úpravě dostaneme funkci jedné proměnné φ :

$$V(\varphi) = \frac{r^3 \varphi^2}{24\pi^2} \sqrt{4\pi^2 - \varphi^2}$$

Hledáme první derivaci funkce $V(\varphi)$: $V'(\varphi) = \frac{r^3 \varphi (8\pi^2 - 3\varphi^2)}{24\pi^2 \sqrt{4\pi^2 - \varphi^2}}$

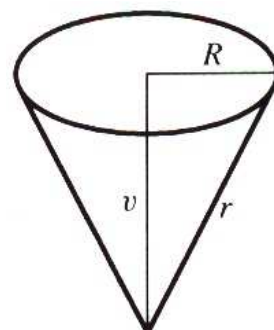
Hledáme stacionární body: $V'(\varphi) = 0 \dots \frac{r^3 \varphi (8\pi^2 - 3\varphi^2)}{24\pi^2 \sqrt{4\pi^2 - \varphi^2}} = 0$

$$\varphi(8\pi^2 - 3\varphi^2) = 0$$

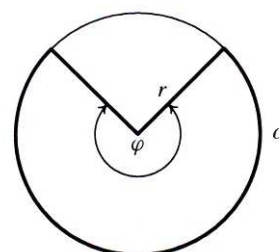
$$\varphi_1 = 0 \vee \varphi_2 = \pi\sqrt{\frac{8}{3}} \vee \varphi_3 = -\pi\sqrt{\frac{8}{3}}$$

Kořeny φ_1, φ_3 nemají praktický význam. Druhý kořen φ_2 , dosazený do druhé derivace funkce $V(\varphi)$ dá hodnotu zápornou, nastává tedy lokální extrém.

ZÁVĚR: Když vystřihneme kruhovou výseč o úhlu $\varphi = \pi\sqrt{\frac{8}{3}}$, vlezte se nám do vzniklého kávového filtru nejvíce kávy. Poloměru $r = 10$ cm papíru kávového filtru odpovídá maximálnímu $V = 403$ cm³ kávy.



I.



II.

6.9 Problém gondoliéra

ZADÁNÍ: Představte si, že jste v Benátkách a řídíte gondolu plnou turistů. Náhle před sebou vidíte ostrou pravoúhlou zatáčku. Předpokládejme, že se nacházíte v kanálu šířky a a druhý kanál má šířku b . Najděte nejdelší možnou tyč, kterou se můžete dostat z jednoho kanálu do druhého.

ŘEŠENÍ: Pro délku tyče, kterou je ještě možno splavit se z jednoho kanálu do druhého, platí:

$$l = l_1 + l_2 = \sqrt{x^2 + a^2} + \sqrt{b^2 + y^2},$$

současně platí z podobnosti trojúhelníků, že $\frac{y}{b} = \frac{a}{x}$,

$$\text{odtud } y = \frac{ab}{x}.$$

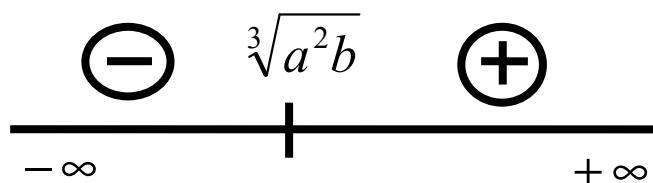
Takže dostaneme

$$l(x) = \sqrt{x^2 + a^2} + \sqrt{b^2 + \frac{a^2 b^2}{x^2}} + \sqrt{x^2 + a^2} + \frac{b}{x} \sqrt{x^2 + a^2} = \sqrt{x^2 + a^2} \cdot \left(1 + \frac{b}{x}\right).$$

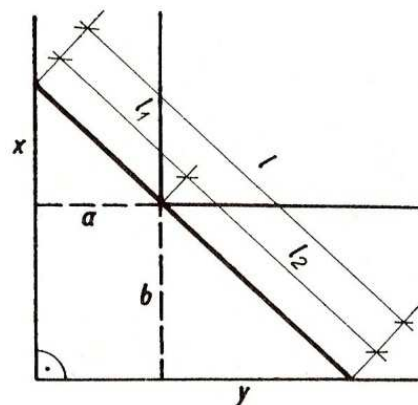
To znamená, že největší délka tyče nesmí být větší než minimum funkce $l(x)$.

$$l'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + a^2}} \cdot \left(1 + \frac{b}{x}\right) + \sqrt{x^2 + a^2} \cdot \left(-\frac{b}{x^2}\right) = \frac{x + b - b - \frac{a^2 b}{x^2}}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \frac{\frac{x^3 - a^2 b}{x^2}}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \frac{x^3 - a^2 b}{x^2 \sqrt{x^2 + a^2}}.$$

Položíme – li $l'(x) = 0$, dostaneme $x^3 - a^2 b = 0$, odkud $x_0 = \sqrt[3]{a^2 b}$.



