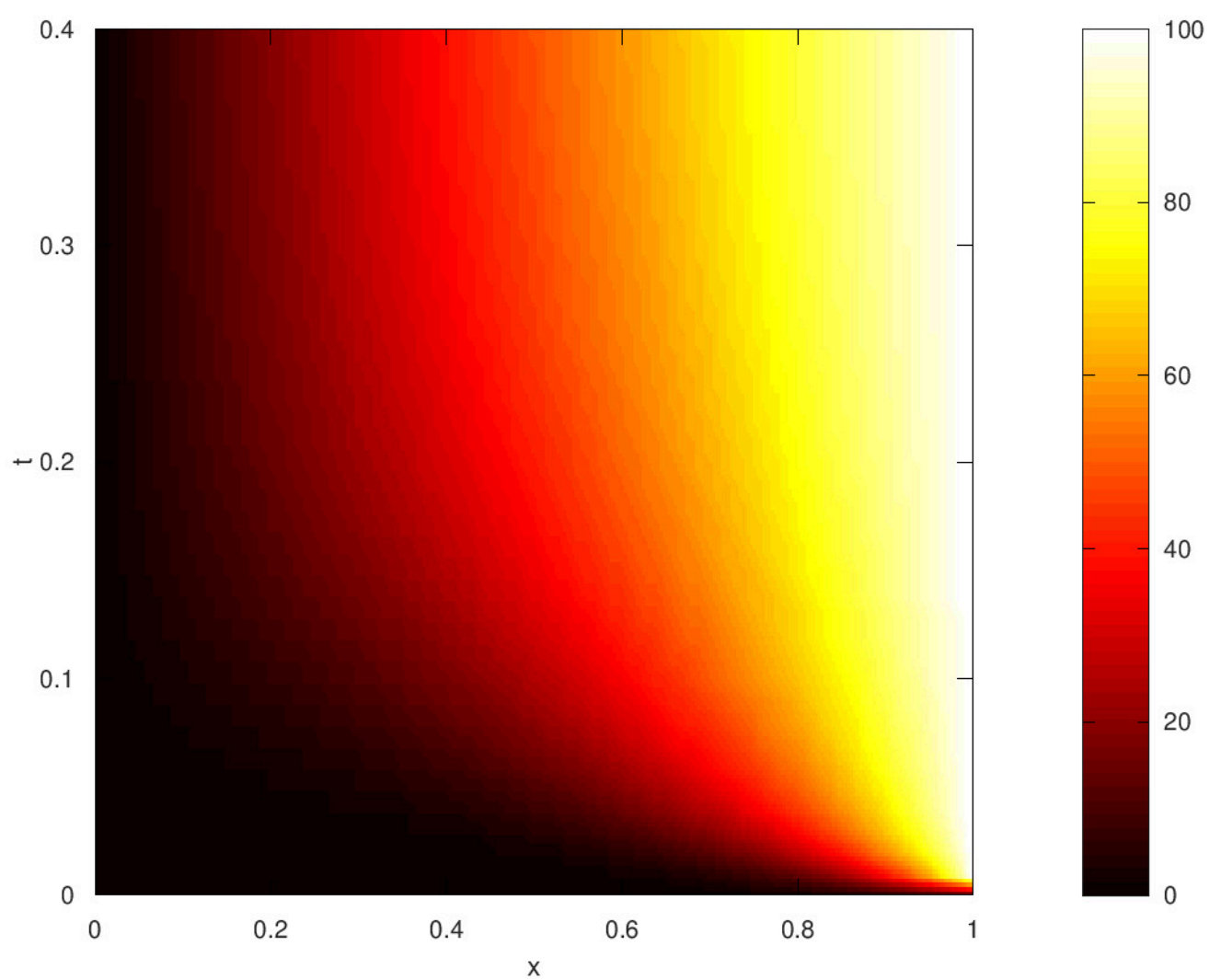


Aplikovaná matematika

Robert Mařík

15. února 2023



Obsah

1	Parciální derivace	4
	Funkce jedné proměnné	4
	Funkce dvou proměnných, graf	6
	Parciální derivace	6
	Interpretace parciální derivace, vedení tepla v 1D	7
	Interpretace parciálních derivací, brzdná dráha	7
	Interpretace parciálních derivací, pohyb ještěrky	8
	Využití parciálních derivací, ochrana želv	8
	Linearita parciální derivace	9
	Rovnice vedení tepla v 1D	9
	Druhá derivace	10
	Numerická aproximace derivací: konečné difference	11
	Vzdálenost a pojmy s ní související	13
	Spojitosť funkce	14
	Schwarzova věta	14
	Z ptací perspektivy	14
2	Gradient	16
	Opakování	16
	Diferenciální operátory	17
	Gradient	17
	Gradient v přírodě	18
	Lineární aproximace	18
	Vícerozměrné konstitutivní zákony	19
	Speciální případy vztahu mezi gradientem a tokem	21
	Tečna k vrstevnici	22
	Implicitně definovaná funkce	22
	Lokální extrémy funkce více proměnných	22
	Tenzor malých deformací	22
	Z ptací perspektivy	23
3	Divergence	24
	Transportní děje	24
	Změna toku vektorového pole	25
	Divergence	25
	Výpočet divergence	26
	Rovnice kontinuity	26
	Rovnice mělké vody	27
	Difuzní rovnice	27
	Vedení tepla	28
	Rovnice vedení tepla ve 2D v různých podmínkách	28
	Voda v porézním materiálu	29
	Rovnice podzemní vody	29
	Laplaceův operátor	30
	Z ptací perspektivy	30

4 Rotace	31
Vektorová pole	31
Příklady vektorových polí v rovině	31
Totální diferenciál	32
Skalární a vektorový součin	32
Rotace	32
Rotace významných polí	33
Zákon šíření chyb (chyba nepřímo měřené veličiny)	33
Zákon šíření chyb (příklad)	33
Z ptací perspektivy	34
5 Křivkový integrál	35
Křivkový integrál	35
Parametrické rovnice křivky	36
Křivkový integrál prvního druhu	36
Křivkový integrál druhého druhu	38
Převod na Riemannův integrál	38
Vlastnosti křivkového integrálu druhého druhu	38
Aplikace křivkového integrálu druhého druhu	39
Shrnutí: vlastnosti křivkových integrálů	39
Závěrečné informace	39
Z ptací perspektivy	40
6 Dvojný integrál	41
Dvojný integrál	41
Linearita a aditivita	42
Výpočet dvojného integrálu	42
Výpočet (obdélníková oblast)	43
Aplikace dvojného integrálu	43
Dvojný integrál v polárních souřadnicích	45
Z ptací perspektivy	47
7 Greenova věta	48
Úvod	48
Věta o nezávislosti integrálu na integrační cestě	48
Greenova věta	49
8 Diferenciální rovnice	52
Modely založené na rychlostech (derivacích)	52
Obyčejná diferenciální rovnice prvního řádu	54
Úvod do problematiky numerického řešení diferenciálních rovnic	55
ODE tvaru $\frac{dy}{dx} = f(x)g(y)$ (rovnice se separovanými proměnnými)	57
Řešení ODE se separovanými proměnnými	57
Redukce parciální diferenciální rovnice na obyčejnou	57
Diferenciální rovnice růstu vodní kapky	59
9 Lineární operátory a lineární diferenciální rovnice	61
Lineární operátory	61
Operátorové rovnice s lineárním operátorem	62
Lineární diferenciální rovnice prvního řádu s konstantními koeficienty	63
Lineární autonomní systémy	64
Mechanický oscilátor	65
10 Autonomní systémy	67
Úmluva	67
Autonomní diferenciální rovnice	67
Autonomní rovnice s pravou stranou ve tvaru rozdílu	69
Autonomní systém $X' = f(X)$	70

Autonomní systém ve dvou dimenzích	71
Základní modely populační ekologie	72
Vícerozměrné autonomní systémy, kompartmentové modely	73
11 Lineární diferenciální rovnice druhého řádu	74
Lineární diferenciální rovnice druhého řádu	74
Příklad - těleso na pružině	74
Řešitelnost LDE druhého řádu	75
Důsledky linearity	75
Důsledky linearity prakticky	75
Homogenní LDE 2. řádu (obecné řešení)	76
Homogenní LDE 2. řádu s konstantními koeficienty	76
Nehomogenní LDE 2. řádu	76
Dirichletova okrajová úloha, vlastní čísla	77
Výpočet vlastních hodnot	77
Kmity struny	78
Vzpěry	78
Neumannova a smíšená okrajová úloha	78
Fourierova metoda separace proměnných	78

Kapitola 1

Parciální derivace

Anotace.

- Naučíme se sledovat rychlost, s jakou se mění veličina, která je objektem našeho zájmu.
- U veličin závislých na několika parametrech budeme schopni sledovat reakci těchto veličin na změny parametrů. Například u teploty můžeme v daném místě sledovat změnu teploty v čase, nebo můžeme v daném čase sledovat změnu teploty s polohou.
- Aparát využijeme k tomu, že z fyzikálních zákonů sestavíme *rovnici vedení tepla*. Rovnice vedení tepla je jednou z nejdůležitějších rovnic matematické fyziky. Jedná se o matematický model umožňující jednak modelování přenosu tepla a jednak kontrolu toho, že fyzikální zákony vedoucí k formulaci této rovnice správně vystihují realitu.

Prerekvizity.

- Navážeme na znalosti z diferenciálního počtu funkcí jedné proměnných. Zejména je nutné si připomenout definici, využití a výpočet derivace.
- Zopakujte si fyzikální (praktický) význam derivace a pro osahání si konkrétních příkladů také základní metody výpočtu.

Funkce jedné proměnné

<https://youtu.be/zhaebxHbqhs>

Základní informace o funkci jedné proměnné a její derivaci si můžete osvěžit v materiálech k předmětu **Matematika**. Následuje neformální připomenutí pojmu derivace.

Zobrazení $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ se nazývá funkce jedné proměnné.

V kartézské soustavě souřadnic pracujeme často s grafem funkce, což je množina uspořádaných dvojic bodů $[x, f(x)]$. Tyto body zpravidla vyplní křivku v rovině. (**Nakreslit online**.)

Jedním ze zásadních úkolů je schopnost měřit růst nebo pokles veličiny a jeho rychlost. Abychom nemuseli rozlišovat nárůst a pokles, pracujeme s jednotným přístupem,

kdy pokles uvažujeme jako záporný nárůst a častěji obojí sjednocujeme pod pojem změna veličiny.

U veličiny závislé na čase změnu veličiny na časovém intervalu určujeme jako rozdíl hodnoty veličiny na konci a na začátku časového intervalu, tj.

$$f(t+h) - f(t)$$

je změna veličiny mezi okamžiky t a $t+h$. Pro porovnání rychlostí změny tuto změnu přepočítáváme na jednotku času a definujeme průměrnou rychlost změny vztahem

$$\frac{f(t+h) - f(t)}{h}.$$

Kladná rychlost znamená nárůst v čase, záporná pokles. Pro nalezení okamžité rychlosti změny bychom potřebovali dosadit $h = 0$, aby byla rychlost počítána na intervalu nulové délky. Toto udělat nemůžeme, protože bychom dostali nedefinovaný výraz, můžeme to však obejít pomocí limity a najít okamžitou rychlost jako limitu

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h}.$$

Tato limita se nazývá *derivace* a udává, jak rychle se mění funkce f v čase v okamžiku t . Protože kladná změna odpovídá nárůstu, interpretujeme derivaci často i jako rychlost změny funkce i jako rychlost růstu funkce. Protože rychlost je změna za jednotku času, můžeme derivaci ekvivalentně interpretovat jako nárůst za jednotku času nebo změnu za jednotku času.

V některých přírodních zákonech potřebujeme pracovat s rychlostí poklesu funkce nebo s poklesem za jednotku času. Tento pokles vyjadřuje záporně vzatá derivace, tj. derivace vynásobená faktorem (-1) .

U veličiny závislé na poloze postupujeme analogicky, ale rychlostí změny rozumíme změnu na jednotce délky, tj. pro interval délky h a polohu vyjádřenou souřadnicí x je okamžitá rychlost růstu dána vztahem

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Výše uvedený koncept je možné použít i pro libovolnou jinou nezávislou proměnnou, než je čas nebo poloha. Je-li

f funkce proměnné x , definujeme derivaci $f'(x)$ funkce f v bodě x vztahem

$$f'(x) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Podle kontextu a oborových zvyklostí zapisujeme derivaci pomocí čárky (někdy tečky) nebo jako podíl diferenciálů.

$$y', \quad \frac{dy}{dx}, \quad \frac{d}{dx}y$$

Derivace derivace je rychlost s jakou se mění rychlost změny a nazývá se druhá derivace. Je označována nejčastěji některým z následujících způsobů.

$$y'', \quad \frac{d^2y}{dx^2}, \quad \frac{d^2}{dx^2}y.$$

Poznámka (Newtonův zákon tepelné výměny).

WHY CARIBOU DON'T NEED LEG WARMERS

When the temperatures plunge, we quickly get frostbite on our fingers without thick mittens. So how do animals like caribou manage the cold? Their long, narrow legs don't have much in the way of insulation.

The answer is **countercurrent heat exchange**. Blood vessels entering and returning from extremities exchange heat, retaining precious body heat in the animal's core.

This lets blood flow freely through the limbs, keeping tissues healthy, without losing much body heat.



Obrázek 1.1: Sobi karibu v polárních krajích nepotřebují sněhule a přesto jim není zima. Jak to dělají? Minimalizují teplotní rozdíl mezi svým krevním oběhem a povrchem, po němž chodí. Mají v nohách zabudovaný protiproudý tepelný výměník. Tím minimalizují teplotní ztráty. Podle <https://twitter.com/fuseknowledge/status/1215796937657479168>

Je-li $T(t)$ teplota tělesa v čase t , je $\frac{dT}{dt}$ změna této teploty za jednotku času, tj. rychlost s jakou roste teplota. Například pro čas v minutách a teplotu ve stupních Celsia hodnota derivace v šesté minutě může být

$$\frac{dT}{dt}(6) = 2^\circ\text{C}/\text{min}.$$

To znamená, že v čase 6 minut roste teplota okamžitou rychlostí 2 stupně Celsia za minutu. Pokud tento růst vydrží celou minutu, bude v čase 7 minut teplota o dva stupně Celsia vyšší. Pokud tato rychlost růstu vydrží deset minut, jsme schopni podobně určit změnu teploty i za delší časový úsek.

V reálných dějích však konstantní rychlosti vidíme zřídka. Například u tepelné výměny se dynamika procesu zastavuje tím, jak se teploty postupně vyrovnávají. Rychlost, s jakou roste teplota chladného tělesa při tepelné výměně s teplejším tělesem není konstantní, ale mění se. Nejčastějším modelem reálné situace je, že tato rychlost je úměrná

rozdílu teplot těles zapojených do tepelné výměny. Roli teplejšího tělesa hraje většinou okolí. Pokud je tedy teplota okolí konstantní a rovna T_0 , je kvantitativním modelem procesu tepelné výměny rovnice

$$\frac{dT}{dt} = k(T_0 - T).$$

To platí pro ohřev (teplota okolí je vyšší a teplota tělesa roste). Analogicky můžeme naformulovat model

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_0)$$

pro ochlazování (teplota okolí je nižší, těleso se ochlazuje a má zápornou derivaci podle času).

Tento model se naučíme časem vyřešit, to však není to nejdůležitější. Obrovským úspěchem je již to, že s derivacemi dostala věda nástroj umožňující kvantitativně pracovat s okamžitou rychlostí změny libovolné veličiny. Derivace umožňují vymanit se z omezení používaných ve středoškolské fyzice, která se týká zpravidla velmi specifických podmínek, a věnovat se popisu reálného světa.

Protože tvar rovnic s derivacemi má naprostá většina fyzikálních zákonů a pomocí rovnic s derivacemi je modelována naprostá většina fyzikálních procesů, existují propracované nástroje pro řešení těchto rovnic na počítači. Z pedagogických důvodů si však může kdokoli daný matematický model naskriptovat tak, že předpokládá časové skoky, v jejichž rámci je rychlost neměnná a změny veličin jsou počítat běžnými operacemi násobení a sčítání. Například Sage je založen na široce rozšířeném jazyce Python, případně Octave jako opensource alternativa programu Matlab.

Poznámka (lineární aproximace, materiálové vztahy). Změna Δx v proměnné x vyvolá změnu $\Delta y \approx f'(x)\Delta x$. Proto je možné používat lineární aproximaci funkce

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Například naprostá většina materiálových vztahů je takovou aproximací pro $x_0 = 0$ (relativně malé podněty) a $f(x_0) = 0$ (bez podnětu není odezva). Lineární aproximace má poté tvar

$$f(x) \approx f'(0)x = kx.$$

Proto jsou zákony jako Fourierův, Fickův nebo Darcyho formulovány ve tvaru přímé úměrnosti. S těmito zákony jste se pravděpodobně seznámili v naukách o materiálu a blíže se jim budeme věnovat později. Podobně je možno chápat Newtonův zákon tepelné výměny z předchozí poznámky jako lineární aproximaci případného obecného vztahu. Srovnejte obecný vztah

$$\frac{dT}{dt} = \Phi(T_0 - T), \quad \Phi(0) = 0$$

a formálně sice podobný vztah

$$\frac{dT}{dt} = k \times (T_0 - T), \quad k = \Phi'(0),$$

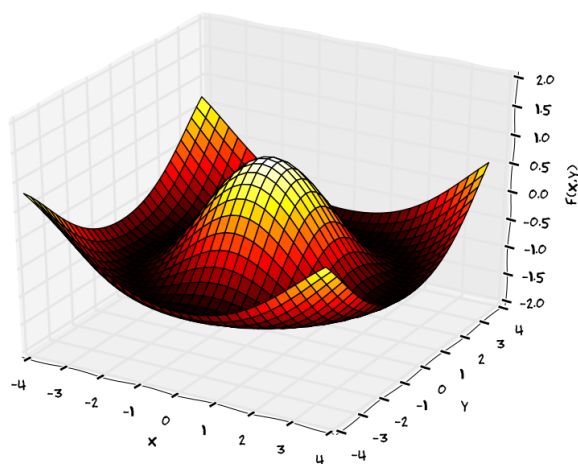
který ale místo obecné a složitě identifikovatelné funkce Φ obsahuje jenom násobení vcelku jednoduše měřitelnou konstantou k .

Poznámka (logistický růst populace). Je-li $x(t)$ velikost populace živočichů, je $\frac{dx}{dt}$ změna této velikosti za jednotku času. Častým modelem reálné situace je modelování pomocí logistické rovnice

$$\frac{dx}{dt} = rx \left(1 - \frac{x}{K}\right).$$

V této rovnici vystupuje celková nosná kapacita prostředí K a rovnice vyjadřuje, že rychlost růstu je úměrná velikosti populace a volné kapacitě prostředí. Volnou kapacitu prostředí počítáme jako doplněk obsazené části prostředí do sta procent. Obsazenou část prostředí počítáme jako podíl velikosti populace a nosné kapacity prostředí.

Funkce dvou proměnných, graf



Obrázek 1.2: 3d graf funkce dvou proměnných

V popisu přírodních dějů si zřídka vystačíme s funkcemi jedné proměnné. Děje probíhají v čase (jedna časová proměnná) a v nějakém místě (jedna až tři prostorové proměnné). Už pro základní fyzikální úlohy tedy musíme umět pracovat s funkcemi více proměnných.

- Zobrazení $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ se nazývá funkce dvou proměnných.
- Grafem funkce f je množina uspořádaných trojic $[x, y, z]$, které splňují $z = f(x, y)$. Graf kreslíme zpravidla jako body v 3D prostoru.

- [Nakreslit online.](#) (Sage),
- [Nakreslit online.](#) (matplotlib),

Příkladem skalární funkce dvou prostorových proměnných je teplota v určitém okamžiku na dvourozměrném povrchu. Aparát funkcí dvou proměnných se tedy jistě uplatní při studiu tepelných ostrovů souvisejících s urbanizací a kvalitou života ve městech.

Příkladem skalární funkce dvou proměnných, kdy každá z proměnných má jiný charakter, je teplota ve stěně budovy. Tato teplota se mění s časem (studená stěna, na kterou začalo svítit slunce, se ohřívá) a s polohou (vnější a vnitřní okraj stěny mají teplotu přibližně podle teploty venku a teploty uvnitř budovy, uvnitř stěny se teplota spojitě mění).

Parciální derivace

<https://youtu.be/Vw7OF5Fj8G4>

Pokud sledujeme například ve stěně měnící se teplotní profil, zajímá nás, jak se teplota v jednotlivých místech stěny mění v čase a jak se teplota mění v řezu stěnou. Zdá se být rozumné oddělit obě změny. Buď v daném bodě fixovat polohu a sledovat časový vývoj v tomto bodě, nebo v daném čase udělat něco jako teplotní snímek a srovnávat teplotu ve vybraném bodě s okolními teplotami ve stejném čase. To vede k následujícímu přístupu, kdy u funkce více proměnných sledujeme reakci na změnu jedné jediné veličiny.

Definice (parciální derivace). Buď $f(x, y): \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ funkce dvou proměnných x a y . Výraz

$$\frac{\partial f}{\partial x} := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h}$$

se nazývá *parciální derivace funkce f podle x* . Výraz

$$\frac{\partial f}{\partial y} := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x, y+h) - f(x, y)}{h}$$

se nazývá *parciální derivace funkce f podle y* .

Podobně můžeme definovat parciální derivaci pro funkce libovolného konečného počtu proměnných. V těchto parciálních derivacích vlastně sledujeme, jak reaguje veličina f na změny jenom v jedné proměnné. Ostatní proměnné, podle kterých se nederivuje, mají vlastně roli parametru a nijak se nemění.

Poznámka (stavební kameny z definice derivace).

- Výraz

$$f(x+h, y) - f(x, y)$$

z čitatele je změna veličiny f na intervalu $[x, x+h]$ při konstantní veličině y . Tento čítec často označujeme též Δf .

- Podíl

$$\frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h}$$

je změna veličiny f na intervalu $[x, x+h]$ při konstantní veličině y přepočítaná na jednotku veličiny x . Je to tedy průměrná rychlost změny funkce f vzhledem k x na intervalu $[x, x+h]$. Často označujeme též $\frac{\Delta f}{\Delta x}$.

- Limita v definici derivace stahuje délku intervalu pro výpočet průměrné rychlosti k nule. Tím se z průměrné rychlosti stane okamžitá rychlost. Parciální derivace je tedy okamžitá rychlost, s jakou se mění funkce f při změnách jedné proměnné.

Poznámka (jednotka parciální derivace). Jednotka derivace $\frac{\partial f}{\partial x}$ je stejná, jako jednotka podílu $\frac{f}{x}$. Jednotka derivace $\frac{\partial f}{\partial y}$ je stejná, jako jednotka podílu $\frac{f}{y}$.

Poznámka (slovní interpretace parciální derivace). Derivace $\frac{\partial f}{\partial x}$ udává, jak se mění veličina f při změnách veličiny x a za předpokladu konstantní veličiny y . Interpretace derivace v nematematických disciplínách je proto okamžitá rychlost s jakou veličina f reaguje na změny veličiny x .

Poznámka (derivace teploty podle času a polohy). Pokud sledujeme vývoj a rozložení teploty na dvourozměrné tepelně vodivé desce, je teplota (udávaná například ve stupních Celsia) funkcí tří proměnných: jedna proměnná je čas t a dvě proměnné x a y jsou souřadnice v rovině. Tedy $T = T(t, x, y)$. Parciální derivace $\frac{\partial T}{\partial t}$ udává, jak rychle (například ve stupních Celsia za hodinu) roste v daném místě teplota. V různých částech desky může být tato veličina jiná a vždy se vztahuje k danému bodu. Může se měnit i v čase, například deska v prostředí s konstantní teplotou postupně dospěje do stavu se stacionárním rozložením teploty, kdy se teplota v žádném místě ani neroste ani neklesá a parciální derivace podle času je nulová. Derivace $\frac{\partial T}{\partial x}$ udává, jak prudce (například ve stupních Celsia na centimetr) roste teplota ve směru osy x .

Interpretace parciální derivace, vedení tepla v 1D

Studujme vedení tepla v jednorozměrné tyči. Teplota T je funkcí dvou proměnných: polohy x a času t . Tedy

$T = T(t, x)$. Parciální derivace $\frac{\partial T}{\partial t}$ udává, jak rychle (například ve stupních Celsia za hodinu) roste v daném místě teplota. V různých částech desky může být tato veličina jiná a vždy se vztahuje k danému bodu. Přirozeně se mění i v čase. Například v prostředí s konstantní teplotou postupně systém dospěje do stavu se stacionárním rozložením teploty, kdy se teplota v žádném místě ani neroste ani neklesá a parciální derivace podle času je nulová. Derivace $\frac{\partial T}{\partial x}$ udává, jak prudce roste teplota ve směru osy x . Tato derivace může být vyjádřena například ve stupních Celsia na centimetr.

- Je-li parciální derivace $\frac{\partial T}{\partial t}$ rovna $2^\circ\text{C}/\text{min}$, znamená to, že v daném místě roste teplota v čase rychlostí dva stupně Celsia za minutu.
- Pokud je parciální derivace teploty podle času záporná a rovna například hodnotě $-2^\circ\text{C}/\text{min}$, znamená to, že teplota v tomto místě klesá rychlostí dva stupně Celsia za minutu.
- Je-li parciální derivace $\frac{\partial T}{\partial x}$ rovna $2^\circ\text{C}/\text{cm}$, znamená to, že v daném místě roste teplota ve směru osy x takovou rychlostí, že na centimetru délky tyče naroste o dva stupně Celsia.
- Pokud je parciální derivace teploty podle polohy záporná a rovna například hodnotě $-2^\circ\text{C}/\text{cm}$, znamená to, že ve směru osy x teplota klesá takovou rychlostí, že na centimetru délky tyče klesne o dva stupně Celsia.

Interpretace parciálních derivací, brzdná dráha

https://youtu.be/UE_nkyDe7bw

Příklad: Brzdná dráha L (v metrech) auta o hmotnosti m (v kilogramech) brzdícího z rychlosti v (v kilometrech za hodinu) je dána vzorcem

$$L = kmv^2,$$

kde $k = 3.45 \times 10^{-6} (\text{m hod}^2)/(\text{kg km}^2)$. Pro $m = 1100 \text{ kg}$ a $v = 100 \text{ km/hod}$ je brzdná dráha 37.95 m .

- Parciální derivace podle m je $\frac{\partial L}{\partial m} = kv^2$ a pro zadané hodnoty vychází

$$\frac{\partial L}{\partial m} = 0.0345 \text{ m/kg}.$$

Každý kilogram hmotnosti nad 1100 kg auta jedoucího rychlostí 100 km/hod prodlouží brzdovou dráhu o cca 3.5 cm .

- Parciální derivace podle v je $\frac{\partial L}{\partial v} = 2kmv$ a pro zadané hodnoty vychází

$$\frac{\partial L}{\partial v} = 0.759 \text{ m}/(\text{km/hod}) = 7.59 \times 10^{-4} \text{ hod}.$$

Každý kilometr za hodinu nad 100 km/hod u auta vážícího 1100 kg prodlouží brzdovou dráhu o cca 76 cm.

- Zjednodušený vzorec pro brzdovou dráhu auta s hmotností blízkou 1100 kg a rychlostí blízkou 100 km/hod je

$$L \approx 37.95 + 0.0345(m - 1100) + 0.759(v - 100),$$

kde hmotnost a rychlost se dosazují v kilogramech a kilometrech za hodinu a brzdná dráha vychází v metrech.

Interpretace parciálních derivací, pohyb ještěrky

<https://youtu.be/lk-LRBKth3Q>

Energie E (v kcal), kterou spotřebuje ještěrka o hmotnosti m (v gramech) na překonání vzdálenosti jednoho kilometru rychlostí v (v kilometrech za hodinu), se dá odhadnout vzorcem

$$E(m, v) = 2.65m^{0.66} + \frac{3.5m^{0.75}}{v}.$$

Přímým výpočtem je možné určit

$$\frac{\partial E}{\partial v} = -\frac{3.5m^{0.75}}{v^2}.$$

Pro $m = 400$ g a $v = 8$ km h⁻¹ dostáváme

$$\frac{\partial E}{\partial v}(400, 8) = -4.9 \text{ kcal km}^{-1}\text{h}.$$

Zvýšení rychlosti o kilometr za hodinu vede ke snížení energetického výdeje ještěrky o 4.9 kcal. Podobně, platí

$$\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial m} &= 2.65 \times 0.66m^{-0.34} + \frac{3.5 \times 0.75m^{-0.25}}{v} \\ &= \frac{1.749}{m^{0.34}} + \frac{2.625}{m^{0.25}v} \end{aligned}$$

a pro výše uvažované hodnoty dostáváme

$$\frac{\partial E}{\partial m}(400, 8) = 0.30 \text{ kcal g}^{-1}.$$

Každý gram, který má ještěrka navíc oproti hmotnosti 400 gramů, zvedne energetický výdej přibližně o 0.30 kcal.

Online výpočet.

(Zpracováno podle Stewart: Biocalculus)

ww.problems/parcialni_derivace/povrch_tela.pg

Využití parciálních derivací, ochrana želv

V publikaci Deborah T. Crouse, Larry B. Crowder, Hal Caswell: A Stage-Based Population Model for Loggerhead Sea Turtles and Implications for Conservation, Ecology, Vol. 68, No. 5 (Oct., 1987), pp. 1412-1423 je představen model populace želvy Karety obecné, kdy je populace rozdělena do sedmi vývojových stadií a jsou sledovány počty jedinců v jednotlivých stadiích. Funkce popisující vývoj v dalším období na základě situace v období předchozím je funkcí sedmi proměnných a je možné ji maticově vyjádřit ve tvaru

$$N(t+1) = AN(t),$$

kde $N(t)$ je sedmírozměrný vektor obsahující velikosti jednotlivých populačních tříd a A je matice projekční matice modelující vývoj populace. Má tvar

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 127 & 4 & 80 \\ 0.6747 & 0.737 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0486 & 0.661 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0147 & 0.6907 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.0518 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.8091 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.8091 & 0.8089 \end{pmatrix}$$

V této matici jsou zohledněny počty potomků želv v plodné fázi, pravděpodobnost přechodu želv do následující vývojové fáze a pravděpodobnost setrvání ve stávající vývojové fázi. Tato čísla se mění v závislosti na tom, kolik má želva nepřátel, jak složité je pro ni přežít, jak obtížné je pro ni se rozmnožovat. Například vysoká čísla v prvním řádku značí, že želvy mají hodně potomků. Číslo v prvním řádku a předposledním sloupci je menší, protože v tomto předposledním stadiu je želva jenom jeden rok a má málo potomků. Dynamika růstu populace je dána dominantní vlastní hodnotou matice. Tuto vlastní hodnotu označíme λ . Velikost populace roste přibližně geometrickou řadou s kvocientem λ . Pokud je tato hodnota větší než jedna, velikost populace roste, v opačném případě populace vymírá. Pro uvedenou matici je $\lambda = 0.95$ a populace se tedy mezi jednotlivými obdobími snižuje o pět procent. Hodnota λ závisí na třinácti nenulových komponentách matice A a je tedy funkcí třinácti proměnných. Pokud označíme prvky matice A jako a_{ij} , je pro biology nesmírně zajímavá veličina $\frac{\partial \lambda}{\partial a_{ij}}$, která udává citlivost koeficientu řídicího růst populace na velikosti komponent matice A . Ještě častěji se pracuje s relativní změnou a v tomto případě sledujeme veličinu $\frac{a_{ij}}{\lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial a_{ij}}$, která se nazývá elasticita a je bez jednotky. Proto se udává v procentech. Jedná se tedy o třináct parciálních derivací a třináct elasticit (pracujeme jenom s nenulovými komponentami matice). Je pozoruhodné, že hodnoty elasticity spojené s rozmnožováním a přežíváním vajíček a mláďat jsou řádově jednotky procent, ale hodnoty spojené s dospíváním jsou přes deset procent.

To znamená, že pro ochranu populace je důležité nepodcenit ochranu dospívajících větších želv. Ochrana vajíček a čerstvě narozených želv má na celkovou kondici malý vliv a posílení těchto parametrů sama o sobě k udržení populace želv nestačí. Proto bylo vyvinuto zařízení **Turtle excluder device**, které umožní větším želvám uniknout z rybářských sítí a zvýší tak jejich šanci na přežití.

Linearita parciální derivace

Následující poznámka je nenápadná a přirozená, protože je analogií stejného tvrzení pro obyčejné derivace. Má však mimořádnou důležitost, protože udává vlastnost, které se můžeme držet při studiu rovnic s derivacemi. Stejně věty zformulujeme i u dalších operací s funkcemi a později se je naučíme využívat.

Poznámka (linearita parciální derivace). Parciální derivace zachovává součet a násobení konstantou, tj. pro libovolné funkce f a g a konstantu c platí

$$\frac{\partial(f+g)}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial x}, \quad \frac{\partial(cf)}{\partial x} = c \frac{\partial f}{\partial x}$$

a analogicky pro libovolnou jinou proměnnou.

Rovnice vedení tepla v 1D

<https://youtu.be/ilAaBQNoySI>

Vraťme se k problematice vedení tepla v jednorozměrné tyči. Teplota T je funkcí dvou proměnných: polohy x a času t . Tedy $T = T(t, x)$. Pokusíme se odvodit matematický model vedení tepla. Řešením takového modelu bude funkce T . Po vyřešení modelu bychom tedy měli vzorec udávající teplotu v libovolném bodě tyče a v libovolném čase. Nejprve ovšem musíme požadovnou rovnici sestavit.

Poznámka. Potřebujeme fyzikální zákony řídící vedení tepla. Bez nich matematika model vedení tepla nemá jak naformulovat. Tyto zákony je potřeba matematice dodat z aplikované vědy. Tou je v tomto případě fyzika, jindy může být biologie nebo geologie. Jakmile jsou potřebné zákony a případně materiálové vztahy k dispozici, stává se problém čistě matematickým a fyzika přijde ke slovu při závěrečné interpretaci. Použijeme následující fyzikální fakta.

- Rozdílem teplot je vyvolán tok tepla. Velikost toku tepla je úměrná teplotnímu rozdílu a teplo teče z místa s větší teplotou do místa s menší teplotou.
- Teplota se zvyšuje dodáním tepla. Změna teploty je úměrná dodanému teplu.

V dalším už nastupuje matematický popis a ve vhodných chvílích vždy použijeme výše uvedené fyzikální zákony.

Mluvíme o teple, ale jako mechanický model si můžeme představit proudění tekutiny (pro jednoduchou představu) nebo proudění vlhkosti (pro odvození rovnice difuze namísto rovnice vedení tepla). Budeme uvažovat libovolné místo materiálu a budeme matematicky vyjadřovat děje, které přispívají ke změně teploty.

- Rychlost růstu teploty (s časem) je

$$\frac{\partial T}{\partial t}.$$

Měříme ji například ve stupních Celsia za minutu. Tato rychlost je úměrná rychlosti s jakou do daného místa dodáváme teplo. Proto v dalším budeme hledat rychlost dodávání tepla a daného místa. Poté se vrátíme do tohoto místa a dáme tuto rychlost do souvislosti s rychlostí růstu teploty.

- Rychlost růstu teploty jako funkce polohy je

$$\frac{\partial T}{\partial x}.$$

Měříme ji například ve stupních Celsia na centimetr.

- Pro přepočet nerovnoměrného rozložení teploty na tok tepla nás zajímá nikoliv jak teplota v prostoru roste, ale jak klesá. Proto musíme vzít derivaci podle prostorové proměnné záporně, abychom dostali pokles teploty. Tento pokles vynásobíme konstantou, která převede spád teploty na tok tepla. Tuto konstantu označíme k (nazývá se součinitel tepelné vodivosti a dodá nám ji fyzika a v ní takzvaný Fourierův zákon). Tok tepla q ve směru osy x je tedy

$$q = -k \frac{\partial T}{\partial x}.$$

To je veličina, která udává, kolik joulů tepla proteče průřezem za jednotku času.

- Je-li q rovno 7 J/min znamená to, že průřezem proteče ve směru osy x sedm joulů za minutu.
- Je-li q záporné a rovno -7 J/min , znamená to, že sedm joulů za minutu proteče v daném místě proti směru osy x .
- Pokud do daného místa přitéká teplo stejnou rychlostí jako odtéká, teplota se nemění a dané místo se ani neohřívá ani neochlazuje. Intenzita ochlazování je dána bilancí mezi přítokem a odtokem. Můžeme si to představit tak, že z tepla, které do daného bodu přiteče, se část “oddělí” a přispěje k navýšení teploty. Zbytek tepla teče dál. Pro zjištění, kolik tepla se z toku “oddělí” a způsobí v daném místě navýšení teploty potřebujeme vědět, jak rychle v daném místě tok klesá jako funkce proměnné x . Nárůst určíme derivací podle x a pokles z nárůstu určíme vynásobením koeficientem -1 . Pokles toku tepla je tedy

$$-\frac{\partial q}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x} \left(-k \frac{\partial T}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right).$$

- Například pokles $-\frac{\partial q}{\partial x} = 2 \text{ J/(min cm)}$ toku $q = 10 \text{ J/min}$ znamená, že o centimetr dál ve

směru osy x proteče průřezem směrem doprava už nikoliv deset, ale pouze osm jouľů za minutu.

- Stejný pokles u toku $q = -10 \text{ J/min}$ znamená, že v daném místě proteče směrem doleva deset jouľů za minutu, ale o centimetr více vpravo je o 2 méně, tj. $-10 - 2 = -12$ a směrem doleva teče dvanáct jouľů za minutu.
- V obou případech intenzita toku klesá podél tohoto toku. Tok slábne.
- Pokles toku vypočtený v předchozím bodě je úměrný rychlosti růstu teploty. Příslušné konstanty úměrnosti dodá fyzika. Platí

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) = \rho c \frac{\partial T}{\partial t},$$

kde c je měrná tepelná kapacita a ρ je hustota. (V tomto případě jsou hustota i měrná tepelná kapacita vztaženy ne k jednotce objemu, jak jsme zvyklí, ale k jednotce délky. Například ρ je lineární hustota, tj. v gramech na centimetr).

- Například pokles $-\frac{\partial q}{\partial x} = 2 \text{ J/(min cm)}$ toku $q = 10 \text{ J/min}$ znamená, že o centimetr dál ve směru osy x proteče průřezem směrem doprava už nikoliv deset, ale pouze osm jouľů za minutu. Tedy každou minutu se v jednom centimetru délky od toku “odpojí” energie o velikosti dva jouly a ta se “uloží” do materiálu. Navenek se to projeví zvýšením teploty v daném místě. Přičemž hrají roli fyzikální vlastnosti materiálu, které udávají, jaká teplotní změna odpovídá dodanému teplu.
- Rovnice odvozená v předchozím kroku se nazývá **rovnice vedení tepla** a dokáže modelovat například prostup tepla stěnou domu. Tato rovnice zachycuje matematicky to, jak funguje materiál z hlediska předávání tepla mezi místy o různé teplotě.

Shrnutí. V odvození vidíme, že rovnice vedení tepla je vlastně bilance toku tepla. Zeslabení toku udává, kolik tepla se v daném místě spotřebovalo. Tato spotřeba tepla se projeví zvýšením teploty v místě, kde k zeslabení došlo.

Část rovnice vedení tepla	Slovní interpretace
$\frac{\partial T}{\partial t}$	Rychlost s jakou roste v daném místě teplota jako funkce času.
$\frac{\partial T}{\partial x}$	Rychlost s jakou roste v daném okamžiku teplota podél tyče.
$-\frac{\partial T}{\partial x}$	Rychlost s jakou klesá v daném okamžiku teplota podél tyče. Záporně vzatá rychlost růstu.
$-k \frac{\partial T}{\partial x}$	Tok tepla. Podle Fourierova zákona je úměrný rychlosti s jakou klesá teplota.
$\frac{\partial}{\partial x} \left(-k \frac{\partial T}{\partial x} \right)$	Rychlost s jakou roste tok tepla podél tyče.
$-\frac{\partial}{\partial x} \left(-k \frac{\partial T}{\partial x} \right)$	Rychlost s jakou klesá tok tepla podél tyče. Toto teplo zůstává v daném místě tyče a projeví se nárůstem teploty v tomto místě.
$\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right)$	Upravený výraz z předchozího řádku. Rychlost s jakou klesá tok tepla podél tyče.
Rovnice vedení tepla	Červené výrazy jsou si úměrné.

[www:problems/parcialni_derivace/rovnice_vedeni_tepla_interpretace](http://www.problems/parcialni_derivace/rovnice_vedeni_tepla_interpretace)

Numerické modelování. Rovnici je možno použít k simulaci časového vývoje teploty například **takto**. (Pokud si rozkliknete odkaz, nevidíte rovnici s počátečními podmínkami a příkaz k jejímu vyřešení, ale poměrně dlouhý kód převádějící řešení rovnice vedení tepla na řešení vhodné soustavy lineárních rovnic. V tomto případě se čtyřicetkrát řeší soustava 100 rovnic o 100 neznámých. V inženýrsky zajímavých aplikacích bývají takových rovnic tisíce.)