Jelikož na intervalu $(-\infty, \sqrt[3]{a^2 b})$ je funkce $l'(x)$ klesající a na intervalu $(\sqrt[3]{a^2 b}, \infty)$ je $l'(x)$ rostoucí, má funkce $l(x)$ v hodnotě $\sqrt[3]{a^2 b}$ své *minimum*.



Pro největší délku l tyče tedy dostaneme:

$$l = \sqrt{\left(\sqrt[3]{a^2b}\right)^2 + a^2} \cdot \left(1 + \frac{b}{\sqrt[3]{a^2b}}\right) = \sqrt{a^{\frac{4}{3}} \cdot b^{\frac{2}{3}} + a^2} \cdot \left(1 + \frac{b}{a^{\frac{2}{3}} \cdot b^{\frac{1}{3}}}\right) = \left[a^2 \cdot \left(\frac{b^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{2}{3}}} + 1 \right) \right] \cdot \left(1 + \frac{b^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{2}{3}}} \right) =$$

$$a \cdot \left(\frac{a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{2}{3}}} \right)^{\frac{3}{2}} = \frac{a \cdot \left(a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}} \right)^{\frac{3}{2}}}{a} = \left(a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}} \right)^{\frac{3}{2}}$$

ZÁVĚR: Nejdelší tyč, kterou je možno řeku splavit, je $l = \left(a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}} \right)^{\frac{3}{2}}$. [11]

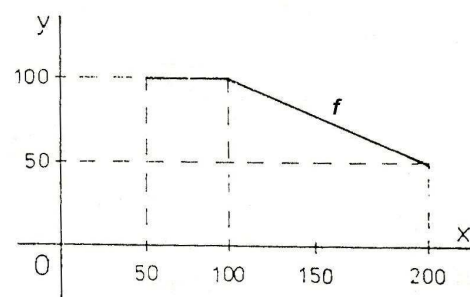
6.10 Problém letecké společnosti

ZADÁNÍ: Cena letenky vyhlídkového letu je 100 €, zúčastní – li se ho 50 – 100 turistů. Za každého pasažéra nad 100 se snižuje jeho cena o 0,5 € každému z nich. Letadlo má 200 míst. Při jakém počtu účastníků bude mít letecká společnost maximální zisk?

ŘEŠENÍ: Funkce f na obrázku znázorňuje závislost ceny letenky y na počtu pasažérů x a lze ji vyjádřit takto (považujeme – li x za spojitou proměnnou):

I. $f: y = 100$ pro $x \in <50, 100>$

II. $f: y = 150 - \frac{1}{2}x$ pro $x \in (100, 200>$



Zavedme funkci zisku $Z(x) = y \cdot x$.

I. Pro $x \in <50, 100>$ bude zřejmě maximální zisk $Z = 100 \cdot 100 = 10.000$ €

II. Pro $x \in (100, 200>$ je $Z(x) = x \cdot (150 - \frac{1}{2}x) = 150x - \frac{1}{2}x^2$.

Pro maximální zisk musíme najít lokální extrém $Z'(x) = 150 - x \dots x = 150$.

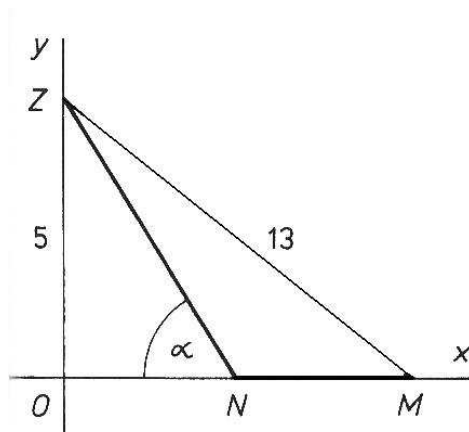
A jelikož $Z''(x) = -1$, pak se opravdu jedná o lokální maximum.

ZÁVĚR: Letecká společnost bude mít maximální zisk 11.250 €, zúčastní – li se vyhlídkového letu 150 pasažérů.