Druhá derivace

<https://youtu.be/vJVRrik3EAW>

Druhá derivace je derivace první derivace. U funkce dvou proměnných každá ze dvou po sobě jdoucích derivací může být podle některé ze dvou proměnných a v úvahu připadají čtyři kombinace. Pokud derivujeme dvakrát podle stejné proměnné, dostaneme

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} := \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial x} \quad \text{a} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} := \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial y}.$$

Pokud derivujeme pokaždé podle jiné proměnné, dostaneme v závislosti na pořadí

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y} \quad \text{a} \quad \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial x}.$$

Poději si ukážeme, že tyto dvě možnosti jsou v praxi zpravidla vždy totožné.

Je-li tepelná vodivost k v rovnici vedení tepla

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right)$$

konstantní, redukuje se rovnice na rovnici

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2},$$

ve které figuruje druhá derivace podle polohy.

Fisherova–KPP rovnice

Analogický postup jako u vedení tepla funguje pro libovolný transportní děj. Používá se například pro model šíření živočišného druhu v životním prostředí nebo šíření genu v populaci. Ukážeme si zde lineární verzi pro jednorozměrné životní prostředí, například podél řeky. Vícerozměrné zobecnění si uvedeme na konci semestru.

Tento model se nazývá Fisherova–KPP rovnice a jedná se vlastně o rovnici vedení tepla, do které jsou doplněny zdroje.

Poněkud kryptický název Fisherovy–KPP rovnice je podle jmen významných vědců spojených s touto rovnicí. Jsou to významný americký statistik a biolog Ronald Fisher a trojice ruských matematiků Andrey Kolmogorov, Ivan Petrovsky a Nikolai Piskunov.

Fisherova–KPP rovnice popisuje populaci, která se může šířit v prostoru. Kromě časové závislosti tedy musíme uvažovat i závislost na poloze. Tato rovnice je vyjádřena pro funkci vyjadřující hustotu populace. Hustotou populace může být například množství jedinců na jednotku délky, v případě zobecnění na více dimenzí množství jedinců na jednotku plochy. Procesy vedoucí k migraci a tedy i změně hustoty populace jsou stejné jako u vedení tepla. Populace má tendenci migrovat z míst, kde je vysoká hustota do míst, kde je hustota menší a v místě, kde převažuje imigrace nad emigrací velikost populace roste. Protože se populace může rozmnožovat, je do rovnice navíc započítán člen modelující vlastní reprodukci. Zpravidla je uvažován logistický růst a rovnice má poté tvar

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + ru \left(1 - \frac{u}{K} \right).$$

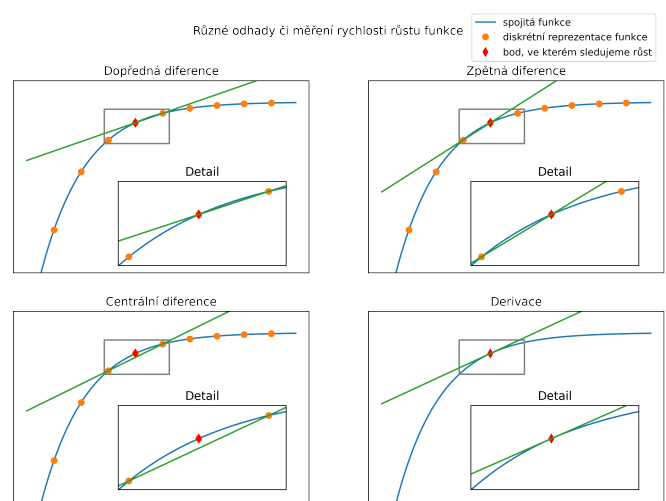
Tato rovnice byla původně navržena jako model šíření výhodného genu populací. To potvrzuje, že v rovnici máme opravdu nástroj pro šíření nebo transport různých objektů,

od energie, přes molekuly nebo částice v látce či geny v populaci až po jedince invazního druhu v ekosystému.

Uvedená rovnice zřejmě nebude fungovat tam, kde se populace chová jinak, než teplo, například pokud jedinci téhož druhu mají tendenci se shlukovat, což některé druhy jak známo činí. Rovnice a celý přístup jsou dostatečně flexibilní na to, aby zvládly úpravu i na takové případy, to ale již přesahuje ambice tohoto textu.

Numerická aproximace derivací: konečné difference

<https://youtu.be/iGohx4i95FI>



Obrázek 1.3: V praxi často pracujeme s daty získanými po skocích. Místo spojitě funkce (křivky) tedy máme funkci definovanou v bodech (diskrétní funkce). I zde je nutné mít možnost měření rychlosti změny, která je co nejvíce kompatibilní s derivací.

Dopředná difference

Základním přístupem při numerickém odhadu derivace je vynechání limitního přechodu v definici derivace. Pro funkci jedné proměnné a její derivaci

$$\frac{df}{dx} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

tedy dostáváme

$$\frac{df}{dx} \approx \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Okamžitá rychlost je nahrazena průměrnou rychlostí na intervalu $(x, x+h)$. Tento podíl se nazývá *dopředná poměrná difference* nebo zkráceně *dopředná difference*. Pokud použijeme tento postup pro parciální derivace, dostáváme

$$\frac{\partial f}{\partial x} \approx \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$$

a

$$\frac{\partial f}{\partial y} \approx \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}.$$

Centrální difference

Poznámka (Taylorův polynom). V diferenciálním počtu funkcí jedné proměnné se zabýváme otázkou hledání nejlepší polynomiální aproximace nějaké funkce. Touto aproximací je **Taylorův polynom**. S jeho využitím pro aproximaci kvadratickou funkcí platí

$$f(x+h) = f(x) + \frac{df(x)}{dx}h + \frac{1}{2!} \frac{d^2f(x)}{dx^2}h^2 + O(h^3),$$

kde $O(h^3)$ je funkce, která v okolí nuly konverguje k nule alespoň tak rychle, jako konstantní násobek funkce h^3 .

Přesnější aproximace derivace vychází z Taylorova polynomu druhého řádu napsaného pro $f(x+h)$ a $f(x-h)$, tj. ze vztahů

$$f(x+h) \approx f(x) + f'(x)h + \frac{1}{2}f''(x)h^2$$

a

$$f(x-h) \approx f(x) - f'(x)h + \frac{1}{2}f''(x)h^2.$$

Pokud tyto vztahy sečteme a odečteme, dostaneme

$$f(x+h) + f(x-h) \approx 2f(x) + f''(x)h^2$$

a

$$f(x+h) - f(x-h) \approx 2f'(x)h.$$

Odsud dostáváme aproximace první a druhé derivace

$$f'(x) = \frac{df}{dx} \approx \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$$

a

$$f''(x) = \frac{d^2f}{dx^2} \approx \frac{f(x-h) - 2f(x) + f(x+h)}{h^2}.$$

Analogicky pro parciální derivaci podle x

$$\frac{\partial f}{\partial x} \approx \frac{f(x+h, y) - f(x-h, y)}{2h}$$

a

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \approx \frac{f(x-h, y) - 2f(x, y) + f(x+h, y)}{h^2}.$$

Tato aproximace první derivace se nazývá *centrální difference* a je přesnější než dopředná difference, protože je založena na přesnější aproximaci funkce f . Používá totiž polynom druhého stupně. Dopředná difference je založena pouze na lineární aproximaci a proto dává méně přesné výsledky.

Uvedené závěry shrneme do následující věty, kterou vyslovíme pro parciální derivaci podle x i y . Dva vzorce pro každou parciální derivaci prvního řádu a jeden vzorec pro parciální derivaci druhého řádu. Aproximace uvedeme ve tvaru, ze kterého je možno současně vidět i chybu při použití dané aproximace. (Pro určení chyby u druhé derivace aproximujeme polynomem o řád vyšším.)

Věta (aproximace parciálních derivací pomocí konečných diferencí). Platí následující aproximace derivace podle x .

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h} + O(h)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{f(x+h, y) - f(x-h, y)}{2h} + O(h^2)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{f(x-h, y) - 2f(x, y) + f(x+h, y)}{h^2} + O(h^2)$$

Platí následující aproximace derivace podle y .

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{f(x, y+h) - f(x, y)}{h} + O(h)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{f(x, y+h) - f(x, y-h)}{2h} + O(h^2)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{f(x, y-h) - 2f(x, y) + f(x, y+h)}{h^2} + O(h^2)$$

ww:problems/parcialni_derivace/centralni_difference.pg

Diskretizace diferenciálních rovnic pomocí konečných diferencí

Rovnice obsahující parciální derivace jsou přirozeným jazykem, kterým modelujeme fyzikální děje. To jsme viděli na rovnici vedení tepla výše a setkáme se s tím i dále. Bohužel tyto rovnice umíme ručně vyřešit jenom v poměrně speciálních případech a ani v těchto případech to není snadná práce. Proto v inženýrské praxi dáváme přednost numerickému řešení rovnice. To je založeno na numerické aproximaci derivací a převádí řešení rovnic s parciálními derivacemi na řešení lineárních rovnic. Možnosti si naznačíme v následující poznámce, která je čistě informativní a není toho typu, že byste měli umět výpočty v ní uvedené reprodukovat. Je však důležitá pro pochopení, co nám z rovnic vlastně může vyplývat a jaké jsou zhruba požadavky na výpočetní prostředky.

Poznámka (explicitní metoda řešení rovnice vedení tepla). Po převedení derivací z rovnice vedení tepla

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

bychom dostali

$$\rho c \frac{T(x, t+\Delta t) - T(x, t)}{\Delta t} = k \frac{T(x-\Delta x, t) - 2T(x, t) + T(x+\Delta x, t)}{\Delta x^2}$$

kde Δx a Δt jsou intervaly oddělující body a časy, ve kterých aproximujeme teplotu. Odsud

$$T(x, t+\Delta t) = T(x, t) + \frac{k\Delta t}{\rho c(\Delta x)^2} [T(x-\Delta x, t) - 2T(x, t) + T(x+\Delta x, t)]$$

a teplotu $T(x, t+\Delta t)$ v následujícím časovém okamžiku v libovolném bodě x dokážeme vypočítat ze současné teploty v tomto bodě a z teploty v sousedních bodech $x+\Delta x$

a $x - \Delta x$. Toto je vzorec pro takzvanou *explicitní* metodu řešení rovnice vedení tepla a tuto metodu je snadné implementovat **programovým kódem**. Pokud teploty v čase t uspořádáme do sloupcového vektoru $\vec{T}(t)$, je dokonce možno předchozí vztah zapsat pro všechny body současně jedinou maticovou rovnicí

$$\vec{T}(t + \Delta t) = \vec{T}(t) + \frac{k\Delta t}{\rho c(\Delta x)^2} A \vec{T}(t),$$

kde A je matice, která má v hlavní diagonále čísla -2 , podél diagonály má čísla 1 a jinak nuly s výjimkou prvního a posledního řádku, které jsou nulové. Viz **výsledný kód**, kde je jenom jeden cyklus pro posun v čase a namísto cyklu přes všechny body v tyči je zde maticové násobení.

Ještě existuje metoda založená na zpětné diferenci v čase namísto dopředné, tj.

$$\frac{\partial T(x, t)}{\partial t} = \frac{T(x, t) - T(x, t - \Delta t)}{\Delta t}$$

a odsud

$$T(x, t) = T(x, t - \Delta t) + \frac{k\Delta t}{\rho c(\Delta x)^2} [T(x - \Delta x, t) - 2T(x, t) + T(x + \Delta x, t)]$$

Toto vztah umožňující výpočet teplot v čase t z teplot v čase $t - \Delta t$. Bohužel však v každém tomto vztahu figurují tři teploty v čase t , které ještě neznáme. Úloha vede na řešení soustavy lineárních rovnic, kterých je stejně jako je uvažovaný počet bodů v tyči. Tedy v prakticky využitelných úlohách počty rovnic a proměnných začínají řádově stovkami či tisíci a omezeny jsou jenom pamětí počítačů. Každá rovnice v soustavě má sice jenom tři neznámé, ale jako celek je postup komplikovanější na naprogramování i na výpočet. Přesto se ukazuje jako výhodnější, protože je stabilnější a dovoluje řešení počítat po větších časových skocích než při explicitní metodě. Programová realizace je založena na řešení rovnice a v programech Octave nebo Matlab může vypadat **následovně**. Tento přístup se nazývá **implicitní metoda řešení**.

Vzdálenost a pojmy s ní související

V podkapitole věnované popisu bodů, množin a jejich vlastností v euklidovském prostoru se ujistíme, že dokážeme dát přesný obsah tak běžným pojmům, jako vzdálenost nebo hranice množiny. Protože matematické pojetí těchto pojmů plně vystihuje a zobecňuje základní představu z běžného života, není v tuto chvíli nutné se učit jednotlivé definice. Jenom si rámcově odnese přehled, jak jsou tyto pojmy definovány a jaké pojmy vlastně používáme. V případě nutnosti se k těmto definicím můžete kdykoliv vrátit.

<https://youtu.be/owfHzLBonRA>

V dalším budeme pracovat s pojmy jako množina a její hranice, množina obsahující hranici, množina neobsahující hranici, spojitá funkce apod. Ač v technicky nejvýznamnějších aplikacích často můžeme tyto pojmy chápat intuitivně, historie ukázala, že přesná formální definice je nezbytná.

V dalším nastane jedna z nejnebezpečnějších situací v matematice, kdy přesně definovanému pojmu dáme název, který lidé znají z prostého života. Například hranice, oblast, spojitost, uzávěr, okolí, ... Podrobný rozbor ukazuje, že tyto definice jsou v jednoduchých případech v souladu s intuicí.

Euklidovský metrický prostor

Definice (metrický prostor, metrika). Množina $\mathbb{E}^3$ prvků z $\mathbb{R}^3$ s metrikou ρ definovanou pro $A = (a_x, a_y, a_z) \in \mathbb{R}^3$ a $B = (b_x, b_y, b_z) \in \mathbb{R}^3$ vztahem

$$\rho(A, B) = \sqrt{(a_x - b_x)^2 + (a_y - b_y)^2 + (a_z - b_z)^2}$$

se nazývá *Euklidovský metrický prostor*. Prvky prostoru $\mathbb{E}^3$ budeme nazývat *body*. Funkce ρ se nazývá *Euklidovská metrika*. Číslo $\rho(A, B)$ se nazývá *Euklidovská vzdálenost* bodů A, B .

Analogicky je možno definovat metriku v prostoru libovolné konečné dimenze.

Definice (okolí). Buď $A \in \mathbb{E}^n$ bod z $\mathbb{E}^n$ a $\varepsilon > 0$ kladné reálné číslo. *Epsilonovým okolím bodu X* rozumíme množinu označenou $O_\varepsilon(A)$ skládající se z bodů, jejichž vzdálenost od bodu A je menší než ε , tj.

$$O_\varepsilon(A) = \{X \in \mathbb{E}^n : \rho(A, X) < \varepsilon\}.$$

Ryzím epsilonovým okolím bodu A rozumíme množinu $\overline{O}_\varepsilon(A)$ definovanou

$$\overline{O}_\varepsilon(A) = O_\varepsilon(A) \setminus \{A\},$$

tj. ε -okolí bodu A , s vyloučením bodu A .

Významné vlastnosti množin v Euklidovském prostoru

V následujících definicích je $X \in \mathbb{E}^n$ bod a $M \subseteq \mathbb{E}^n$ podmnožina v Euklidovském prostoru $\mathbb{E}^n$ ($n = 2$ nebo 3). Abstraktně je možno s těmito pojmy pracovat i v prostoru libovolné konečné dimenze.

Ohraničená množina: Množina M se nazývá *ohraničená*, jestliže leží v (dostatečně velkém) okolí nějakého bodu $Y \in \mathbb{E}^n$.

Vnitřní bod, vnitřek, otevřená množina: Bod X se nazývá *vnitřním bodem množiny* M , jestliže $X \in M$ a existuje nějaké okolí $O(X)$ bodu X ležící celé v množině M , tj. $O(X) \subseteq M$. Množina všech vnitřních bodů množiny M se nazývá *vnitřek množiny* M a označuje M° . Je-li množina M totožná se svým vnitřkem, tj. je-li každý bod množiny M vnitřní, říkáme, že množina M je *otevřená*.

Hraniční bod, hranice: Bod X se nazývá *hraničním bodem množiny* M , jestliže každé okolí bodu X obsahuje alespoň jeden bod ležící v množině M a současně alespoň jeden bod neležící v množině M . Množina všech hraničních bodů množiny M se nazývá *hranice množiny* M a označuje ∂M .

Uzávěr, uzavřená množina: *Uzávěrem množiny* M rozumíme množinu $\overline{M}$ definovanou jako sjednocení vnitřku a hranice množiny M , tj. $\overline{M} = M^\circ \cup \partial M$. Je-li množina totožná se svým uzávěrem (tj. obsahuje-li všechny své hraniční body), nazývá se *uzavřená*.

Souvislá množina: Množina M se nazývá *souvislá*, jestliže každé dva body, ležící v množině M lze spojit lomenou čarou, ležící v M .

Oblast, uzavřená oblast, kompaktní množina: Otevřená souvislá množina se nazývá *oblast*. Uzavřená souvislá množina se nazývá *uzavřená oblast*. Uzavřená ohraničená množina se nazývá *kompaktní*.

Spojitosť funkce

Spojitosť skalární funkce: Necht $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ je skalární funkce n proměnných definovaná v nějakém okolí bodu $A \in \mathbb{R}^n$. Řekneme, že funkce f je v bodě A *spojitá*, pokud pro každé okolí $O(f(A))$ bodu $f(A)$ existuje okolí $\overline{O}(A)$ bodu A takové, že obrazy všech bodů z tohoto okolí bodu A leží v okolí bodu $O(f(A))$, tj. pro všechna $X \in \overline{O}(A)$ platí $f(X) \in O(f(A))$.

Spojitosť vektorové funkce: Necht $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ je vektorová funkce n proměnných definovaná v nějakém okolí bodu $A \in \mathbb{R}^n$. Řekneme, že funkce f je v bodě A *spojitá*, jestliže je v tomto bodě spojitá každá její komponenta.

Elementární funkce: Všechny mnohočleny, goniometrické, cyklometrické, exponenciální a logaritmické funkce a obecná mocnina se nazývají *základní elementární funkce*. Všechny funkce, které ze základních elementárních funkcí získáme konečným počtem operací sčítání, odečítání, násobení, dělení a skládání těchto funkcí navzájem se nazývají *elementární funkce*.

Věta (spojitosť elementárních funkcí). *Všechny elementární funkce jsou spojité v každém vnitřním bodě svého definičního oboru.*

Schwarzova věta

Věta (Schwarzova). *Jsou-li smíšené derivace spojitě na otevřené množině, jsou zde stejné, tj. platí*

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial x}.$$

Vzhledem k této větě existují jenom tři druhé parciální derivace. Je tedy bezpečné psát

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2},$$

nebo

$$f''_{xx}, \quad f''_{xy}, \quad f''_{yy}.$$

Z ptací perspektivy

- U měnicích se veličin běžně udáváme, jak se změní za jednotku času nebo jak se změní na jednotce délky. Například o kolik vzroste teplota za hodinu. Pomocí parciálních derivací můžeme tyto změny sledovat a popsat jejich okamžité rychlosti. Tato dovednost je nutná pro matematické vyjádření představ, jak fungují vztahy mezi veličinami závislými na více proměnných.
- Parciální derivace udává okamžitou rychlost, s jakou se mění funkce více proměnných při změně vybrané nezávislé proměnné. Tedy je to změna funkčních hodnot při změně jedné nezávislé proměnné o jednotku a zafixování ostatních proměnných. Tato změna se počítá na nekonečně malém intervalu a jedná se tedy o okamžitou rychlost.
- Příroda funguje tak, že děj v daném okamžiku probíhá rychlostí související s aktuálními hodnotami veličin, které mají na děj vliv. Potřebujeme tedy nástroj pro měření rychlosti. Tím je derivace. V případě, kdy výsledek je ovlivněn více vstupními daty, máme funkci více proměnných a parciální derivace, kdy sledujeme vliv každé vstupní veličiny samostatně.
- Přírodní zákony jsou formulovány buď přibližně, pomocí součinů, podílů a průměrných rychlostí, nebo přesně pomocí derivací a okamžitých rychlostí. Nám jde o detailní popis, tj. o přesnou fomrulaci.
- Kvalitativní představa může být, že teplo teče do studenějšího místa a v místě, kam se dodává teplo, roste teplota. Toto je pouze hrubý model. Pomocí parciálních derivací tento děj umíme namodelovat kvantitativně. Můžeme si tak sestavit model, porovnat s experimentem a přesvědčit se, že naše metody kvantitativního vyjádření fyzikálních zákonů jsou správné. Tím si potvrzujeme, že jsou správné naše představy o fungování materiálů.
- V praxi často derivace počítáme pro funkce dané tabulkou. V tomto případě používáme numerickou

aproximaci derivace. Nejčastěji pomocí centrální difference.