6.11 Problém stavitele silnic

ZADÁNÍ: Průmyslový závod Z je vzdálen 5 km od cesty vedoucí do města M, vzdálenost Z od M je 13 km. Zjistěte, pod jakým úhlem je nutné vybudovat přípojku k cestě, aby doprava materiálu ze Z do M byla co nejlevnější. Přitom předpokládané náklady na přepravu 1 tuny materiálu na 1 km jsou po staré cestě 50 haléřů, po nové cestě třikrát větší.

ŘEŠENÍ:



Z Pythagorovy věty platí: $|OM| = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12$. Předpokládejme, že: $|ON| = x$, zřejmě tedy $|NM| = 12 - x$.

Pro cestu z průmyslového závodu Z do města M platí: $|ZN| + |NM| = \sqrt{x^2 + 25} + (12 - x)$

Pro předpokládané náklady platí funkce: $f(x) = 1,5 \cdot \sqrt{x^2 + 25} + 0,5 \cdot (12 - x)$

Pro minimální náklady musíme nejprve vypočítat derivaci $f(x)$: $f'(x) = \frac{1,5 \cdot 2x}{2\sqrt{x^2 + 25}} - 0,5$

Pro lokální extrém platí: $f'(x) = 0 \quad \dots \quad 0,5 = \frac{1,5 \cdot x}{\sqrt{x^2 + 25}}$

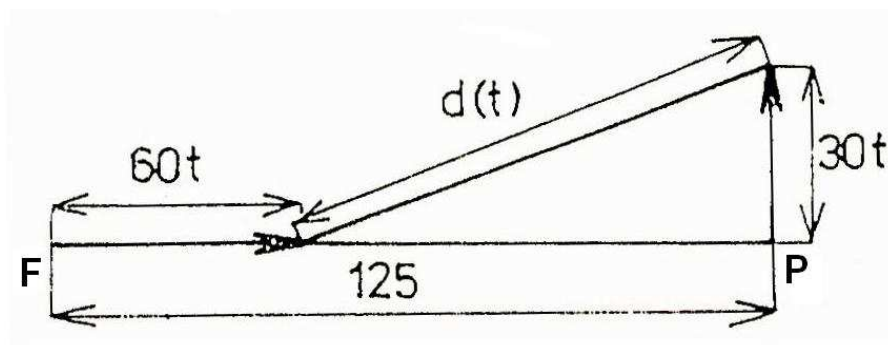
$$\begin{array}{c} \ominus \quad 1,77 \quad \oplus \\ \hline -\infty \quad \quad \quad +\infty \end{array} \quad \begin{array}{l} \sqrt{x^2 + 25} = 3x \\ x^2 + 25 = 9x^2 \\ x = 1,77 \end{array}$$

Jelikož na intervalu $(-\infty; 1,77)$ je funkce $f'(x)$ klesající a na intervalu $(1,77; +\infty)$ je $f'(x)$ rostoucí, má funkce $f(x)$ v hodnotě 1,77 své *minimum*.

ZÁVĚR: Pro úhel α platí: $\operatorname{tg} \alpha = \frac{5}{x}$. Pro $x = 1,77$ je $\alpha \sim 70,5^\circ$.

6.12 Problém dvou radioamatérů

ZADÁNÍ: V 16h jede autem radioamatér Franta rychlostí 60km.h^{-1} ke křižovatce vzdálené 125km na východ a druhý radioamatér Pepa na zmiňované křižovatce jede rychlostí 30km.h^{-1} na sever (rychlosti obou jsou konstantní). Poradíme jim, kdy a kde mají použít své vysílačky v autě, aby měli nejkvalitnější signál hovoru (tzn. kdy budou mít od sebe nejmenší vzdálenost).



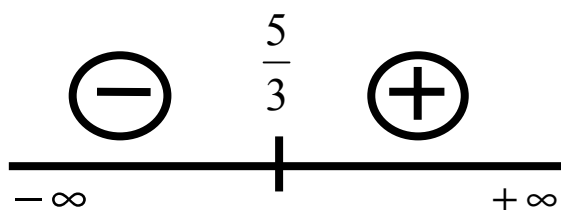
ŘEŠENÍ: Pro vzdálenost $d(t)$ mezi auty v čase t platí: $d(t) = \sqrt{(125 - 60t)^2 + (30t)^2}$.

Uvědomme si, že funkce d bude mít minimum ve stejném bodě jako funkce f :

$f(t) = d(t)^2 = (125 - 60t)^2 + 900t^2$. Tahle úvaha nám příklad značně zjednoduší.

$$f'(t) = 2 \cdot (125 - 60t) \cdot (-60) + 1800t = 120 \cdot (75t - 125)$$

$$f'(t) = 0 \quad \dots \quad 120 \cdot (75t - 125) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t = \frac{125}{75} = \frac{5}{3}$$



Jelikož na intervalu $(-\infty; \frac{5}{3})$ je funkce $f'(x)$ klesající a na intervalu $(\frac{5}{3}; +\infty)$ je $f'(x)$

rostoucí. Z toho se dá vysuzovat, že v hodnotě 1,77 má funkce $f(x)$ své *minimum*.

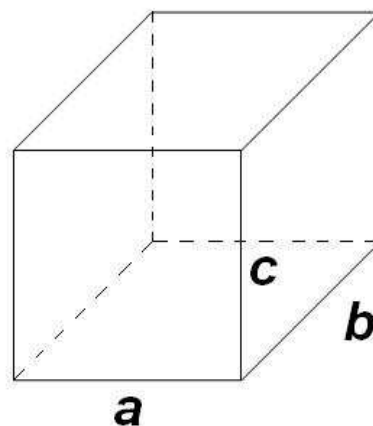
ZÁVĚR: Radioamatérům bychom měli poradit, aby si volali v 17,40 h, kdy bude jejich nejbližší možná vzdálenost přibližně 56 km a signál bude tedy nejkvalitnější.

6.13 Problém svářeče

ZADÁNÍ: Ze 4m dlouhého železa má svářeč svařit kostru akvária, jehož hrany dna mají být v poměru 2 : 3. Jaké rozměry má mít tedy kostra, aby se do akvária vešlo co nejvíce vody?

ŘEŠENÍ: Objem akvária $V = a \cdot b \cdot c$

Předpoklad - $a : b = 2 : 3 \Rightarrow b = \frac{3}{2}a$



Pro obvod kostry akvária platí: $o = 4a + 4b + 4c$

$$4 = 4a + 6a + 4c \Rightarrow c = 1 - \frac{5}{2}a$$

Funkce objemu: $V(a) = a \cdot \frac{3}{2}a \cdot (1 - \frac{5}{2}a) = \frac{3}{2}a^2 - \frac{15}{4}a^3 = \frac{a^2}{4}(6 - 15a)$

$$V'(a) = 3a - \frac{45}{4}a^2 = a(3 - \frac{45}{4}a)$$

$$V'(a) = 0 \quad \dots \quad a(3 - \frac{45}{4}a) = 0 \Leftrightarrow a = \frac{4}{15}$$

$$V''(a) = 3 - \frac{45}{2}a, \quad V''(\frac{4}{15}) = -3 < 0 \quad - \text{lokální maximum.}$$

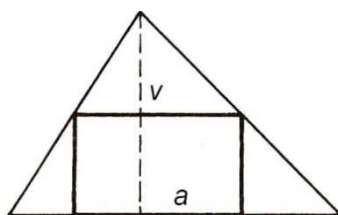
ZÁVĚR: Kostra akvária musí mít rozměry $a = \frac{4}{15}$ m, $b = \frac{2}{15}$ m, $c = \frac{1}{3}$ m a vejde se do něho přibližně 35, 55 l vody.

7. NEŘEŠENÉ SLOVNÍ ÚLOHY NA PROCVIČENÍ

7.1 Neřešené slovní úlohy s uvedenými výsledky

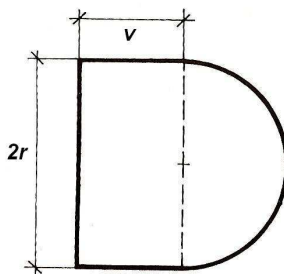
1. Z desky tvaru trojúhelníku, jehož základna je a , výška k základně je v , má být vyříznuta obdélníková deska maximálního obsahu, přičemž jedna strana obdélníku je částí základny. Určete rozměry obdélníku.

$$[x=a/2, y=v/2]$$



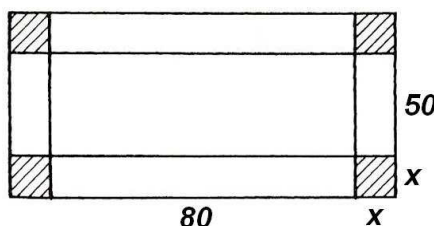
2. Půdorys divadelního jeviště je sjednocením obdélníku a půlkruhu. Obvod půdorysu je 40 m. Určete rozměry půdorysu, víte-li, že byly stanoveny tak, aby obsah půdorysu jeviště byl co největší.