Kapitola 2

Gradient

Anotace.

- Umíme pomocí derivace najít rychlost, s jakou se mění veličina, která je objektem našeho zájmu. V této přednášce se zaměříme na prakticky nejlépe využitelný případ, kdy budeme sledovat závislost na prostorových proměnných.
- Aparát představený v této přednášce má smysl zejména ve dvourozměrném a trojrozměrném světě. Budeme schopni sledovat, v jakém směru veličina roste a klesá maximální rychlostí. Tato veličina v mnoha případech determinuje rychlost s jakou probíhají fyzikální procesy typu difuze nebo vedení tepla.
- Obecněji tento aparát slouží k lineární aproximaci funkce. Naučíme se lineární aproximaci použít i pro vektorové funkce. To nám umožní formulovat fyzikální zákony dávající do souvislosti tok a gradient veličiny (spád veličiny) i v případě, kdy tyto vektory nemají stejný směr. Bez této dovednosti se neobjedeme, chceme-li realisticky popsat vlastnosti anizotropních materiálů. Při této příležitosti zjistíme, že některé fyzikální veličiny mají při vyjádření v souřadnicích podobu matic. Zpravidla na ně odkazujeme jako na tenzorové veličiny.
- Jako vedlejší produkt slouží gradient k nalezení lokální extrémů funkce.

Prerekvizity.

- Navážeme na znalosti parciálních derivací z minulé přednášky.
- Pro efektivní formulaci využijeme maticový součin. Ten většina studentů pozná v úvodních přednáškách z matematiky. Například [zde](#).
- Před snahou o lineární aproximaci funkce více proměnných je vhodné si zopakovat **lineární aproximaci funkce jedné proměnné**.

Opakování

Vrstevnice

- Pro funkci dvou proměnných jsou vrstevnice křivky, které spojují místa se stejnou funkční hodnotou.

Geometrie

- Skalární součin dvou vektorů je definován vztahem

$$(u_1, u_2) \cdot (v_1, v_2) = u_1 v_1 + u_2 v_2.$$

Pro kolmé vektory je skalární součin nulový. Má-li jeden z vektor jednotkovou délku, je skalární součin průmětem druhého vektoru do směru daného uvažovaným jednotkovým vektorem.

Lineární algebra

manimp:MatrixMultiplication|Maticové násobení.

- Součin matice a vektoru je lineární kombinace sloupců matice, přičemž koeficienty této kombinace jsou složky vektoru. Viz následující příklad.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \end{pmatrix}$$

- Matice je možno chápat jako zobrazení mezi vektorovými prostory. Vektor můžeme pomocí matice zobrazit na jiný vektor. Zachovávají se přitom důležité vlastnosti, jako se přitom rovnoběžnost a poloha středu úsečky.
- Matice je možno použít pro přepočet vektorů a tenzorů do jiné soustavy souřadnic.
- Pokud se vektor zobrazí na svůj násobek, nazývá se vlastní vektor a tento násobek je vlastní číslo.

$$A\vec{v} = \lambda\vec{v}$$

- Matice s vlastními vektory se směru souřadných os je diagonální. Skutečně, například použitím definice

maticového součinu a použitím definice vlastního vektoru a čísla dostáváme

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

To si vynutí $c = 0$. Podobně bychom dostali pro vektor ve směru druhé osy $b = 0$.

Diferenciální operátory

Parciální derivace se vyskytují ve většině důležitých rovnic popisujících fyzikální svět okolo nás. Vztahy ze středoškolské fyziky nebo tabulek pro inženýry jsou jenom důsledky odvozené pro hodně speciální situace. Všude tam, kde se zajímáme o fyzikální podstatu děje a máme ambice popsat děj přesně, nestačí středoškolský aparát, protože je nutné pracovat s okamžitou rychlostí změn fyzikálních veličin. A tyto jsou vyjádřeny právě parciálními derivacemi.

Parciální derivace umožňují sledovat závislost stavových veličin v závislosti na souřadnicích nebo čase, a to pro každou souřadnici samostatně. Nicméně souřadný systém je něco, co do popisu vnášíme uměle a proto by fyzikální proces neměl být na tomto souřadném systému závislý. *Proto často spojujeme parciální derivace do složitějších výrazů – diferenciálních operátorů. Zde teprve vynikne síla parciálních derivací.*

Gradient

<https://youtu.be/9RwaJnV5TUs>

Definice (gradient). *Gradient* skalární funkce dvou proměnných $f(x, y)$ je vektorové pole označené a definované následovně.

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right)$$

Podobně je definován gradient skalární funkce tří proměnných $f(x, y, z)$.

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right)$$

Význam a postavení gradientu ilustruje následující příklad, který je poté zobecněn do poznámky shrnující fyzikální význam gradientu.

Příklad. Pokud je teplota v rovině v bodě (x, y) dána předpisem

$$T = (x^2 - xy^2)^\circ\text{C},$$

je gradientem vektor

$$\nabla T = (2x - y^2, -2xy)^\circ\text{Cm}^{-1}.$$

V bodě $(1, 1)$ je gradient

$$\nabla T(1, 1) = (1, -2)^\circ\text{Cm}^{-1}.$$

To znamená, že v tomto bodě roste teplota ve směru osy x rychlostí jeden stupeň Celsia na každý metr délky a ve směru osy y klesá rychlostí dva stupně Celsia na každý metr délky. Vektor definovaný tímto gradientem má směr doprava dolů (pod úhlem splňujícím podmínku $\tan \varphi = -2$) a délku $\sqrt{(1)^2 + (-2)^2} = \sqrt{5} \approx 2.2$. To znamená, že maximální nárůst teploty je směrem doprava dolů a tento nárůst je 2.2 stupně Celsia na každý metr délky.

Poznámka (fyzikální význam gradientu). Gradient skalární veličiny f je vektorová veličina, která vyjadřuje směr a intenzitu maximálního růstu veličiny f . Přesněji, výsledkem gradientu je vektor ve směru maximálního růstu veličiny f . Délka tohoto vektoru je nárůst veličiny f na intervalu jednotkové délky. Pro rovnoměrně rozloženou veličinu v prostoru (konstantní) je gradient nulový. Proto je možné gradient chápat jako míru nerovnoměrného rozložení veličiny v prostoru. Řada fyzikálních dějů probíhá tak, že tato nerovnoměrnost vyvolá proudění, které se snaží tuto nerovnoměrnost vyrovnat. Například vedení tepla vyrovnává nerovnoměrné rozložení teploty a difuze vyrovnává nerovnoměrnosti v koncentraci. Teplota se vyrovnává tak, že teplo teče z místa s vysokou teplotou do místa s malou teplotou. Difuze směřuje z místa s vyšší koncentrací do místa s nižší koncentrací. V praxi nás proto většinou místo směru maximálního růstu zajímá směr maximálního poklesu, tj. $-\nabla f$.

Symbol ∇ je operátor nabla definovaný formálně vztahem

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

nebo

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right)$$

(v závislosti na počtu proměnných funkce f). “Násobení” $\frac{\partial}{\partial x}$ s funkcí f přitom chápeme jako parciální derivaci $\frac{\partial f}{\partial x}$.

Někdy je vhodné formulovat fyzikální zákony pomocí prostředků lineární algebry, zejména pomocí maticového součinu. V takovém případě gradient zapisujeme jako sloupcový vektor.

Gradient úzce souvisí s vrstevnicemi, s křivkami, které spojují místa se stejnou funkční hodnotou funkce dvou proměnných. Někdy místo pojmu vrstevnice používáme výraz, který obsahuje i povahu sledované veličiny, například se používají názvy jako izotermy, izobary, hydroizopsy, hydroizopiezy atd. Pro funkce tří proměnných máme plochy spojující místa se stejnou funkční hodnotou ekvipotenciální plochy. Gradient je v každém bodě kolmý k vrstevnici (ve 2D) resp. k ekvipotenciální ploše (ve 3D). [Nakreslit online.](#)

Poznámka (linearita gradientu). Gradient zachovává součet a násobení konstantou, tj. pro libovolné funkce f a g a konstantu c platí

$$\nabla(f + g) = \nabla f + \nabla g, \quad \nabla(cf) = c\nabla f.$$

Gradient v přírodě

<https://youtu.be/Mpb4EAdIPPM>

- V matematice se gradientem rozumí vektor z parciálních derivací podle všech proměnných. V aplikacích tomu bývá poněkud jinak. Často je funkce popisující studovaný systém funkcí času i prostorových proměnných. V takovém případě gradientem rozumíme vektor složený jenom z parciálních derivací podle prostorových proměnných. Čas při výpočtu gradientu za proměnnou nepovažujeme.
- V jednorozměrném případě je gradient totéž co derivace. Přesto se někdy z tradičních důvodů respektujících zvyklosti oboru nemluví o derivaci, ale o gradientu. Například mluvíme o gradientu teploty při studiu *tepelně izolačních vlastností* materiálů. Pokud máme na mysli vrstvu z jednoho materiálu (a ne například sendvičovou stěnu), je rozložení teploty lineární a dokonce v tomto případě pojmem gradient vlastně označujeme směrnici přímků.
- S gradientem souvisí *majáková navigace* při migraci živočichů. Ti sledují určitý chemický podnět a pohybují se ve směru největšího růstu tohoto podnětu. Tedy ve směru gradientu. Například žralok ve vodě takto sleduje koncentraci krve.
- Pokud se zajímáme nejenom o směr, ale i velikost gradientu, pomůže nám velikost gradientu k posouzení rychlosti změny veličiny v prostoru (gradient je velký, jestliže se funkce mění rychle a jsou-li tím pádem vrstevnice nahusto).
- Při proudění podzemní vody sledujeme hydroizohypsy, křivky spojující místa se stejnou hladinou podzemní vody nebo obecněji se stejnou piezometrickou výškou. Tok vody je v homogenním prostředí kolmý na tyto křivky a intenzivní podle hustoty křivek. Zjednodušeně řečeno, i podzemní voda má snahu téct “z kopce”, ale “z kopce” je ve smyslu nejrychlejšího poklesu piezometrické výšky. Anizotropní prostředí tento tok může odklánět do směru, ve kterém půda klade toku podzemní vody menší odpor. Podobně jako dřevo stáčí tok tepla nebo vlhkosti do podélného směru.

Lineární aproximace

Z diferenciálního počtu funkcí jedné proměnné víme, že platí přibližný vzorec

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Tento vzorec rozšíříme do světa funkcí více proměnných a do světa vektorových funkcí.

<https://youtu.be/3wTwWTtbkis>

Lineární aproximace skalární funkce

- Lineární aproximací funkce $z = f(x, y)$ v bodě (x_0, y_0) je

$$f(x, y) \approx f(x_0, y_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}(y - y_0)$$

nebo (vyjádřeno pomocí skalárního součinu a gradientu)

$$f(x, y) \approx f(x_0, y_0) + \nabla f(x_0, y_0) \cdot (x - x_0, y - y_0).$$

- Tečná rovina ke grafu funkce $z = f(x, y)$ vedená bodem $[x_0, y_0, z_0]$, kde $z_0 = f(x_0, y_0)$ má rovnici

$$z = z_0 + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}(y - y_0),$$

nebo (vyjádřeno pomocí gradientu)

$$z = z_0 + \nabla f(x_0, y_0) \cdot (x - x_0, y - y_0).$$

Lineární aproximace vektorové funkce

Lineární aproximací vektorové funkce je lineární aproximace jednotlivých komponent. To jsou skalární funkce a je na ně možné aplikovat postup z předchozího bodu. Tedy pro funkci $\vec{F}(x, y) = f_1(x, y)\vec{i} + f_2(x, y)\vec{j}$ máme v bodě (x_0, y_0) lineární aproximace

$$f_1(x, y) \approx f_1(x_0, y_0) + \frac{\partial f_1(x_0, y_0)}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial f_1(x_0, y_0)}{\partial y}(y - y_0)$$

a

$$f_2(x, y) \approx f_2(x_0, y_0) + \frac{\partial f_2(x_0, y_0)}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial f_2(x_0, y_0)}{\partial y}(y - y_0).$$

Tyto dva vztahy je možné zapsat jako jeden vektorový vztah ve tvaru

$$\begin{pmatrix} f_1(x, y) \\ f_2(x, y) \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} f_1(x_0, y_0) \\ f_2(x_0, y_0) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(x_0, y_0) \end{pmatrix} (x - x_0) + \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial f_2}{\partial y}(x_0, y_0) \end{pmatrix} (y - y_0).$$

Tento vektorový vztah je možné zapsat s použitím maticového součinu místo lineární aproximace. Tím získáváme vztah ve tvaru

$$\begin{pmatrix} f_1(x, y) \\ f_2(x, y) \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} f_1(x_0, y_0) \\ f_2(x_0, y_0) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(x_0, y_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix}.$$

Po přeznačení dostáváme

$$\vec{F}(x, y) \approx \vec{F}(x_0, y_0) + J(x_0, y_0) \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix},$$

kde

$$J(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(x, y) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(x, y) \end{pmatrix}$$

je Jacobiho matice funkce $\vec{F}$.

V materiálovém inženýrství často provádíme linearizaci v okolí nuly a pro funkci, která je v nule nulová. Tedy máme $x_0 = y_0 = \vec{F}(0, 0) = 0$. Výsledná lineární aproximace se poté redukuje na tvar

$$\vec{F}(x, y) \approx J(0, 0) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Vícerozměrné konstitutivní zákony

<https://youtu.be/uTzCAxOOye8>

manim:Eigenvectors|vzfT25D6Zz8|Připomenutí vlastních směrů matice

manim:Flow|PzFh8f9Qzf8|Tok v anizotropních materiálech je ve směru opačném než gradient jenom v případě, že se jedná o vlastní směr.

Konstitutivní vztahy tvoří z hlediska materiálového inženýrství jednu z nejdůležitějších aplikací gradientu. Tyto vztahy dávají do vzájemné relace gradient stavové veličiny, pomocí níž charakterizujeme stav studovaného objektu, a tok, který se snaží zahladit nerovnoměrnost v rozložení stavové veličiny. Například při nerovnoměrném rozložení koncentrace látky se tato koncentrace vyrovnává difuzním tokem. Při nerovnoměrném rozložení vnitřní energie v systému se tato nerovnoměrnost navenek projevuje rozdílnými teplotami v různých částech tělesa a vyrovnává tokem tepla. Při různých piezometrických hladinách podzemní vody (hladina podzemní vody se započtením případného tlaku a dalších parametrů majících vliv na proudění vody) se tato nerovnoměrnost vyrovnává prouděním podzemní vody.

Zákony uvedené níže byly často odvozeny v jednorozměrném případě. V moderní formulaci používáme obecný vektorový zápis, který zohledňuje i směr. Zpravidla je

možné použít pro tento konstitutivní vztah lineární aproximaci a proto se vlastně jedná o násobení vektoru maticí. Tato matice umožní nejenom změnit délku vektoru a jeho jednotku, ale i směr. Matice se navíc při změně báze transformuje speciálním způsobem, tak jako vektory. Takové objekty nazýváme **tenzory**. Níže budeme pojmem tenzor rozumět matici 3×3 nebo 2×2 , podle kontextu. (Obecněji je možno považovat skalární veličiny a vektory za tenzory nižších řádů, toto my však dělat nebudeme.)

Aby měly konstitutivní vztahy níže smysl, uvažujeme v nich gradient jako sloupcový vektor.

Fickův zákon (difuze)

V roce 1855 německý lékař A. Fick objevil, že difuzní tok $\vec{J}$ (množství látky které projde při difuzi jednotkovou plochou za jednotku času) je úměrný gradientu koncentrace c této látky. Vyjádřeno moderní terminologií to znamená, že platí

$$\vec{J} = -D \nabla c.$$

Veličina D se nazývá difuzní koeficient. Pokud má $\vec{J}$ stejný směr jako ∇c , je D skalární veličina. Pokud směry nejsou stejné, je D tenzor. Z fyzikálních důvodů je tenzor D symetrický.

Difuzí se například dřevo zbavuje vlhkosti při vysoušení.

Darcyho zákon (proudění podzemní vody)

V letech 1855 a 1856 francouzský inženýr H. Darcy pokusy prokázal přímou úměru mezi rozdílem tlaků na koncích trubice naplněné porézní zeminou (jednalo se vlastně o rozdíl výšek pro šikmou trubici) a rychlostí proudění vody touto trubicí. Pro tok podzemní vody je vhodné rozdíly tlaků vyjadřovat pomocí veličiny nazývané *piezometrická výška* h . Do této veličiny se počítá vliv nadmořské výšky, tlaku geologických vrstev a případné další efekty. Tok (množství vody, která proteče jednotkovou plochou za jednotku času) je dán vztahem

$$\vec{q} = -K \nabla h,$$

kde h je piezometrická výška a K je koeficient filtrace. Veličina K je v obecném případě symetrický tenzor. V izotropním případě má tok $\vec{q}$ opačný směr než gradient veličiny h a v takovém případě se K redukuje na skalární hodnotu.

Fourierův zákon (vedení tepla)

Fourierův zákon se týká vedení tepla a vyjadřuje, že vektor hustoty tepelného toku $\vec{q}$ je úměrný záporně vzatému gradientu teploty ∇T , tj.

$$\vec{q} = -k \nabla T.$$

Je-li materiál anizotropní, což je nejobecnější případ, je veličina k symetrickým tenzorem. Je-li materiál izotropní,

je k skalární veličinou, případně skalární veličina násobená jednotkovou maticí, pokud potřebujeme zachovat její maticový charakter. Veličina k se nazývá součinitel tepelné vodivosti, koeficient tepelné vodivosti nebo Fourierův koeficient.

Různé podoby Fourierova zákona

V souvislosti s Fourierovým zákonem prodiskutujeme různé tvary konstitutivních zákonů. Tento zákon udává tok tepla vyvolaný teplotním gradientem. Je to velmi používaný zákon a proto má několik variant. Začneme od nejjednodušší formulace (F.1), kterou můžeme formulovat pomocí základních matematických operací, násobení a dělení. Tento tvar se snadno používá, ale je vhodný jenom pro jednoduché výpočty, jako například teplotní únik stěnou domu. Složitější formulace (F.2) a (F.3), využívající derivace, dokáží modelovat i to, co se děje uvnitř stěny a jak vypadá teplotní profil. Nejsou však užitečné při studiu vedení tepla v rovině nebo v prostoru. K tomu je nutno použít ještě obecnější (a složitější) formulaci (F.4), využívající gradient místo derivace. I zde jsou však omezení: je-li součinitel tepelné vodivosti skalární hodnota, je možné takto spolehlivě modelovat pouze izotropní materiály. Není možné zohlednit skutečnost, že v některém směru je přenos tepla snadnější než ve směru jiném. Tuto nesnáž odstraňuje až nejobecnější tenzorová formulace (F.5), která kromě gradientu používá i tenzorový tvar součinitele tepelné vodivosti a díky tomu dovoluje modelovat i anizotropní materiály.

- Jednodimenzionální tvar, kde se nezohledňuje směr toku tepla ani rozložení teploty je

$$q = \lambda \frac{\Delta T}{\Delta x}, \quad (\text{F.1})$$

kde λ je materiálová konstanta, q je tok tepla, ΔT je teplotní rozdíl na vrstvě materiálu tloušťky Δx . Toto je nejjednodušší tvar, umožňující základní výpočty i aparát střední školy, jako například teplotní ztráty stěnou.

- Zohledníme-li v předešlé formulaci i směr toku tepla (proti růstu teploty, tj. z horkého místa do místa studeného), má Fourierův zákon tvar

$$q = -\lambda \frac{\Delta T}{\Delta x}. \quad (\text{F.2})$$

- Zohledníme-li v předešlé formulaci i možnost, že teplotní profil je nerovnoměrný, musíme změnu teploty počítat derivací místo podílu a poté má Fourierův zákon tvar

$$q = -\lambda \frac{dT}{dx}. \quad (\text{F.3})$$

- Chceme-li v předešlé formulaci zachytit i vedení tepla v rovinném materiálu či v trojrozměrném tělese, musíme derivaci teploty nahradit gradientem a poté má Fourierův zákon tvar

$$\vec{q} = -\lambda \nabla T. \quad (\text{F.4})$$

V souřadnicích potom

$$q_i = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x_i}.$$

- Chceme-li v předešlé formulaci zachytit i vedení tepla v anizotropním materiálu (v různých směrech různé vlastnosti), má Fourierův zákon formálně opět tvar

$$\vec{q} = -\lambda \nabla T, \quad (\text{F.5})$$

ale veličina λ už není skalární veličina, je to matice. V souřadnicích potom

$$q_i = -\sum_j \lambda_{ij} \frac{\partial T}{\partial x_j}.$$

Tento vztah se zpravidla zapisuje pomocí zkrácené Einsteinovy notace (přes opakovaný index se počítá a vynechává se znaménko pro sumu) ve tvaru

$$q_i = -\lambda_{ij} \frac{\partial T}{\partial x_j}.$$

Tvar (F.5) je nejobecnější. Pokud je materiál izotropní, redukuje se (F.5) na (F.4). Pokud je úloha jednodimenzionální, redukuje se (F.4) a (F.5) automaticky na (F.3). Pokud teplota roste lineárně, je možno derivaci vypočítat pomocí podílu a úloha se dále redukuje na (F.2) nebo (pokud nás zajímá velikost a ne směr) na (F.1).