$$[v=r=5,6 \text{ m}]$$



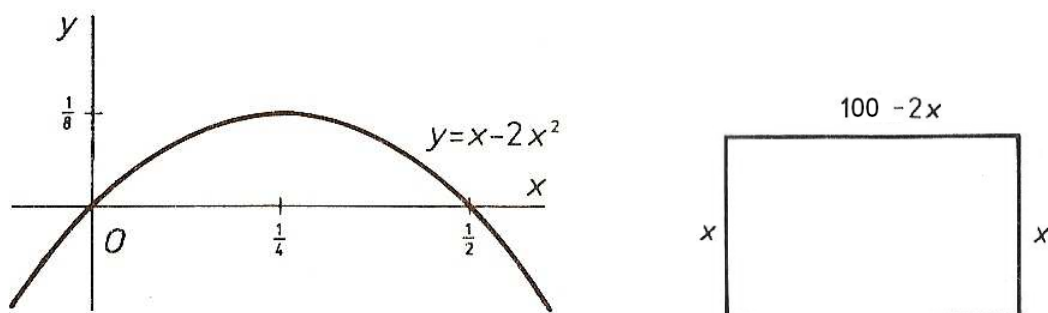
3. Z obdélníkového plechu o velikosti 80 cm x 50 cm se má po odstranění stejně velkých čtverců v rozích plechu vyrobit krabice bez víka. Jak velké čtverce je třeba odstříhnout, aby vzniklá krabice měla maximální objem, a jak velký bude tento objem?

$$[x = 10 \text{ cm}]$$



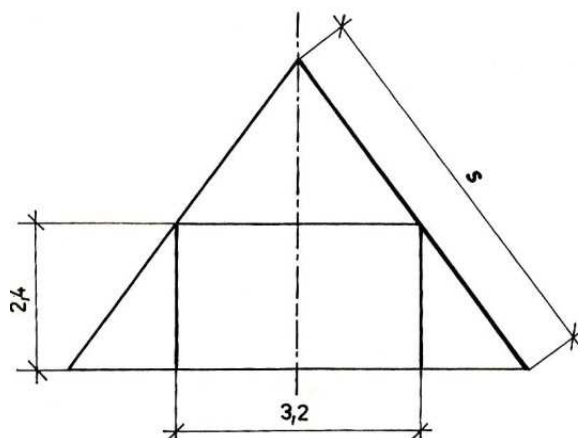
4. Určete rozměry obdélníkového dvora s co největším obsahem, máme – li k oplocení 100 m pletiva a jednu stranu dvora tvoří stěna budovy.

$$[x = 25 \text{ m}]$$



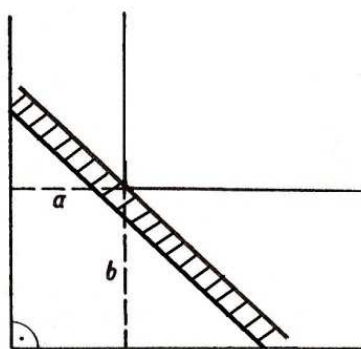
5. Na obrázku je průřez podkrovní střechy chaty, kde je šířka místnosti 3,2 m a výška místnosti 2,4 m. Určete nejkratší možnou délku střechy.

$$[s = 5,6 \text{ m}]$$



6. Dvě chodby široké 1,6 m a 2,4 m se protínají pod pravým úhlem. Jaký nejdelší žebřík lze ve vodorovné poloze přenést z jedné chodby do druhé?

$$[v = 5,6 \text{ m}]$$



7. Dvě letadla letí ve stejné výšce po přímých tratích svírajících úhel ϕ s konstantními rychlostmi u, v . Určete nejmenší vzdálenost, na kterou se přiblíží, jestliže jsou nyní od průsečíku tras ve vzdálenosti a, b .

$$[|av \pm bu| \sin(\phi)(u^2 + v^2 - 2uv \cos(\phi))^{1/2}]$$

8. Výkon odebíraný z baterie s elektromotorickým napětím U_e a vnitřním odporem R_i je $P = U_e I - I^2 R_i$. Při jakém proudu bude výkon odebíraný z baterie největší?

$$[I = \frac{E}{2R_i}]$$

9. Ve spotřebiči o odporu X se za čas t proudem I uvolní teplo $Q = kXI^2t$. Při jakém odporu X se uvolní ve spotřebiči maximální množství tepla, je-li do vedení zapojen rezistor o odporu R a zdroj má napětí U ? (Návod: Užijte vztah $I = U/(R+X)$)

$$[X = R]$$

10. Proud procházející sekundární cívkou transformátoru je $I = \frac{U\omega L}{R_1 R_2 + \omega^2 L^2}$, kde $\omega = 2\pi f$ a R_1, R_2 jsou odpory cívek a L je vzájemná indukčnost. Při jakém L bude I maximální?

$$[L = \frac{\sqrt{R_1 R_2}}{\omega}]$$

11. Celkové náklady na stavbu elektrického vedení průřezu S jsou $y = k_1 S + \frac{k_2}{S}$, kde k_1, k_2 jsou kladné konstanty. Zjistěte, jaký musí být průřez S , aby byly tyto náklady minimální.

$$[S = \sqrt{\frac{k_2}{k_1}}]$$

12. Objem vody závisí na teplotě t podle vztahu $V(t) = V_0 [1 + 8,38 \cdot 10^{-6} (t - 4)^2]$, kde t je teplota ve stupních Celsia. Při jaké teplotě bude objem daného množství minimální?

$$[t = 4^\circ\text{C}]$$

13. Vlak vyjíždí ze stanice, přičemž jeho pohyb je popsán funkcí s danou předpisem: $s(t) = at^2 + bt + c$, kde s je dráha v kilometrech, t čas v hodinách. Po uplynutí jedné minuty dosáhne vlak rychlosti 60 km/h. Jakou dráhu ujede vlak, než dosáhne tuto rychlost?

[500 m]

14. Po moři plují rovnoměrně přímočaře dvě lodi, první z nich rychlostí 30 km/h, druhá rychlostí 50 km/h. Jejich dráhy se kříží pod pravým úhlem. V okamžiku $t = 0$ h, kdy první loď je v průsečíku drah, chybí druhé lodi k tomuto místu ještě 20 km. Najděte funkci, která vyjadřuje závislost okamžité rychlosti v , již se mění vzájemná vzdálenost obou lodí, na čase t . Vypočtete nejmenší vzdálenost d lodí.

$$\left[v(t) = \frac{340t - 100}{\sqrt{34t^2 - 20t + 4}}, d = 10, 29 \right]$$

15. Při jakém sklonu břehu má řeka průtokovou plochu o největším obsahu za předpokladu, že její profil je rovnoramenný lichoběžník, jehož ramena se rovnají menší (tj. dolní) základně?

[60°]

7.2 Neřešené slovní úlohy bez uvedených výsledků

1. Drát, jehož délka je a cm, rozdělte na dvě části tak, aby součet obsahů kruhu a čtverce, jejichž obvody jsou vymodelovány z těchto dvou částí drátu, byl co nejmenší.
2. Válcové nádoby s objemem 20 litrů se budou vyrábět z dvojího plechu. Na obě podstavy válce se spotřebuje materiál dvakrát dražší než na jeho plášť. Jak se má zvolit poměr výšky h válce a poloměru r jeho podstav, aby cena celé nádoby byla co nejmenší? Stojí-li 1 m^2 materiálu 360 Kč, kolik bude stát materiál na celou nádobu?
3. Máte navrhnout válcovou plechovku, aby se do ní vešlo přesně 250 ml vody a přitom, aby se na ní spotřebovalo co nejméně materiálu (resp. aby plechovka měla co nejmenší povrch).
4. Jaké mají být rozměry pravoúhlého bazénu se čtvercovým dnem a objemem 108 m^3 , má-li se při vydláždění dna plus stěn spotřebovat co nejméně dlaždiček?
5. Nedaleko místa A vede železniční trať (mající tvar přímky) do místa B. Pod jakým úhlem k železniční trati je třeba z místa A vybudovat (přímou) silniční přípojku, aby doprava z místa A do místa B (po silnici a dále po železnici) byla co nejlevnější, jestliže doprava po silnici je dvakrát dražší než po železnici?
6. Z města B vyjíždí po přímočaré železniční trati do města A vzdáleného 100 km rychlostí 120 km/h rychlík. Ve stejném okamžiku vyjíždí z města A po přímé silnici do města C vzdáleného 200 km rychlostí 90 km/h automobil. Velikost úhlu BAC je 30° . Za jak dlouho bude vzdálenost rychlíku od automobilu nejmenší (a čemu se bude rovnat)?
7. Dvě auta se pohybují po přímých navzájem kolmých drahách stálou rychlostí $v = 25 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ směrem ke křižovatce. V čase $t_0 = 0 \text{ s}$ je jedno auto vzdáleno od křižovatky 100 m, druhé 200 m.
 - a) Určete čas t , ve kterém bude vzdálenost aut nejmenší.
 - b) Určete minimální vzdálenost aut.