Tvar zákona	Počet dimenzí	Funguje pro anizotropní materiály	Zachytí i nelineární průběh teploty	Udává směr toku tepla	Odlišnost případě vyjádření od předchozí formule (o řádek výše)	2D
$q = \frac{\Delta T}{\Delta x}$	1	Nemá smysl	Ne	Ne	-	$\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z} \right)^T$
$q = -\lambda \frac{\Delta T}{\Delta x}$	1	Nemá smysl	Ne	ANO	Obecný případ (anizotropní) Znaménko Veličina K je matice $K = \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{pmatrix}$ fakt, že teplo teče od horkého konce, jejíž komponenty splňují $k_{ij} = k_{ji}$. Často jsou všechny veličiny kladné a prvky v hlavní diagonále jsou dominantní. studenému Derivace podle x (jedno- roz- měrný gradi- ent) místo podílu Jedno- gradi- ent je nahra- zen Ortotropní případ, vhodně zvolené osy obec- V obecném případě je zpravidla možné transformovat ným soustavu souřadnic tak, aby tenzor K byl diagonální. Po- gradien- tud je studovaný problém ortotropní, má charakteristické tem. směry (přesněji, má tři roviny symetrie materiálových Tok vlastností), bude tato diagonalita tenzoru K v případě, že vektor zvolíme souřadnice v souladu s těmito charakteristickými směry. $K = \begin{pmatrix} k_{11} & 0 & 0 \\ 0 & k_{22} & 0 \\ 0 & 0 & k_{33} \end{pmatrix}$	
$\vec{q} = -\lambda \nabla T$ λ skalár	Libovolný	Ne	ANO	ANO	ANO	komponenty vektoru $\vec{j} = (j_x, j_y, j_z)^T$ jsou $j_x = -k_{11} \frac{\partial u}{\partial x} - k_{12} \frac{\partial u}{\partial y} - k_{13} \frac{\partial u}{\partial z},$ $j_y = -k_{21} \frac{\partial u}{\partial x} - k_{22} \frac{\partial u}{\partial y} - k_{23} \frac{\partial u}{\partial z},$ $j_z = -k_{31} \frac{\partial u}{\partial x} - k_{32} \frac{\partial u}{\partial y} - k_{33} \frac{\partial u}{\partial z},$ což zjistíme prostým maticovým násobením. Prostor pro nás tipu není.
$\vec{q} = -\lambda \nabla T$ λ tenzor (matice)	Libovolný	ANO	ANO	ANO	ANO	Material- charak- teris- tika λ je matice.

Komponenty vektoru $\vec{j}$ jsou potom dány vztahy

$$j_x = -k_{11} \frac{\partial u}{\partial x},$$

$$j_y = -k_{22} \frac{\partial u}{\partial y},$$

$$j_z = -k_{33} \frac{\partial u}{\partial z}.$$

Speciální případy vztahu mezi gradientem a tokem

<https://youtu.be/vrPhbc-GJqc>

Uvažujme vztah mezi gradientem a tokem ve tvaru

$$\vec{j} = -K \nabla u,$$

kde K je symetrický tenzor. Gradient má ve trojrozměr-

S diagonální maticí se pracuje velmi dobře, protože má v hlavní diagonále vlastní čísla. Tato vlastní čísla jsou fyzikální charakteristikou úlohy. Například největší vlastní

číslo a odpovídající vlastní směr charakterizují směr, ve kterém je odezva materiálu na vnější podnět maximální a vlastní číslo udává velikost této reakce. Tyto fyzikální charakteristiky nemohou být závislé na volbě souřadné soustavy, ve které úlohu popisujeme. Co se mění s volbou souřadné soustavy jsou pouze souřadnice vlastního vektoru. Vlastní čísla jsou však skalární a proto jsou invariantní při otočení soustavy souřadnic. Pokud bychom neměli možnost zvolit soustavu souřadnic tak, aby matice byla diagonální, máme alespoň jistotu, že vlastní čísla zůstanou stejná.

Ortotropní případ ve 2D

Stejně jako ve 3D, pouze chybí třetí rovnice.

Izotropní případ

Stejně jako ortotropní případ, ale navíc platí $k_{11} = k_{22} = k_{33} = k$. Potom $\vec{j} = -k\nabla u$, kde k je konstanta a vektory toku a gradientu mají opačný směr. V tomto případě, na rozdíl od ortotropního případu, nezávisí na volbě souřadné soustavy, tenzor materiálových vlastností se redukuje na jednorozměrnou konstantu v libovolné souřadné soustavě. Toto je nejjednodušší případ. Proto je studium izotropních materiálů mnohem mnohem jednodušší, než studium materiálů obecnějších. To je nejzásadnější vlastnost, která činí studium biologických materiálů mnohem komplikovanějším, než je třeba studium vlastností kovů. Biologické materiály mají typicky určitou vnitřní strukturu, která jim dává v různých směrech různé vlastnosti. Postupy odvozené pro izotropní materiály zde nefungují.

Tečna k vrstevnici

<https://youtu.be/tc8pmUNyhHl>

Vydeme z rovnice pro tečnou rovinu v bodě (x_0, y_0) , který je na vrstevnici na úrovni nula, tj. platí $f(x_0, y_0) = 0$. V řezu vodorovnou rovinou $z = 0$ z grafu funkce a z tečné roviny zůstanou vrstevnice na úrovni nula a tečna k vrstevnici v bodě (x_0, y_0) . Rovnici tečny získáme dosazením $z = 0 = z_0$ do rovnice tečné roviny.

$$0 = \nabla f(x_0, y_0) \cdot (x - x_0, y - y_0).$$

Implicitně definovaná funkce

Pokud tečna k vrstevnici není rovnoběžná s osou y , je možno vrstevnici chápat jako graf funkce jedné proměnné. Taková funkce je do jisté míry určena jednoznačně, jak ukazuje následující věta.

Věta (o implicitní funkci). Uvažujme funkci $f(x, y)$ dvou proměnných, splňující v nějakém bodě (x_0, y_0) podmínku $f(x_0, y_0) = 0$ a mající v okolí bodu (x_0, y_0) spojitě parciální derivace. Platí-li

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} \neq 0,$$

je rovnici

$$f(x, y) = 0$$

v okolí bodu (x_0, y_0) implicitně určena právě jedna spojitá funkce $y = g(x)$.

Lokální extrémy funkce více proměnných

Pro funkce více proměnných definujeme **lokální extrémy** stejně jako pro funkce jedné proměnné. Funkce má tedy v daném bodě **lokální minimum**, pokud v nějakém okolí tohoto bodu neexistuje bod s menší funkční hodnotou. Funkce má v bodě **lokální maximum**, pokud v okolí tohoto bodu neexistuje bod s vyšší funkční hodnotou.

Funkce jedné proměnné určitě nemá lokální extrém v bodě, ve kterém má kladnou derivaci (protože tam funkce roste). Stejně tak nemá lokální extrém v bodě, ve kterém má zápornou derivaci (protože tam funkce klesá). Derivace v bodě lokálního extrému tedy musí být buď nulová nebo nesmí existovat. Stejná myšlenková úvaha se dá provést pro křivky vzniklé na svislých řezech funkce dvou proměnných. Proto platí následující věta.

Věta (Fermatova nutná podmínka pro lokální extrémy). Jestliže funkce více proměnných má v nějakém bodě svůj lokální extrém, pak každá parciální derivace, která v tomto bodě existuje, je nulová.

V bodě lokálního extrému hladké funkce je tedy nulový gradient.

Tenzor malých deformací

Na závěr jedna aplikace z oblasti parciálních derivací a lineárních aproximací vektorových funkcí více proměnných. Ukážeme si, že parciální derivace jsou vhodné k popisu deformací.

Vektorovou funkci je možné chápat jako zobrazení roviny do sebe. Toto zobrazení může odpovídat transformaci tělesa, působením síly. Popíšme tuto deformaci vektorem $\vec{U}(x_1, x_2) = (u_1(x_1, x_2), u_2(x_1, x_2))$. Tento vektor udává posunutí bodu o souřadnicích (x_1, x_2) vlivem působící síly. Pokud je tato vektorová funkce nulová, s tělesem se nic

neděje, každý jeho bod zůstává na místě. Pokud je konstantní, každý bod se posune stejně a jedná se o posun, bez změny tvaru. V obecném případě však tato funkce konstantní není. Lineární aproximací v bodě (x_1, x_2) dostáváme

$$\vec{U}(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2) \approx \vec{U}(x_1, x_2) + J(x_1, x_2) \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \end{pmatrix}.$$

Člen $\vec{U}(x_1, x_2)$ je posunutí. Tento člen nás při studiu deformace nezajímá, nesouvisí se změnou tvaru. Zajímá nás až druhý člen, obsahující zkombinované deformaci a pootočení. Toto pootočení musíme z druhého členu eliminovat. Uděláme to tak, že člen rozdělíme na část obsahující pootočení a zbytek, související se změnou tvaru. Nás bude zajímat až tento zbytek.

Pokud matici $J(x_1, x_2)$ rozdělíme na součet symetrické a antisymetrické matice, dostaneme matici, odpovídající změně tvaru a matici, odpovídající pootočení. Pootočení (antisymetrická část) nás nezajímá, zajímá nás jenom změna tvaru. Obecný postup, jak rozdělit matici na součet symetrické a antisymetrické matice je

$$A = \frac{A + A^T}{2} + \frac{A - A^T}{2}.$$

První matice v tomto součtu je symetrická a druhá antisymetrická. Pro Jacobiho matici dostáváme

$$\frac{J + J^T}{2} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \end{pmatrix}.$$

Tato matice popisuje změnu tvaru a nazývá se **tenzor malých deformací**. Ten se ještě někdy rozděluje na součet vhodného konstantního násobku jednotkové matice (souvisí se zvětšením nebo zmenšením, tj. se změnou objemu) a deviátor (souvisí se změnou tvaru bez započtení zvětšení či zmenšení).

Pro využití v dřevařských úlohách viz též A. Požgaj, Štruktúra a vlastnosti dřeva str 318 nebo P. Horáček, Fyzikální a mechanické vlastnosti dřeva I, str. 40. Analogicky jako tenzor deformace je definován tenzor rychlosti přetvoření (deformační rychlost) používaný v hydrodynamice. Můžeme jej dostat jako derivaci tenzoru malých deformací (při studiu deformací), nebo jako **symetrickou část** matice vytvořené gradienty jednotlivých komponent rychlosti proudění. Pro proudění vody viz J. Říha, Matematické modelování hydrodynamických a disperzních jevů, kap. 3.3.

Obrázky a online výpočty.

Z ptačí perspektivy

- Parciální derivace z minulé přednášky sleduje vliv každé vstupní proměnné na funkční hodnotu funkce

samostatně. Gradient se snaží podchytit informaci od všech prostorových proměnných současně do vektoru, který míří směrem maximálního růstu funkčních hodnot a má velikost odpovídající nárůstu na intervalu jednotkové délky.

- Pomocí gradientu dokážeme formulovat lineární aproximaci funkce. U vektorových funkcí tuto aproximaci můžeme formulovat pro každou komponentu samostatně a dostáváme tak nástroj, jak pomocí maticového násobení aproximovat funkční vztahy, kde na vstupu i na výstupu je vektor. Tím získáme jednotný popis všech materiálových vztahů, kde vektorová veličina, která je podnětem, vyvolává jako odezvu jinou vektorovou veličinu. Například pokles teploty, definovaný směrem a intenzitou, vyvolává tok tepla odpovídajícím směrem a odpovídající intenzitou.

Kapitola 3

Divergence

Anotace.

- Představíme si univerzální nástroj umožňující popsat libovolný transportní děj v přírodě. Tedy transport energie (vedení tepla), transport vody (sušení dřeva, proudění podzemní vody, proudění tzv. mělké vody) a transport látky obecně (pohyb sedimentů, pohyb tektonických vrstev).
- Aparát z této přednášky se věnuje základním principům transportních dějů. Budeme se zaměřovat především na transport energie nebo látky materiálem. Naučíme se základní představu o fungování těchto dějů naformulovat matematicky. Vzniklé rovnice řešit nebudeme, což vůbec nevádí. Řešení za nás zvládnou počítače. Role člověka je nezastupitelná při tom nejdůležitějším, při formulaci modelu. To bude i naším hlavním úkolem.
- Během analýzy transportních jevů si představíme nový diferenciální operátor: operátor divergence. Divergence vyjadřuje, zda tok zesiluje a nabírá na intenzitě (tj. z daného místa více vytéká, než teče dovnitř) nebo naopak.

Prerekvizity.

- Navážeme na využití vektorových funkcí a gradientu k popisu transportu látky nebo energie prostředím.
- Ukážeme si, jak se v matematickém popisu transportu zohlední izotropie nebo homogenita materiálu. Ukážeme si, jak se liší popis stacionárních a nestacionárních jevů a jak se liší popis materiálů s lineárními a nelineárními materiálovými vlastnostmi. Pokud se budete při používání nematematických pojmů (jako například izotropie) cítit zaskočení, můžete si oživit znalosti například na Wikipedii.
- Rovnici vedení tepla v jedné dimenzi, kterou jsme si odvodili v úvodní přednášce, si zobecníme do dvou- a třídimenzionálního tvaru. Je proto vhodné si základní fakta o této rovnici zopakovat.

Transportní děje

<https://youtu.be/p1Qu89EKc94>

Pochopení a modelování transportních dějů je důležité pro většinu technických oborů. Podstata těchto dějů je často odlišná, přesto mají navenek podobné chování a tím je umožněn jednotný přístup při matematickém modelování.

Příklady transportních dějů:

- pohyb povrchové vody,
- pohyb podzemní vody,
- vedení tepla,
- transport vody ve dřevě.

Obecná bilance veličiny, která má zdroje a spotřebiče a je přenášena tokem vypadá následovně.

- Existuje veličina, spojitě rozložená v prostoru, charakterizující stav systému. Tuto veličinu budeme nazývat *stavovou veličinou*. Její hustotu označíme u .
- Stavová veličina se může v prostoru přemísťovat *tokem* j .
- Stavová veličina může vznikat a zanikat. *Zdroje* i *spotřebiče* budeme uvažovat společně a jejich vydatnost rozlišíme znaménkem: spotřebiče budou zdroje se zápornou vydatností. Celkovou vydatnost zdrojů a spotřebičů v daném místě, tj. množství veličiny vygenerované za jednotku času v jednotce objemu (nebo plochy, nebo délky, podle počtu dimenzí v úloze), označíme σ .

Zákon zachování (se zohledněním toku a zdrojů) je vlastně celková bilance stavové veličiny v daném místě. Přírodním jazykem je možno tuto bilanci formulovat následovně.

Přírůstek množství veličiny je součtem přírůstku způsobeného tokem a přírůstku ze zdrojů. Akumulace je přítok plus zisk z interních zdrojů.

Toto je jednoduchý, ale přitom neuvěřitelně silný nástroj. Umožní jednotným způsobem popsat řadu zcela odlišných dějů. Pro použití v matematickém modelu ale musíme jednotlivé pojmy nejprve kvantifikovat. Měřit rychlost změny množství veličiny v daném místě umíme pomocí derivace podle času. Měřit změny v *jednodimenzionálním* toku přenášejícím sledovanou veličinu jsme se naučili jako jednu z prvních aplikací partiálních derivací: jedná se o derivaci toku podle prostorové proměnné. Ještě se

musíme naučit měřit změny v toku ve dvou nebo třech dimenzích.

Změna toku vektorového pole

<https://youtu.be/cXT6ULeZFJs>

Budeme sledovat tok vektorového pole a bude nás zajímat, o kolik se tok v daném místě mění.

- Pro jednoduchost rozdělíme tok na tři nezávislé části ve směru jednotlivých os a vztáhneme vše k jednotkám času a průřezu. Tedy budeme uvažovat hustotu toku stavové veličiny.
 - Je-li tato hustota toku popsána vektorovým polem $\vec{q} = (P, Q, R)$ například v jednotkách kilogram na metr čtvereční za sekundu, znamená to, že kolmým průřezem jednotkového obsahu projde za jednotku času P kilogramů sledované látky, jejíž tok popisujeme.
 - Často se pracuje i s objemovým tokem, kdy množství neměříme v kilogramech ale v metrech krychlových a například při ustáleném proudění v trubici (hydrodynamika) je tok roven vektoru rychlosti a při proudění porézním materiálem (proudění podzemní vody) je roven filtrační rychlosti.
- Uvažování toku v souřadnicích nám umožní tok rozdělit na tři nezávislé toky ve směru jednotlivých os (případně na dva toky ve dvoudimenzionálních úlohách). Můžeme si pro jednoduchost představit tři trubky. Každá trubka míří ve směru jedné z os.
 - Funkce P udává tok v trubce mířící směrem v ose x (v kladném směru kladný tok a naopak) a potřebujeme zjistit, jestli tento tok narůstá nebo slábne. To jsme již řešili v případě toku tepla u rovnice vedení tepla v úvodní přednášce. Derivace $\frac{\partial P}{\partial x}$ udává, o kolik studovaná komponenta toku v daném místě vzroste a tento nárůst je vztážen na jednotku délky.
 - Ve směru osy y máme tok vyjádřený veličinou Q a proto nás pro popis zesilování či zeslabování zajímá $\frac{\partial Q}{\partial y}$.
 - Analogicky $\frac{\partial R}{\partial z}$ ve směru osy z .
- Celková změna toku bude součtem všech tří příspěvků.
 - Pokud je součet kladný, znamená to, že tok zesiluje. V takovém případě je převaha toku ven. Z daného místa více veličiny vytéká, než kolik teče dovnitř.
 - Pokud je součet záporný, je tomu naopak.
 - Nesoulad mezi přítokem a odtokem je možné přičíst na vrub zdrojům a akumulaci stavové veličiny. Záleží na charakteru proudící veličiny a na okolnostech s tímto prouděním spojených. Tuto

informaci nám pro další popis musí dodat externí věda (obecná fyzika, fyzika materiálu, fyzika životního prostředí, hydrologie, pedologie, ...).

- Při preciznější formulaci výše uvedených myšlenek je nutné pracovat s konečně velkým objemem (viz obrázek), vztáhnout výsledek na jednotku objemu a rozměry tohoto objemu limitně stáhnout k nule. Toto však již přesahuje ambice v našem kurzu a jedná se o formalismus, kterému se vyhneme přímým představením hotového výsledku.

Divergence

<https://youtu.be/ejDQx3Qjgfl>

Výše uvedenými úvahami je motivována následující definice a věta. (Definice je maličko nepřesná, protože nemáme nástroje pro pečlivější formulaci. Ale je v ní skryta hlavní myšlenka vedoucí k zavedení pojmu divergence.)

Definice (divergence). Divergence vektorového pole $\vec{F}$ v daném bodě je převis toku vektorového pole z tohoto místa nad tokem do tohoto místa. Tento tok se počítá přes hranici infinitezimálně malého referenčního tělesa a je vztážen na jednotku objemu. Divergenci vektorového pole $\vec{F}$ označujeme $\text{div } \vec{F}$ nebo $\nabla \cdot \vec{F}$.

Věta (výpočet divergence). Pro vektorovou funkci

$$\vec{F} = (P, Q, R) = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k},$$

kde P , Q a R jsou funkce tří proměnných x , y a z vypočteme divergenci vztahem

$$\text{div } \vec{F} = \nabla \cdot \vec{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}.$$

Pro vektorovou funkci dvou proměnných vypočteme divergenci analogicky, pouze chybí třetí člen.

Poznámka (linearita divergence). Divergence zachovává součet a násobení konstantou, tj. pro libovolné vektorové funkce $\vec{F}$ a $\vec{G}$ a konstantu c platí

$$\nabla \cdot (\vec{F} + \vec{G}) = \nabla \cdot \vec{F} + \nabla \cdot \vec{G} \quad \text{a} \quad \nabla \cdot (c\vec{F}) = c\nabla \cdot \vec{F}.$$

Poznámka (fyzikální interpretace divergence). Vektorové pole používáme k modelování toku veličin, které nás zajímají (teplo v materiálu, tekutina nebo chemická látka v materiálu, voda nebo plyn v půdě a podobně). Divergence vektorového pole udává tok z jednotkového objemu látky v daném místě. Udává, jestli se v daném místě a čase tok nabývá na intenzitě (kladná divergence) nebo ustává (záporná divergence). Tento efekt může být

způsoben tím, že veličina přenášená tímto polem se v daném místě buď kumuluje, nebo ubývá a také tím, že daná veličina v bodě může vznikat nebo zanikat.

Divergence je lokální veličina. Udává informaci o proudění v daném bodě. Pro měření však je nutné mít konečný objem a pro stanovení toku konečně velkou hranici. Vzájemný vztah mezi lokální veličinou a konečným objemem je založený na předpokladu, že podmínky se nemění skokem a okolí každého bodu jsou nepříliš odlišné od podmínek v okolních bodech.

Poznámka (fyzikální interpretace divergence v měřitelných pojmech). Tok přes hranici umíme měřit u těles. Zajímá-li nás divergence v nějakém bodě, představíme si okolo tohoto bodu nějaké těleso. Například kouli nebo krychli. Poté určíme tok přes hranici. Tok hranicí ven počítáme kladně a dovnitř záporně. Celkový tok hranicí určíme jako součet přes všechny části hranice. Podíl celkového toku přes hranici tělesa a objemu tohoto tělesa je odhad pro divergenci v daném bodě. Tento odhad je tím přesnější, čím je objem tělesa menší. Naopak, ze známé divergence je možno odhadnout zesílení toku v malé oblasti okolo studovaného bodu jako součin divergence a objemu (nebo obsahu ve 2D) oblasti.

Přesnou divergenci získáme postupem uvedeným v předchozí poznámce, pokud limitním přechodem stáhneme rozměry uvažovaného tělesa k nule.

Pokud se při transportu v daném místě množství veličiny ani tok nemění s časem, mluvíme o stacionárním proudění a stacionárním poli. V takovém případě se situace zjednoduší, protože potom divergence souvisí jenom s přítomností zdrojů a spotřebičů.

Poznámka (praktická interpretace divergence stacionárního pole). Pokud je při ustáleném proudění v některém místě divergence kladná, znamená to, že v tomto místě je zdroj této veličiny. Pokud je záporná, je v daném místě spotřebič. Vektorové pole, jehož divergence je rovna nule, se nazývá **nezřídlové pole**. To proto, že pokud toto pole popisuje stacionární tok, tak se jedná o tok v prostředí bez zdrojů a spotřebičů. (Zkráceně říkáme jenom “bez zdrojů”, protože jak jsme uvedli na začátku, spotřebiče považujeme za zdroje se zápornou vydatností.)

Ze střední školy z fyziky umíme modelovat vektorové pole pomocí siločar. Ty začínají ve zdrojích a končí ve spotřebičích. Siločáry stacionárního nezřídlového pole nikde nezačínají ani nekončí a jsou to uzavřené křivky. Například stacionární magnetické pole je nezřídlové. Absence zdrojů magnetického pole se projevuje tak, že rozříznutím tyčového magnetu vzniknou dva menší plnohodnotné magnety. Nevznikne samostatný jižní pól a samostatný severní pól magnetu. To je rozdíl oproti poli elektrickému, kdy rozdělením tyče s opačně nabitými konci vznikne jedna kladně nabitá a jedna záporně nabitá tyč poloviční délky.

Výpočet divergence

Viz **cvičení**. Jedná se o prosté derivování se následným sečtením derivací.

Rovnice kontinuity

<https://youtu.be/HiOmERpTdV0>

- Přírůstek stavové veličiny za jednotku času v jednotkovém objemu (nebo ploše, nebo délce, podle dimenzionality úlohy) je derivace hustoty u podle času.

$$\text{Přírůstek} = \frac{\partial u}{\partial t}$$

- Přírůstek veličiny v jednotkovém objemu (nebo ploše, nebo délce) za jednotku času způsobený tokem $\vec{j}$ je záporně vzatá divergence vektorového pole $\vec{j}$. Tento přírůstek je způsobený snížením toku, proto ho počítáme jako záporně navýšení, tj. záporně vzatou divergenci.

$$\text{Přírůstek způsobený tokem} = -\nabla \cdot \vec{j}$$

Matematickou formulací celkové bilance je **rovnice kontinuity**.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sigma - \nabla \cdot \vec{j}$$

Poznámka (fyzikální interpretace členů rovnice kontinuity).

- Člen $\frac{\partial u}{\partial t}$ udává, jak rychle se roste hustota stavové veličiny u v daném místě a čase.
- Člen σ udává vydatnost zdrojů stavové veličiny, přičemž spotřebiče jsou uvažovány jako zdroje záporné vydatnosti. Tento člen tedy udává, kolik stavové veličiny v tomto místě vzniká v jednotkovém objemu za jednotku času. Zpravidla neobsahuje derivace podle času a polohy. Může se však měnit s časem, s polohou, nebo s množstvím stavové veličiny. Nemusí být nutně konstantní.
- Člen $\nabla \cdot \vec{j}$ udává v daném bodě změnu ve velikosti proudění přenášejícím stavovou veličinu. Přesněji, udává, o kolik více veličiny z daného místa vteče ve srovnání s množstvím veličiny, které do tohoto místa vteče. Jinak řečeno, udává, o kolik zesílí v daném místě tok $\vec{j}$. My potřebujeme mít zachyceno zeslabení (množství které chybí v toku se “použije” na akumulaci veličiny v daném místě) a proto uvažujeme záporně vzatou divergenci, tj. $-\nabla \cdot \vec{j}$.
- Pokud zdroje stavové veličiny neexistují, jedná se o **bezzdrojovou rovnici**. V takovém případě klademe $\sigma = 0$. Poznáme to tak, že v rovnici chybí člen bez derivací.
- Pokud studujeme systém v ustáleném stavu, kdy se stavová veličina nemění v čase, je člen $\frac{\partial u}{\partial t}$ na levé

straně nulový. V tomto případě mluvíme o *stacionárním stavu* a *stacionární rovnici kontinuity*. Stacionární rovnice kontinuity typicky popisuje systémy, které byly dostatečně dlouhou dobu ve stabilních podmínkách a dosáhly rovnovážného stavu. Stacionární rovnici poznáme tak, že v ní nefiguruje člen s derivací podle času.

- Viděli jsme, že za určitých podmínek mohou některé členy v rovnici kontinuity chybět. Naopak člen $\nabla \cdot \vec{j}$ charakterizující změny v toku je v rovnici kontinuity přítomen vždy. Bez něj by rovnice kontinuity ztratila smysl (resp. redukovala by se na triviální případ, kdy veličina v daném místě vzniká danou rychlostí a zůstává zde, tj. problém řešitelný čistě integrováním).

V matematice často rovnici kontinuity uvažujeme ve výše uvedeném tvaru. Při praktickém použití většinou preferujeme názornou interpretaci jednotlivých veličin a proto se v rovnici mohou objevit další konstanty úměrnosti, které umožní sladit jednotky a fyzikální interpretaci členů. Někdy se naopak snažíme konstanty co nejvíce redukovat metodami transformace popsány v přednášce o diferenciálních rovnicích. Proto volíme vhodné násobky veličin vystupujících v matematické formulaci tak, aby se co nejvíce konstant eliminovalo, případně shluklo do jediné veličiny. Zkušenosti ukazují, že je vhodné volit veličiny bezrozměrné. Například v publikaci P. Horáček, Fyzikální a mechanické vlastnosti dřeva I je zavedena **bezrozměrná vlhkost, bezrozměrný čas a bezrozměrná vzdálenost** na straně 61 pro rovnici popisující difuzi a **charakteristická délka, Biotovo číslo (bezrozměrná tepelná vodivost) a bezrozměrná teplota, bezrozměrný čas a bezrozměrná vzdálenost** pro rovnici popisující vedení tepla na stranách 88 a 89.

V této rovnici není zahrnut případ, kdy se veličina přenáší ještě i prouděním hmotného prostředí (konvekce).

Rovnice mělké vody

Rovnici kontinuity můžeme použít pro popis vody v řečišti. Úloha je jednodimenzionální a tok Q je proto skalární veličina. Divergence toku se díky jednodimenzionálnosti redukuje na derivaci podle prostorové proměnné $\frac{\partial Q}{\partial x}$. Zachovávající se veličinou je množství vody. Hustota zachovávající se veličiny je množství vody na metr délky toku, tj. *průtočný průřez* A (obsah průřezu říčního toku v daném místě). Zdroje zpravidla neuvažujeme, tj. $\sigma = 0$. Rovnice kontinuity má potom tvar

$$\frac{\partial A}{\partial t} = -\frac{\partial Q}{\partial x}$$

a nazývá se Saint-Venantova rovnice nebo též *rovnice mělké vody*. Tato rovnice se používá při popisu proudění v korytě nebo při modelování vln tsunami.

Difuzní rovnice

<https://youtu.be/p2FTgyAWzA4>

Difuzní rovnice je rovnice kontinuity s dosazeným konstitučním vztahem pro tok. Použijeme-li pro kvantifikaci souvislosti toku a gradientu lineární aproximaci, je možné psát

$$\vec{j} = -D\nabla u,$$

kde D konstanta úměrnosti. Pokud tok $\vec{j}$ a gradient ∇u leží v jedné přímce, je D reálné číslo, jinak je D matice. Například při studiu pohybu vody ve dřevě se voda řídí nejen směrem maximálního poklesu vlhkosti, ale stáčí se současně do podélného směru, ve kterém dřevo vede vlhkost nejlépe. V takovém případě je D matice. Spojením rovnice kontinuity

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sigma - \nabla \cdot \vec{j}$$

a vztahu pro tok stavové veličiny dostáváme rovnici

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sigma - \nabla \cdot (-D\nabla u).$$

Tuto rovnici je možno upravit na tvar

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sigma + \nabla \cdot (D\nabla u),$$

který se nazývá *difuzní rovnice*.

Poznámka (fyzikální interpretace difuzní rovnice).

- Člen $\frac{\partial u}{\partial t}$ udává, jak rychle se mění hustota stavové veličiny u . Je stejný jako v rovnici kontinuity.
- Člen σ udává vydatnost zdrojů stavové veličiny. Je stejný jako v rovnici kontinuity.
- Člen ∇u udává nerovnoměrnost v prostorovém rozložení stavové veličiny. Pomocí difuzní matice D a konstitutivního zákona tuto nerovnoměrnost přepočítáme na tok, který se snaží uvažovanou nerovnoměrnost vyrovnat. Tento tok je reprezentován výrazem $-D\nabla u$.
- Záporně vzatá divergence toku udává, jak tok v daném místě ztrácí na intenzitě. Vzhledem k zápornému znaménku v konstitutivním zákoně má záporně vzatá divergence tvar

$$\nabla \cdot (D\nabla u).$$

Představuje přírůstek hustoty stavové veličiny v daném místě za jednotku času, způsobený zeslábnutím toku.

- Rovnice jako celek vyjadřuje, že navýšení hustoty stavové veličiny (tj. množství stavové veličiny v jednotkovém objemu) je součtem navýšení díky zdrojům a navýšení díky zeslábnutí toku v daném místě.

V jednorozměrném případě (proudění jedním směrem) gradient splývá s parciální derivací a má jenom jednu

komponentu. Ztrácí tedy vektorový charakter a proto nemá smysl D uvažovat maticově. Prostředí je automaticky izotropní. Divergence se v takovém případě také redukuje na parciální derivaci a rovnice difuze v jedné dimenzi má tvar

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sigma + \frac{\partial}{\partial x} \left(D \frac{\partial u}{\partial x} \right).$$

To jsme viděli již v první přednášce, jenom bez zdrojů.

ww:problems/difuzni_rce/interpretace_clenu.pg

Vedení tepla

Důležitým speciálním případem difuzní rovnice je rovnice vedení tepla. Stavovou veličinou, která se zachovává v úlohách s vedením tepla, je vnitřní energie ve formě tepla. V materiálu se teplo zpravidla pouze předává z místa na místo. Nijak se v něm teplo negeneruje ani nespotebovává. Proto zpravidla nemá smysl uvažovat členy vyjadřující zdroje, tj. $\sigma = 0$. Protože teplo neměříme přímo, je vhodnější model formulovat pro teplotu T . Jsou-li ρ a c po řadě hustota a měrná tepelná kapacita materiálu, má člen vyjadřující změnu hustoty energie v daném místě tvar $\rho c \frac{\partial T}{\partial t}$. Úměrnost mezi gradientem teploty a tokem tepla zprostředkovává *Fourierův zákon*. Difuzní rovnice má v tomto případě tvar

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla \cdot (k \nabla T)$$

a nazývá se *rovnice vedení tepla*.

Poznámka (interpretace rovnice vedení tepla).

- Veličina $\frac{\partial T}{\partial t}$ udává rychlost růstu teploty tělesa a koeficient ρc tuto hodnotu přepočítává na údaj, jak rychle roste v daném bodě hustota vnitřní energie tělesa.
- Výraz $k \nabla T$ udává (až na znaménko), jak se nerovnoměrnost v rozložení teploty vyrovnává tokem tepla. Přesněji, tok tepla je $-k \nabla T$.
- Člen $\nabla \cdot (k \nabla T)$ udává, kolik tepla z celkového toku v daném místě zůstává a podílí se na zvýšení teploty. Vzhledem k absenci zdrojů je to také jediný mechanismus, jak v daném místě může vnitřní energie přibývat či ubývat.
- Rovnice jako celek vyjadřuje to, že pokud z daného místa více energie odtéká, než kolik do místa proudí, dojde v tomto místě k odpovídajícímu snížení teploty. V tomto bodě je totiž divergence toku $\nabla \cdot (-k \nabla T)$ kladná a výraz z rovnice $\nabla \cdot (k \nabla T)$ je proto záporný.

Uvedená rovnice je zobecněním rovnice vedení tepla v jedné dimenzi, kterou jsme odvodili primitivními prostředky (jenom pomocí parciálních derivací, bez gradientu a divergence) ve tvaru

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right)$$

v úvodní přednášce.

Rovnice vedení tepla se používá například při *tepelné ochraně budov*, při modelování *tepelných ostrovů* v krajině, při *tepelné modifikaci dřeva*, nebo při studiu *permafrostu*.

V literatuře věnované problematice dřeva se rovnice vedení tepla ve dřevě označuje jako Druhý Fourierův zákon (P. Horáček, Fyzikální a mechanické vlastnosti dřeva I, str. 88).

V některých případech člen charakterizující zdroje nemusí být nulový. Teplo může vznikat například při tření nebo při průchodu elektrického proudu transformací z jiného druhu energie. Dále teplo vzniká například při betonování po *přidání vody do cementu*, známý je problém jak *uchladit Hooverovu přehradu* při stavbě.

Rovnice vedení tepla ve 2D v různých podmínkách

Uvažujme rovnici vedení tepla ve dvou rozměrech a v prostředí bez zdrojů.

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla \cdot (k \nabla T) \quad (***)$$

Stacionární stav

Stacionární stav znamená, že stavové veličiny nezávisí na čase. Derivace podle času je v takovém případě nulová. Rovnice (***) se redukuje na

$$\nabla \cdot (k \nabla T) = 0.$$

Homogenní izotropní materiál a lineární materiálové vztahy

Nejjednodušší tvar má rovnice vedení tepla v prostředí, které je homogenní a izotropní (má ve všech místech a ve všech směrech stejné vlastnosti). Veličina k je v takovém případě skalární veličina (reálná konstanta).

Podle pravidla derivace konstantního násobku se rovnice vedení tepla (***) v takovém případě redukuje na

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = k \nabla \cdot (\nabla T)$$

a ve složkách

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = k \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right).$$

Ortotropní materiál, nehomogenní nebo nelineární

Dvourozměrný ortotropní materiál má dva charakteristické směry související s rovinami symetrie. Zvolíme soustavu souřadnic tak, aby osy byly orientovány ve směru vlastních vektorů.

Veličina k je v takovém případě diagonální matice. Pro

$$k = \begin{pmatrix} k_x & 0 \\ 0 & k_y \end{pmatrix}$$

je tvar rovnice (***) ve složkách

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k_x \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k_y \frac{\partial T}{\partial y} \right).$$

Homogenní ortotropní materiál a lineární materiálové vztahy

Takový materiál má dva charakteristické směry související s rovinami symetrie (ortotropní) a materiálové charakteristiky jsou ve všech místech stejné a nezávislé na T (homogenní a lineární). Situace je stejná jako předchozí případ, ale k_x a k_y jsou navíc konstanty. Podle pravidla pro derivaci konstantního násobku se rovnice (***) redukuje na

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = k_x \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + k_y \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}.$$

Voda v porézním materiálu

V porézním materiálu voda prostupuje materiálem a zachovává se její množství. Množství vody bude představovat stavovou veličinu. Hustotu tohoto množství, tj. obsah vody v jednotce objemu, označíme c a pro tuto veličinu formulujeme matematický model. Zdroje neuvažujeme, voda je dřevem pouze transportována. Nevzniká ani nezániká. Úměrnost mezi gradientem koncentrace vody a jejím tokem zprostředkovává *Fickův zákon*. Modelem difuzního děje je potom difuzní rovnice bez zdrojů.

$$\frac{\partial c}{\partial t} = \nabla \cdot (k \nabla c)$$

Tato rovnice se používá například při modelování procesu *sušení dřeva* v sušárnách nebo při modelování *dřeva ve vlhkém prostředí*. Stejná rovnice napsaná pro vzduch se používá k modelování proudění v atmosféře při *předpovědání počasí*.

V literatuře věnované problematice dřeva se rovnice difuze použita na modelování vlhkosti ve dřevě označuje jako Druhý Fickův zákon (A. Požgaj a kol., *Struktúra a vlastnosti dřeva*, str. 202, P. Horáček, *Fyzikální a mechanické vlastnosti dřeva I*, str. 60).

V praxi je dřevo často s jistou přesností homogenní, ale difuzní koeficient dřeva závisí na vlhkosti. Tedy vztah mezi gradientem vlhkosti a difuzním tokem není lineární. Přesto i v tomto případě používáme Fickův zákon, ovšem složky difuzního koeficientu nepovažujeme za konstanty. Jsou závislé na c a jejím prostřednictvím i na x .

Rovnice podzemní vody

Proudění podzemní vody je vlastně úloha s řekou se zasypaným korytem. Taková voda teče ve srovnání s povrchovou vodou velmi pomalu, protože prosakuje půdou. Prostor, ve kterém se podzemní voda nachází, se nazývá *zvodně*. Voda v podzemní zvodni teče v jistém smyslu “z kopce”. Narozdíl od vody povrchové však kromě nadmořské výšky může hrát roli i rozdíl tlaků nebo další efekty. Vliv všech těchto efektů shrnujeme do jediného pojmu *piezometrická výška*. Směr “z kopce” pro podzemní vodu je poté směr poklesu piezometrické výšky. V daném místě se může voda hromadit, což se projeví nárůstem hladiny spodní vody. Také může z hlediska zvodně část vody zanikat. Například pokud je zde čerpaná studna nebo průsak do jiné zvodně. Voda může ve zvodni i vznikat. Například zasakovacím vrtem nebo průsakem dešťových srážek. Pokud do celkové bilance započteme rozdíl mezi přítokem a odtokem a všechny zdroje a spotřebiče, množství vody se zachovává.

Úloha se většinou uvažuje ve dvou dimenzích, protože horizontální rozměry zvodně jsou mnohem větší než její hloubka. Podzemní zvodně je typickým porézním materiálem, přesto k modelování vody v tomto prostředí přistupujeme speciálním způsobem. Zachovává se množství vody, ale stejně jako u vedení tepla je výhodné formulovat model pro lépe měřitelnou veličinu. Tou je v tomto případě *piezometrická výška* h . Přírůstek množství podzemní vody za časovou jednotku na jednotkové ploše v daném místě zvodně má tvar $S_S \frac{\partial h}{\partial t}$, kde S_S je *specifická zásobnost*. Úměrnost mezi gradientem piezometrické výšky a filtračním tokem byla prokázána experimentálně i teoreticky a je známa jako *Darcyho zákon*. Difuzní rovnice má (s konstantou úměrnosti T , *transmisivitou*) tvar

$$S_S \frac{\partial h}{\partial t} = \sigma + \nabla \cdot (T \nabla h).$$

Tato rovnice se nazývá *rovnice podzemní vody*. Zdroje v této rovnici jsou nejčastěji zasakovací nebo odvodňovací vrty, dále studny, poldry, výkopy nebo zářezy. Informace získané z rovnice podzemní vody se využívají například k ochraně lomů, dolů a stavebních jam před *zaplavením*, k hospodaření s *pitnou vodou*, k ochraně před šířením *kontaminace z chemických provozů*. Aplikace jsou dále v detekci zdroje kontaminace pitné vody a odhadu rychlosti šíření kontaminace, včetně *kontaminace slanou mořskou vodou* v přímořských oblastech.