8. Z břevna kruhového průřezu s průměrem $d = 40$ cm máme vytesat trám, který bude mít průřez ve tvaru obdélníku se stranami z a v („základnou“ a „výškou“). Jak máme volit z a v , aby měl trám maximální nosnost, víme-li, že jeho nosnost je přímo úměrná první mocnině základny z a druhé mocnině výšky v ?
9. Žebřík délky x je opřený o svislou stěnu. Dolní konec žebříku se posouvá od stěny konstantní rychlostí v_1 . Určete okamžitou rychlost v_2 , jíž se posouvá horní konec žebříku, v čase, kdy vzdálenost jeho dolního konce od stěny je y .
10. Dráha hmotného bodu je popsána vztahem $s = k_1(1 - e^{-k_2 t})$, kde $k_1, k_2 > 0$ jsou reálné konstanty, t je čas [s], s je dráha [m]. Určete vztah pro okamžitou rychlost hmotného bodu a její hodnotu pro $t = 0$. Jaký pohyb koná hmotný bod? (Doložte výpočtem zrychlení.)
11. Určete délku jednozvrtné páky tak, aby ke zdvižení břemene tíhy G_1 (umístěného ve vzdálenosti a od podpěry) bylo třeba nejmenší síly. Lineární hustota materiálu páky je γ . Úlohu řešte obecně, potom pro $G_1 = 1000$ N, $a = 0,64$ m, $\gamma = 8$ kg/m.
12. V nádobě je voda s hladinou ve výšce h . Jak vysoko nad dnem je třeba udělat otvor ve stěně, aby voda stříkala co nejdále?
13. Silnice široká b metrů je osvětlována lampou, která je nad osou silnice. V jaké výšce x nad silnicí musí být lampa, aby okraj silnice byl co nejvíce osvětlen?
14. Uprostřed nad kruhovou deskou stolu poloměru $R = 1$ m je světelný zdroj. Vypočítejte, do jaké výšky je třeba světelný zdroj posunout, aby intenzita osvětlení okraje stolu byla největší.
15. Najdete nejrychlejší cestu ke zraněnému v lese, když po silnici běžíme rychlostí 5 km/h, v lese 4 km/h. Vzdálenost zraněného od silnice je 3 km (tj. od paty P kolmice spuštěné z místa zranění na silnici) a vzdálenost místa výběhu V a bodu P je 15 km.

ZÁVĚR

Matematika (jako i jiné vědní obory) je v neustálém vývoji. Dílčím cílem této diplomové práce bylo ukázat stručný historický vývoj diferenciálního počtu – od starověku až po současnost. Mé smělé přání je, aby učitelé při výuce matematiky více zařazovali do osnov tyto historické aspekty a souvislosti.

Diferenciální počet se opírá o mnoho abstraktních pojmů, které jsou pro studenty středních škol často při běžném výkladu těžko pochopitelné. Proto jsem se dále ve své diplomové práci snažil nalézt vhodné motivační i konkrétní příklady, které by tyto základní pojmy (limita, derivace aj.) patřičně vysvětlily a studenti by jim porozuměli.

Na základě osvojení základních pojmů diferenciálního počtu je jedním z hlavních požadavků současné reformy školství zavádění problémových a aplikačních úloh ve vyučování. Proto jsem si jako hlavní cíl této diplomové práce vytyčil úkol, sestavit soubor aplikačních úloh, který by mohl být dále využit při výuce na střední škole. Současně jsem chtěl ukázat i jednoduché problémové úlohy řešené užitím diferenciálního počtu, se kterými se mohou studenti setkat v běžném životě.

Tím bych rád napomohl k odstranění alespoň malé části z nedostatků školského matematického vzdělávání, kde nejzávažnější problémy spatřuji v(e):

- nedostatečné pozornosti věnované historickým aspektům;
- absenci myšlenek, které jsou nahrazeny procedurami;
- nedostatku motivace u nových pojmů;
- výhradní pozornosti věnované formální správnosti, nedostatku pozornosti pro porozumění;
- velmi slabé vazbě k ostatním předmětům vyučovaných na škole;
- nedostatečném použití hravých aspektů matematiky;
- nedostatečném využívání moderních technologií;
- nedostatečné pozornosti věnované matematickému způsobu myšlení a jeho významu v každodenním životě.

Rád bych, aby tato diplomová práce byla ku prospěchu všem těm, kteří se budou snažit výše zmiňované nedostatky školského matematického vzdělání odstranit.

RESUMÉ

Jedním z požadavků dnešní reformy školství je zavádění problémových a aplikačních úloh ve vyučování a proto hlavním cílem této diplomové práce bylo sestavit sbírku problémových úloh, která by mohla být dále využita při výuce na střední škole. Současně jsem chtěl ukázat i jednoduché aplikace diferenciálního počtu, se kterými je možné se setkat v běžném životě.

SUMMARY

One of the aims of the contemporary reform of school system is to introduce the problem tasks and application problems into the educational process, so the main goal of my diploma thesis was to create a collection of word problems that could serve as a useful material at math education at secondary schools. The other goal was to describe some basic applications of differential calculus in everyday life.

POUŽITÁ LITERATURA

- [1] BEČVÁŘ, J., FUCHS, E. *Historie matematiky I*, Brno: JČMF, 1994. 241 s.
- [2] DEVLIN, K. *Jazyk matematiky*, Praha: Argo, 2002. 343 s. ISBN: 80 – 86569 – 09 – 8.
- [3] JUŠKEVIČ, A. P. *Dějiny matematiky ve středověku*, Praha: Academia, 1977. 446 s.
- [4] KOLMAN, A. *Dějiny matematiky ve starověku*, Praha: Academia, 1968. 221 s.
- [5] MRÁZEK, J. *Taje matematiky*, Praha: Práce, 1986. 246 s.
- [6] RIEČAN, B. *Matematika pro IV. ročník gymnázií*, SPN, Praha 1987. 357 s.
ISBN 14 – 591 – 87.
- [7] RIEČAN, B. *Úvod do diferenciálního a integrálního počtu*, Praha: SPN, 1986.
ISBN 80 – 04 – 24885 – 3.
- [8] SCHWABIK, Š., ŠARMANOVÁ, P. *Malý průvodce historií integrálu*, Praha:
Prometheus, 1996. 95 s. ISBN 80 – 7196 – 038 – 1.
- [9] VACEK, A. *Zopakujme si matematiku*. Praha: ROH, 1959. 135 s.
- [10] ZNÁM, Š. *Pohl'ad do dejín matematiky*, Bratislava: Alfa, 1986. 240 s.
ISBN 63 – 572 – 86.
- [11] BUŠEK, I. *Řešené maturitní úlohy z matematiky*, Praha: SPN, 1985. 532 s.
ISBN 14 – 63 – 85.
- [12] PEŠKOVÁ, E. MULAČOVÁ, J. *Přehled středoškolského učiva Matematika*,
Praha: Orfeus, 1992. 407 s. ISBN 80 – 85522 – 19 – 5.
- [13] KRIEGLSTEIN, E., et al. *Sbírka úloh z matematiky*. Praha: SPN, 1965. 448 s.
ISBN 14 – 137 – 73.
- [14] REKTORYS, K. *Co je a k čemu je vyšší matematika*. Praha: Academia, 2001. 156 s.
ISBN 80 – 200 – 0883 – 7.
- [15] MAŘÍK, R. *Matematika (nejen) pro krajináře a nábytkáře* [online]. 2006 [cit. 2008-
-03-25]. Dostupný z WWW: <www.mendelu.cz/user/marik>.

- [16] KOBZA, J. *Diferenciální počet* [online]. 2005 [cit. 2008-02-25].
Dostupný z WWW : <http://www.inf.upol.cz/staff/kobza_teaching.html>.
- [17] KUBEN, J., ŠARMANOVÁ, P. *Diferenciální počet funkcí jedné proměnné* [online]. 2006 [cit. 2008-01-15].
Dostupný z WWW: <<http://www.am.vsb.cz/sarmanova/cd/index.htm>>.
- [18] MAŘÍK, R. *Aplikace matematiky* [online]. 2006 [cit. 2008-01-15].
Dostupný z WWW: <<http://old.mendelu.cz/~marik/aplikace/aplikace.html>>.
- [19] HRUBÝ, D. KUBÁT, J. *Matematika pro gymnázia : Diferenciální a integrální počet*. Praha: Prometheus, 1997. 210 s. ISBN 80 – 7196 – 210 – 4.
- [20] MÁLEK, M. *Kapitola Diferenciální počet na R* [online]. 2007 [cit. 2008-03-18].
Dostupný z WWW:
<<http://homepages.math.slu.cz/MichalMalek/vyuka/0607/letni.html>>.