U proudění s napjatou hladinou (mezi dvěma nepropustnými vrstvami, angl. *confined aquifer*) transmisivita závisí pouze na fyzikálních vlastnostech zvodně. Například pro homogenní izotropní materiál je konstantní. U proudění s volnou hladinou (bez horní nepropustné vrstvy, angl. *unconfined aquifer*) je transmisivita úměrná tloušťce vrstvy obsahující vodu. Zpravidla nulovou hodnotu piezometrické hladiny volíme na dolní nepropustné vrstvě a potom platí $T = kh$, kde k závisí pouze na fyzikálních vlastnostech půdy. Proto se často rovnice podzemní vody pro proudění s volnou hladinou zapisuje ve tvaru

$$S_S \frac{\partial h}{\partial t} = \sigma + \nabla \cdot (kh \nabla h).$$

Laplaceův operátor

Definice (Laplaceův operátor). Laplaceovým operátorem ∇^2 rozumíme divergenci gradientu, tj.

$$\nabla^2 f = \nabla \cdot (\nabla f).$$

- V kartézských souřadnicích a trojrozměrném prostoru je Laplaceův operátor ∇^2 dán vztahem

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2}{\partial x^2} f + \frac{\partial^2}{\partial y^2} f + \frac{\partial^2}{\partial z^2} f.$$

V prostorech jiné dimenze postupujeme analogicky, jenom vynecháme nebo přidáme derivace podle dalších proměnných.

- Jiné běžné označení Laplaceova operátoru je Δf . Toto je bohužel stejné označení jako změna funkce f a je nutné tyto dva významy symbolu Δ nezaměňovat.
- Laplaceův operátor vystupuje například v problémech popsáných difuzní rovnicí a lineárním konstitutivním vztahem s konstantním skalárním difuzním koeficientem (homogenní izotropní prostředí s lineární materiálovou odezvou).

Z ptáčích perspektivy

- U vektorového pole popisujícího tok nás zajímá, jestli tok nabírá na intenzitě nebo naopak slábne. Toto je skryto v pojmu divergence.
- Formulováním bilance dávající do souvislosti intenzitu změny toku s vydatností zdrojů a s časovou změnou je možno formulovat matematické modely popisující transportní jevy. Nezáleží na charakteru přenášené veličiny, může se jednat o energii i o látku. Nezáleží ani na tom, pomocí jakého parametru množství přenášené tokem měříme. Výsledkem je rovnice kontinuity.
- Rovnici kontinuity často spojujeme ještě s konstitutivním zákonem. Výsledným spojením je difuzní rovnice.

- Difuzní rovnice je základním nástrojem pro popis transportu vody ve dřevě nebo v propustných vrstvách půdy. Je také základním nástrojem pro modelování vedení tepla, tj. například pro popis tepelného namáhání stěny domu, detailu okna či dveří, ulice v rozpáleném městě nebo krajiny, ve které jsou umístěny lesy, pole, města.

Kapitola 4

Rotace

Anotace.

- Již nějakou dobu studujeme vektorová pole. V této přednášce si několik typických zkusíme vizualizovat.
- Seznámíme se s pojmy kmenová funkce, skalární potenciál, kmenová funkce. Tyto pojmy udávají, zda vektorové pole je či není možné obdržet jako výsledek výpočtu gradientu nějaké skalární funkce. Není to akademická otázka, ale odpověď má dalekosáhlé důsledky. Zjednodušeně řečeno, pokud je odpověď kladná, dají se některé úlohy místo ve vektorovém poli řešit v poli skalárním, což nese výrazné usnadnění.
- S výše uvedenou problematikou souvisí pojem rotace vektorového pole, který si uvedeme jako další z diferenciálních operátorů vektorové analýzy.
- Ukážeme si, že parciální derivace jsou vhodným nástrojem pro jakousi citlivostní analýzu. Seznámíme se v této souvislosti se zákonem šíření chyb.

Prerekvizity.

- I zde budeme pracovat s diferenciálními operátory. Je žádoucí umět spolehlivě derivovat.
- Budeme počítat vektorový součin vektorů. Ten je nejsnazší počítat pomocí determinantů třetího řádu. Tuto dovednost tedy využijeme.

Vektorová pole

- Studujeme funkce $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ nebo $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$.
- Uspořádané dvojice nebo trojice na vstupu vektorového pole chápeme jako body v rovině nebo v prostoru. Uspořádané dvojice nebo trojice na výstupu chápeme jako vektory. Bodům v rovině nebo v prostoru jsou tedy přiřazeny vektory. Můžeme proto vektorové pole interpretovat jako rychlostní pole nebo silové pole.
- 2D: $\vec{F} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$. Ve složkách píšeme

$$\vec{F} = (P, Q) = P\vec{i} + Q\vec{j},$$

kde P a Q jsou (skalární) funkce dvou proměnných.

- 3D: $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$. Ve složkách píšeme

$$\vec{F} = (P, Q, R) = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k},$$

kde P , Q a R jsou (skalární) funkce tří proměnných.

Příklady vektorových polí v rovině

<https://youtu.be/KR42PRY-72U>

- Předpis

$$\vec{F}_1 = (0, -1) = -\vec{j}$$

definuje *homogenní pole*. Každý vektor je stejný (směr i velikost).

- Předpis

$$\vec{F}_2 = (x, y) = x\vec{i} + y\vec{j}$$

definuje *radiální pole*. Každý vektor směřuje od počátku souřadnic.

- Předpis

$$\vec{F}_3 = (-y, x) = -y\vec{i} + x\vec{j}$$

definuje *rotující pole*. Je kolmé na radiální pole. Každý vektor je tečný ke kružnici se středem v počátku souřadnic. [Nakreslit online](#).

- Předpis

$$\vec{F}_4 = \frac{\vec{F}_2}{|\vec{F}_2|} = \frac{(x, y)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{x\vec{i} + y\vec{j}}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

definuje *radiální pole s konstantní velikostí vektorů*. Každý vektor směřuje od počátku souřadnic a má jednotkovou délku.

- Předpis

$$\vec{F}_5 = -\frac{\vec{F}_4}{x^2 + y^2} = -\frac{x\vec{i} + y\vec{j}}{(x^2 + y^2)^{3/2}}$$

definuje *radiální pole ubývající s kvadrátem vzdálenosti od počátku a mířící do středu*. S druhou mocninou ve jmenovateli ubývá například 3D gravitační pole nebo elektrostatické pole generované hmotným bodem nebo koulí.

- Rychlost při proudění viskózní tekutiny ubývá směrem ke stěnám. Tekutinu proudící doprava je možné pro $y \in [0, 1]$ modelovat vektorovým polem

$$\vec{F}_6 = (y(1 - y), 0) = y(1 - y)\vec{i}.$$

Totální diferenciál

https://youtu.be/nD_nqakTN-A

Definice (totální diferenciál). Totálním diferenciálem funkce $z = f(x, y)$ v bodě (x_0, y_0) nazýváme výraz

$$df = \nabla f(x_0, y_0) \cdot (dx, dy) = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} dx + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} dy.$$

V souvislosti s totálním diferenciálem často vyvstává otázka, zda pro zadané vektorové pole

$$\vec{F}(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$$

existuje skalární funkce f , jejímž gradientem je zadané vektorové pole $\vec{F}$. Toto je důležitá otázka ve fyzice. Umožňuje rozhodnout, ke kterému silovému poli je možno zavést potenciální energii. Funkce f se v tomto kontextu nazývá **skalární potenciál** vektorového pole $\vec{F}$ nebo také **kmenová funkce**. Následující věta platí za předpokladu dostatečně hladkých funkcí na otevřené množině.

Věta (nutná a postačující podmínka pro existenci kmenové funkce ve 2D). Vektor

$$\vec{F}(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$$

je gradientem nějaké funkce $f(x, y)$ právě tehdy, když platí

$$\frac{\partial}{\partial y} P(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} Q(x, y).$$

Jeden směr implikace v předchozí větě je snadný a plyne hned ze Schwarzovy věty.

Skalární a vektorový součin

Diferenciální operátor divergence jsme poznali v minulé přednášce v souvislosti s difuzní rovnicí. Formálně jde o skalární součin operátoru ∇ definovaného vztahem

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

a vektorového pole.

Vektorovým součinem $\vec{a} \times \vec{b}$ vektorů $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ a $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ rozumíme vektor

$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{b} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \\ &= (a_2 b_3 - a_3 b_2) \vec{i} + (a_3 b_1 - a_1 b_3) \vec{j} + (a_1 b_2 - a_2 b_1) \vec{k}. \end{aligned}$$

Rotace

<https://youtu.be/ev3eFilaGpw>

Definice (rotace vektorového pole). Pro vektorovou funkci tří proměnných

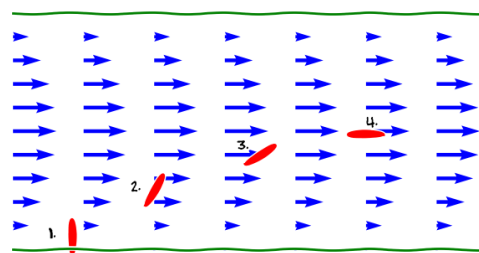
$$\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$$

definujeme operátor *rotace* vztahem

$$\text{rot } \vec{F} = \nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}.$$

- Výsledkem rotace je tedy vektorové pole, jehož komponenty jsou

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{F} &= \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \vec{j} \\ &\quad + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \vec{k}. \end{aligned}$$



Obrázek 4.1: Tok kapaliny mezi dvěma rovnoběžnými stěnami jako pole s nenulovou rotací. Rychlost proudu klesá kvadraticky směrem ke břehům a díky tomu se loďka, která odrazí od břehu kolmo, stáčí po proudu.

manimp:Curl|Rotace vektorového pole pomocí Sarusova pravidla.

- Ve dvourozměrném vektorovém poli doplníme třetí komponentu nulovou. Rotace má potom první dvě komponenty nulové ($R = \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial P}{\partial z} = 0$). Třetí komponenta rotace dvourozměrného vektorového pole je nulová právě tehdy, když k tomuto vektorovému poli existuje skalární potenciál.
- Ve fyzice má důležité postavení vektorové pole s nulovou rotací. Je v něm totiž možno zavést potenciál a potenciální energii. Takové pole se nazývá **nevírové pole**.
- Představme si vektorové pole charakterizující rychlost proudící tekutiny. Rotace udává, zda má pole tendenci uvést do rotace objekt unášený tímto prouděním. Jedná se o lokální charakteristiku a nesouvisí se směrem proudění. Rotace může být nulová i pro tok

cirkulující okolo jednoho bodu (uvidíme níže). Naopak, pro to v přímce může být rotace nenulová. Příkladem je přímý tok v řece, kdy rychlost u břehu klesá. V důsledku toho se loďka, která odrazí od břehu kolmo stočí po proudu. Mimo středovou osu má pole nenulovou rotaci, i když ve všech bodech míří stejným směrem. **Online výpočet.**

- Pozor: anglický výraz pro rotaci je “curl”.

Poznámka (linearita rotace). Rotace zachovává součet a násobení konstantou, tj. pro libovolné vektorové funkce $\vec{F}$ a $\vec{G}$ a konstantu c platí

$$\nabla \times (\vec{F} + \vec{G}) = \nabla \times \vec{F} + \nabla \times \vec{G}, \quad \nabla \times (c\vec{F}) = c\nabla \times \vec{F}.$$

Rotace významných polí

<https://youtu.be/JChhJ4nDAtw>

- Dostředivé pole ubývající s libovolnou mocninou vzdálenosti má nulovou rotaci. Pro

$$\vec{F}(x, y) = -\frac{x\vec{i} + y\vec{j}}{(x^2 + y^2)^n}$$

platí

$$\nabla \times \vec{F}(x, y) = 0.$$

Online výpočet.

- Rotace pole kolmého na dostředivé pole závisí na mocnině, se kterou toto pole ubývá. Pro

$$\vec{F}(x, y) = \frac{-y\vec{i} + x\vec{j}}{(x^2 + y^2)^n}$$

platí

$$\nabla \times \vec{F}(x, y) = -\frac{2(n-1)}{(x^2 + y^2)^n} \vec{k}.$$

Pro různé n toto pole cirkuluje okolo počátku proti směru hodinových ručiček. Rotace (ve smyslu operátoru rotace) však může být kladná i záporná, což je určeno znaménkem výrazu $n - 1$. Pokud bychom takovým polem nechali unášet drobný míček, v jednom případě by jej pole otáčelo po směru a v jiném případě proti směru hodinových ručiček. Pro $n = 1$ by se míček neroztočil okolo vlastní osy vůbec, rotace je nulová. **Online výpočet. Nakreslit online.**

Zákon šíření chyb (chyba nepřímo měřené veličiny)

<https://youtu.be/52W524bSOKQ>

Některé veličiny neměříme přímo, ale vypočítáváme z jiných naměřených veličin. Takové veličiny se nazývají nepřímo měřené veličiny.

- Předpokládejme, že měříme nepřímo veličinu f tak, že měříme veličiny $x_1, x_2, \dots, x_n$ a hodnotu veličiny f určíme pomocí vzorce $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$.
- Měření každé z veličin je zatíženo chybou. Je-li chyba veličiny x_i rovna Δx_i , způsobí tato odchylka to, že chyba veličiny f bude (v souladu se vzorcem pro lineární aproximaci) přibližně

$$\Delta f \approx \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \Delta x_i \right|$$

- Celkovou chybu veličiny f můžeme určit sečtením chyb způsobených jednotlivými veličinami x_i . Častěji se však používá následující vzorec

$$\Delta f(x_1, x_2, \dots, x_n) \approx \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \Delta x_1 \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2} \Delta x_2 \right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n} \Delta x_n \right)^2}$$

označovaný **zákon šíření chyb**.

Zákon šíření chyb (příklad)

Kanadský empirický vzorec pro pocitovou teplotu v zimě (**wind-chill factor**) je

$$W(T, v) = 13.12 + 0.6215T - 11.37v^{0.16} + 0.3965Tv^{0.16},$$

kde T je teplota (ve stupních Celsia) a v je rychlost větru (v km/hod). Teplota byla změřena -11.0°C s chybou 0.2°C a rychlost 26 km/hod s chybou 5 km/hod. S využitím zákona šíření chyb určíme, jaký vliv mají nepřesnosti v měření na nepřesnost vypočítané veličiny.

Dosazením do vzorce dostáváme $W(-11, 26) = -20.212^\circ\text{C}$. Derivováním dostáváme

$$\frac{\partial W}{\partial T}(T, v) = 0.6215 + 0.3965v^{0.16},$$

$$\frac{\partial W}{\partial v}(T, v) = -11.37 \times 0.16v^{-0.84} + 0.3965 \times 0.16Tv^{-0.84}$$

a po dosazení

$$\frac{\partial W}{\partial T}(-11, 26) = 1.289,$$

$$\frac{\partial W}{\partial v}(-11, 26) = -0.163^\circ\text{C hod/km}.$$

Za dané teploty a rychlosti větru způsobí nárůst teploty o jeden stupeň nárůst pocitové teploty přibližně o 1.3 stupně. Podobně, zesílení větru o jeden kilometr za hodinu způsobí snížení pocitové teploty přibližně o 0.16 stupně. Ze zákona šíření chyb dostáváme pro chybu pocitové teploty (dosazováno bez jednotek)

$$\Delta W = \sqrt{(1.289 \times 0.2)^2 + (-0.163 \times 5)^2} = 0.85^\circ\text{C}.$$

Pocitová teplota je tedy $W = -20.2^\circ\text{C} \pm 0.9^\circ\text{C}$.

Z ptačí perspektivy

- Rotace vektorového pole je další z diferenciálních operátorů. Význam tohoto operátoru nespatřujeme v jeho základním určení, které mu dalo název a srozumitelnou interpretaci (roztáčí unášené objekty okolo své osy), ale v jeho souvislosti s existencí skalárního potenciálu vektorového pole.
- Ve dvourozměrné formulaci je nulovost rotace nutná a současně postačující podmínka k možnosti zavedení skalárního potenciálu. V takovém případě je možno přejít od vektorového popisu pole ke skalárnímu popisu (skalární je jednodušší).
- Rotace je jedním z vyjadřovacích prostředků, které použijeme později pro formulaci Greenovy věty. Ta zprostředkovává přechod mezi difuzní rovnicí v bodě (v nekonečně malém objemu) a bilancí stavové veličiny v měřitelném makroskopickém tělese.
- V závěru přednášky, bez souvislosti s operátorem rotace, jsme se seznámili s dovedností analyzovat vliv nepřesností ve vstupních datech na nepřesnost na výstupu. Zákon šíření chyb umožní naplánovat experiment zaměřený na stanovení nepřímo měřené veličiny a umožní identifikovat ty části procesu, které podstatně ovlivňují spolehlivost výsledku.

Kapitola 5

Křivkový integrál

Anotace.

- V přednášce se seznámíme s rozšířením Riemannova integrálu. Riemannův integrál umožňuje sečíst příspěvky na úsečce. Zobecníme si tento nástroj tak, že umožní sečíst příspěvky podél křivky. Seznámíme se s křivkovým integrálem.
- Zaměříme se na křivkový integrál druhého druhu. V cizojazyčné literatuře je tento integrál nazývaný též integrál vektorového pole. Umožňuje vypočítat práci nebo obecně potenciál a tím přejít (pokud to jde) ke skalárnímu popisu pole namísto vektorového. Tím se popis studovaných systémů zjednoduší.
- Další aplikací křivkového integrálu druhého druhu je tok vektorového pole křivkou. Ten využijeme později při makroskopické formulaci bilance stavové veličiny a při odvození difuzní rovnice v integrálním tvaru.
- Motivací pro zavedení křivkového integrálu druhého druhu je i výpočet **toku přes hranici množiny**.

Prerekvizity.

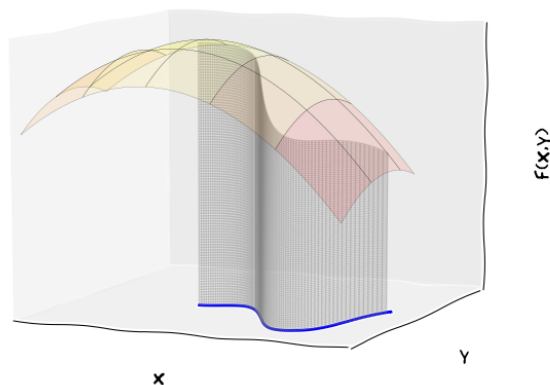
- Křivkový integrál počítáme převodem na Riemannův integrál. Je proto tedy dobré ovládat výpočet neurčitého a určitého Riemannova integrálu.

Křivkový integrál

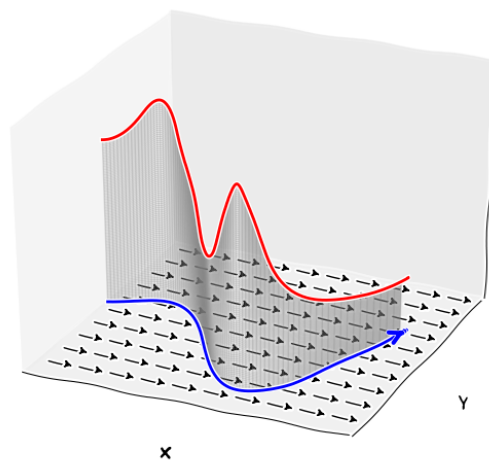
<https://youtu.be/n2roVUrXgcw>

Křivkový integrál je rozšíření Riemannova integrálu na případ, kdy množinou, přes kterou integrujeme, je místo úsečky obecnější křivka. Pro jednoduchost budeme uvažovat dvourozměrnou křivku v rovině x, y .

Rozeznáváme dva druhy křivkových integrálů. První z nich používáme při práci se skalárními veličinami. Příkladem je kvadratický moment. (Objekty s velkým kvadratickým momentem jsou při rotačních pohybech obdobou objektů velké hmotnosti při posuvných pohybech.) Druhý z křivkových integrálů používáme při práci ve vektorovém poli. Příkladem je výpočet práce vykonané po křivce nebo tok křivkou.



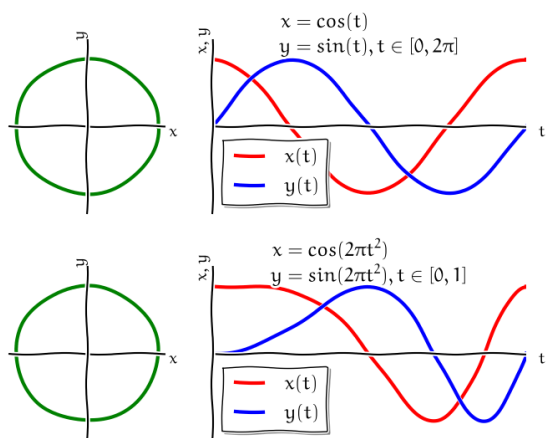
Obrázek 5.1: Křivkový integrál prvního druhu



Obrázek 5.2: Křivkový integrál druhého druhu

Parametrické rovnice křivky

<https://youtu.be/MRk4HRAWIA4>



Obrázek 5.3: Dvě různé parametrizace jednotkové kružnice

Nejprve představíme matematický aparát pro popis křivek. Rovinné křivky nejčastěji popisujeme vektorovou funkcí jedné proměnné $\vec{r}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$. Zpravidla s touto vektorovou funkcí pracujeme v komponentách, kdy každá její komponenta je dána skalární funkcí. Vektorově píšeme

$$\vec{r}(t) = [\varphi(t), \psi(t)] = \varphi(t)\vec{i} + \psi(t)\vec{j}, \quad t \in [\alpha, \beta]$$

a tato vektorová funkce se nazývá *parametrizace* křivky C . Často píšeme parametrické rovnice pro jednotlivé souřadnice ve tvaru

$$C = \begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t), \quad t \in [\alpha, \beta]. \end{cases}$$

- Graf křivky dostaneme tak, že pro každé t z intervalu $[\alpha, \beta]$ kreslíme ve 2D bod $[\varphi(t), \psi(t)]$.
- Pro danou křivku C v rovině xy , nejsou její parametrické rovnice dány jednoznačně. [Nakreslit online](#).
- Parametrizace kružnice, úsečky a grafu funkce jedné proměnné jsou v [cheatsheetu](#).

Křivkový integrál prvního druhu

<https://youtu.be/ZRed88fgDkI>

Pokud uvažujeme rovný drát o lineární hustotě f a délce s , je hmotnost drátu rovna součinu

$$m = fs.$$

Pokud by drát nebyl homogenní, je nutné v tomto vzorci místo součinu použít Riemannův integrál

$$m = \int_a^b f \, ds.$$

Budeme ve zobecňování pokračovat. Uvažujme drát, který není ani homogenní, ani rovný. Nechť leží podél rovinné křivky C a nechť je jeho lineární hustota (specifická hmotnost) v bodě (x, y) dána funkcí $f(x, y)$. Zde již Riemannův integrál nepomůže. Celkovou hmotnost můžeme odhadnout následovně.

- Myšlenkově rozdělíme drát na malé kousíčky a v každém z nich odhadneme lineární hustotu konstantou. Můžeme například použít minimální hodnotu hustoty v tomto kousíčku pro dolní odhad hmotnosti.
- Vynásobením délky každého kousíčku a lineární hustotou obdržíme jeho hmotnost a sečtením přes všechny kousky dostaneme odhad pro hmotnost drátu. Tento odhad bude tím přesnější, čím jemnější dělení použijeme.
- Zjemňováním dělení se tyto odhady zpřesňují.

V limitním procesu můžeme nechat délku kousíčku konvergovat k nule. Poté dostáváme objekt, který se nazývá *křivkový integrál prvního druhu*, označuje

$$\int_C f \, ds$$

a fyzikálně vyjadřuje hmotnost drátu z výše uvažované úlohy. Pokud počáteční a koncový bod křivky C splývají, píšeme též

$$\oint_C f \, ds$$

a integrál nazýváme *integrálem po uzavřené křivce*.

Převod na Riemannův integrál (rovinná křivka)

Mějme parametrické rovnice křivky C ve vektorovém tvaru

$$\vec{r}(t) = \varphi(t)\vec{i} + \psi(t)\vec{j},$$

kde $t \in [\alpha, \beta]$. Derivováním křivky dostaneme

$$\frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \varphi'(t)\vec{i} + \psi'(t)\vec{j}.$$

Výpočtem délky vektoru (a formálním vynásobením výrazem dt) dále

$$ds = |d\vec{r}(t)| = \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2} dt.$$

Tím se křivkový integrál prvního druhu funkce $f(x, y)$ po křivce C transformuje na Riemannův integrál

$$\int_C f \, ds = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t), \psi(t)) \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)} \, dt.$$

Převod na Riemannův integrál (prostorová křivka)

S křivkovým integrálem po křivce

$$C: \varphi(t)\vec{i} + \psi(t)\vec{j} + \xi(t)\vec{k}, \quad t \in [\alpha, \beta]$$

ve trojrozměrném prostoru pracujeme podobně. Délkový element je

$$ds = \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2 + (\xi'(t))^2} dt$$

a integrál má tvar

$$\begin{aligned} \int_C f ds \\ = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t), \psi(t), \xi(t)) \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2 + (\xi'(t))^2} dt. \end{aligned}$$

Aplikace křivkového integrálu prvního druhu

Vlastnosti křivkového integrálu prvního druhu

Věta (nezávislost na zvolené parametrizaci). *Křivkový integrál prvního druhu nezávisí na konkrétní parametrizaci křivky C . Pro různé parametrizace stejné křivky má integrál stejnou hodnotu.*

Věta (linearita). *Pro funkce f a g a konstantu k platí následující.*

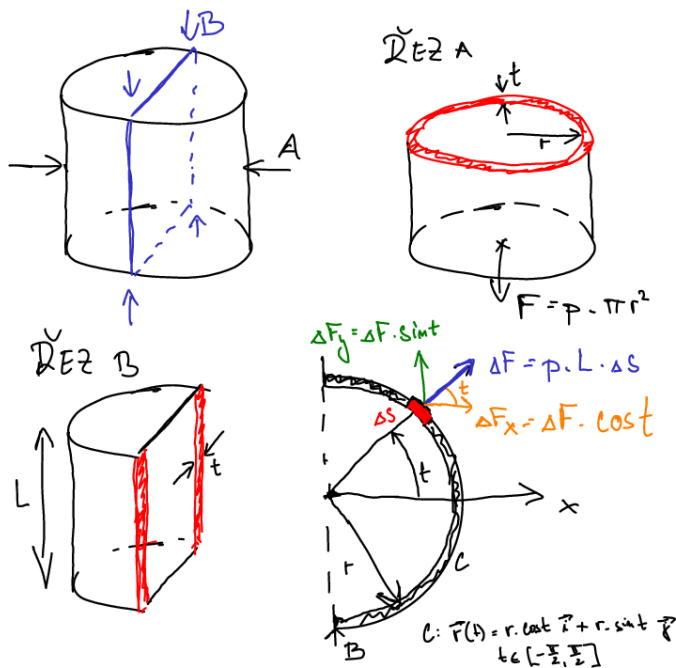
$$\begin{aligned} \int_C f + g ds &= \int_C f ds + \int_C g ds \\ \int_C kf ds &= k \int_C f ds \end{aligned}$$

Věta (aditivita vzhledem k integračnímu oboru). *Nechť je křivka C rozdělena na dvě křivky C_1 a C_2 , které jsou disjunktní (až na koncové body). Potom platí*

$$\int_C f ds = \int_{C_1} f ds + \int_{C_2} f ds.$$

Proč trubky praskají podélně?

Ukážeme si aplikaci křivkového integrálu prvního druhu k tomu, abychom sečetli komponenty síly, snažící se roztrhnout natlakovanou válcovou nádobu. Tlaková síla je ve všech částech nádoby stejně velká. Protože je však kolmá ke stěně nádoby, mění se směr síly a tím i průměty síly do směru, ve kterém počítáme namáhání. Zjednodušíme si situaci tím, že budeme uvažovat průmět stěny do roviny podstavy, kdy se stěna redukuje na křivku.



Obrázek 5.4: Schema válcové nádoby pod tlakem a řezy, v nichž počítáme namáhání.

Vypočteme síly, které se snaží roztrhnout válec napříč (viz řez A v obrázku) a podélně (viz řez B v obrázku). Tato dvě namáhání porovnáme. Ještě existuje namáhání radiálně od osy. Ale v tomto případě se tlaková síla rozkládá na celou plochu pláště válce a v tomto směru je namáhání minimální. Proto toto namáhání nemusíme uvažovat.

Uvažujme natlakovanou válcovou nádobu s tlakem p , výškou L , poloměrem podstavy r a stěnou o tloušťce t .

Výpočet namáhání v řezu A je snadný. Obsah řezu (vyšrafováno červeně) je $2\pi r t$. Na dno a víko působí síla $F = p\pi r^2$ a v řezu A je tahové napětí

$$\sigma_p = \frac{F}{S} = \frac{p\pi r^2}{2\pi r t} = \frac{pr}{2t}.$$

Nyní vypočteme namáhání, které se snaží roztrhnout válec podélně. K tomu musíme vypočítat sílu, která působí po obvodu válce, tj. která se snaží válec roztrhnout v řezu B. Obsah řezu (červeně vyznačeno) je $2Lt$. Nejtěžší bude najít celkovou sílu, která od sebe oddaluje dvě poloviny pláště. To je místo, kde zapojíme integrál.

Budeme se na úlohu dívat shora ze směru, kterým míří osa válce. Tím můžeme snížit dimenzionalitu úlohy. Plášť válce v tomto pohledu vidíme jako kružnici a polovinu pláště jako půlkružnici. Tato půlkružnice má rovnici $\vec{r}(t) = r \cos(t)\vec{i} + r \sin(t)\vec{j}$, kde r je poloměr válce a $t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ je úhel mezi spojnicí elementu v bodě (x, y) a mezi kladnou částí osy x . Kousek pláště válce odpovídající v průmětu úseku křivky délky Δs má obsah $L\Delta s$. Tlaková síla na tento kousek je součin tlaku a obsahu, tj.

$$\Delta F = pS = pL\Delta s.$$

Směr je kolmý k plášti válce a s vodorovnou osou proto síla svírá úhel t . Průmět této síly do vodorovného směru je

$$\Delta F_x = pL \Delta s \cos t$$

a tyto příspěvky musíme sečíst křivkovým integrálem přes celou křivku. Platí $ds = r dt$. Celková síla, která se snaží nádobu roztrhnout podélně je

$$\begin{aligned} F_x &= \int_C pL \cos t \, ds \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} pLr \cos t \, dt \\ &= prL [\sin t]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \\ &= prL \left[\sin \frac{\pi}{2} - \sin \left(-\frac{\pi}{2} \right) \right] \\ &= 2prL. \end{aligned}$$

Povrch, na který tato síla působí, odpovídá dvěma podélným hranám (červeně na řezu B), tj. má obsah $2Lt$ a napětí je tedy

$$\sigma_h = \frac{2pLr}{2Lt} = \frac{pr}{t} = 2\sigma_p.$$

Vidíme, že toto napětí je dvojnásobkem napětí v podélné ose.

Ještě je vhodné ověřit, že svislý průmět, tj.

$$\Delta F_y = pL \Delta s \sin t$$

k namáhání nepřispívá, protože

$$\begin{aligned} F_y &= \int_C pL \sin t \, ds \\ &= 0. \end{aligned}$$

To však je možné očekávat i ze symetrie.

Pokud se chcete dozvědět o problematice více, nebo si prohlédnout obrázky válcových nádrží, které selhaly vlivem vysokého nebo nízkého tlaku, zkuste Google a heslo “hoop stress”.

Křivkový integrál druhého druhu

https://youtu.be/GeJgtBHy_sM

Pokud působíme na těleso silou F a přemísťujeme toto těleso ve směru působící síly po dráze délky s , **konáme práci** $W = Fs$. Pokud přemísťování neprobíhá ve směru působící síly a má-li síla směr $\vec{F}$ a posunutí $\vec{s}$, je práce rovna skalárnímu součinu $\vec{F} \cdot \vec{s}$.

Předpokládejme, že na těleso působí (obecně nekonstantní) síla $\vec{F}$ a těleso se pohybuje podél křivky C určené polohovým vektorem $\vec{r}(t)$. Pro výpočet práce můžeme použít trik obvyklý v integrálním počtu. Rozdělíme dráhu

na malé kousíčky a v rámci těchto kousíčků považujeme $\vec{F}$ i $\Delta \vec{r}$ za konstantu. Potom můžeme odhadnout příspěvek každého kousíčku k celkové práci klasickým způsobem pomocí skalárního součinu a nakonec všechny příspěvky sečíst. Tato aproximace bude tím přesnější, čím jemnější dělení použijeme.

V limitě dostáváme veličinu, která se nazývá *křivkový integrál druhého druhu* funkce $\vec{F}$ po křivce C . Tento integrál zapisujeme

$$\int_C \vec{F} \, d\vec{r}.$$

Je-li

$$\vec{F}(x, y) = P(x, y)\vec{i} + Q(x, y)\vec{j},$$

zapisujeme někdy křivkový integrál ve složkách

$$\int_C P(x, y)dx + Q(x, y)dy.$$

Protože při pohybu tělesa po křivce jedním směrem se práce koná a při pohybu opačným směrem spotřebovává, je nutné, aby křivka figurující v křivkovém integrálu druhého druhu byla orientovaná. Musíme tedy prohlásit jeden koncový bod za *počáteční* a druhý za *koncový*. Vždy budeme předpokládat, že křivka je *orientovaná v souladu se svým parametrickým vyjádřením*, tj. že počáteční bod křivky odpovídá hodnotě parametru $t = \alpha$ a koncový bod odpovídá hodnotě parametru $t = \beta$.

Převod na Riemannův integrál

Známe-li parametrické rovnice

$$\vec{r}(t) = \varphi(t)\vec{i} + \psi(t)\vec{j}, \quad t \in [\alpha, \beta],$$

křivky C , je možno křivkový integrál druhého druhu funkce

$$\vec{F}(x, y) = P(x, y)\vec{i} + Q(x, y)\vec{j}$$

po křivce C zapsat následovně

$$\begin{aligned} \int_C \vec{F} \, d\vec{r} &= \int_{\alpha}^{\beta} \left[P(\varphi(t), \psi(t))\varphi'(t) \right. \\ &\quad \left. + Q(\varphi(t), \psi(t))\psi'(t) \right] dt. \end{aligned}$$

Vektorově

$$\int_C \vec{F} \, d\vec{r} = \int_{\alpha}^{\beta} \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \frac{d\vec{r}(t)}{dt} dt.$$

Vlastnosti křivkového integrálu druhého druhu

Věta (souvinnost křivkového integrálu a orientace křivky). Změnou orientace křivky křivkový integrál druhého druhu mění znaménko.

Věta (nezávislost na zvolené parametrizaci). Křivkový integrál druhého druhu nezávisí na konkrétní parametrizaci křivky C . Pro různé parametrizace stejné křivky má integrál stejnou hodnotu.

Následující vlastnosti jsou stejné jako u křivkového integrálu prvního druhu.

Věta (linearita a aditivita vzhledem k integračnímu oboru). Křivkový integrál druhého druhu je lineární vzhledem k funkci a aditivní vzhledem k oboru integrace. Přesněji, pro funkce $\vec{F}$ a $\vec{G}$ a konstantu k platí následující.

$$\int_C \vec{F} + \vec{G} \, d\vec{r} = \int_C \vec{F} \, d\vec{r} + \int_C \vec{G} \, d\vec{r}$$

$$\int_C k\vec{F} \, d\vec{r} = k \int_C \vec{F} \, d\vec{r}$$

Je-li křivka C rozdělena na dvě disjunktní (až na koncové body) křivky C_1 a C_2 , platí

$$\int_C \vec{F} \, d\vec{r} = \int_{C_1} \vec{F} \, d\vec{r} + \int_{C_2} \vec{F} \, d\vec{r}.$$

Aplikace křivkového integrálu druhého druhu

manip:integracni_cesta[Křivkový integrál může a nemusí záviset na integrační cestě. Pokud na ní nezávisí, je možné v takovém poli nadefinovat potenciální energii.]

- Integrál

$$\int_C \vec{F} \, d\vec{r}$$

vyjadřuje **práci** kterou vykoná síla $\vec{F}$ při přemístění tělesa podél orientované křivky C .

- Je-li křivka C uzavřená, píšeme

$$\oint_C \vec{F} \, d\vec{r}.$$

Fyzikálně se jedná o **práci** kterou vykoná síla $\vec{F}$ při přemístění tělesa po uzavřené orientované křivce. Tato práce se též nazývá *cirkulace vektorového pole po orientované křivce* C . Pokud je možno v poli zavést potenciální energii a pokud tedy práce závisí jenom na počáteční a koncové poloze, musí tato práce být nulová. To je důsledkem věty kterou si uvedeme později.

- Při odvození křivkového integrálu druhého druhu jako vykonané práce hraje roli vlastně jenom ta složka silového pole, která při posunu ve směru křivky koná práci. Uvažujeme tedy jenom složku tečnou ke křivce. Pokud použijeme naopak pouze normálovou komponentu, dostaneme veličinu vyjadřující **tok vektorového pole orientovanou křivkou** C . Výsledný vzorec pro tok vektorového pole $\vec{F}(x, y) = P(x, y)\vec{i} + Q(x, y)\vec{j}$ křivkou C je

$$\int_C -Q(x, y)dx + P(x, y)dy.$$

- Je-li množina Ω “dostatečně pěkná” (např. souvislá, bez děr, s hladkou hranicí $\partial\Omega$, která se nikde neprotíná, detaily uvedeme později u Greenovy věty), potom každý z integrálů

$$\oint_{\partial\Omega} xdy \quad \text{a} \quad \oint_{\partial\Omega} ydx$$

udává (až na případné znaménko) obsah množiny Ω . Na tomto principu fungují planimetry.

Shrnutí: vlastnosti křivkových integrálů

- Oba křivkové integrály jsou **aditivní vzhledem k oboru integrace**. Je možno křivku rozdělit na konečný počet navzájem disjunktních částí, vypočítat integrál na každé části samostatně a výsledky sečíst.
- Křivkový integrál prvního ani druhého druhu **nezávisí na konkrétní parametrizaci křivky**.
- Křivkový integrál prvního druhu **nezávisí na orientaci křivky**.
- Křivkový integrál druhého druhu **při změně orientace křivky mění znaménko**.

Závěrečné informace

Parametrizace úsečky

- Hledejme parametrické rovnice orientované úsečky AB , kde je dán počáteční bod $A = [x_A, y_A]$ a koncový bod $B = [x_B, y_B]$.
- Leží-li bod X na úsečce AB , potom vektor $\vec{AX}$ má stejný směr (včetně orientace) jako vektor $\vec{AB}$ a nejvýše stejnou délku.
- Platí tedy $\vec{AX} = t\vec{AB}$ pro nějaké $t \in [0, 1]$. Odsud potom dostáváme $X - A = t(B - A)$ a $X = A + t(B - A)$.
- V souřadnicích zapsáno, parametrické rovnice úsečky jsou

$$x = x_A + t(x_B - x_A)$$

$$y = y_A + t(y_B - y_A), \quad t \in [0, 1]$$

- Pro úsečku v prostoru platí totéž, pouze přibývá třetí souřadnice.

Z ptačí perspektivy

- Křivkový integrál druhého druhu souvisí s prací silového pole. Vzhledem ke zkušenostem z mechaniky by toto měla být cesta ke skalárnímu popisu vektorového pole. Protože v minulém týdnu jsme jednu takovou cestu otevřeli (pojem rotace a její nulovost či nenulovost), dá se očekávat, že obě problematiky budou souviset. Tuto souvislost si ukážeme později, za dva týdny (Greenova věta).
- Křivkový integrál druhého druhu může souviset s i s tokem vektorového pole křivkou a to je zase doména difuzní rovnice a divergence vektorového pole. Oba pojmy, křivkový integrál a divergence spolu opravdu souvisí a přesvědčí nás o tom později opět Greenova věta.

Kapitola 6

Dvojný integrál

Anotace.

- V předchozí přednášce jsme si ukázali rozšíření integrálu, které nám umožnilo počítat integrál nejenom po úsečce, ale i po libovolné křivce. V této přednášce se naučíme integrovat přes dvourozměrný obrazec v rovině. Seznámíme se s dvojným integrálem.
- Mezi aplikace spadá střední hodnota na dvourozměrné oblasti.
- Pomocí dvojného integrálu je definován kvadratický moment průřezu nosníku, což je zásadní veličina ovlivňující tuhost a chování těchto nosníků při deformaci.
- Pomocí dvojného integrálu je možné určit množství veličiny ze znalosti její plošné hustoty. To využijeme později při makroskopické formulaci bilance stavové veličiny a při odvození difuzní rovnice v integrálním tvaru.

Prerekvizity.

- Dvojný integrál počítáme převodem na dva jednorozměrné Riemannovy integrály. Je proto tedy dobré ovládat výpočet neurčitého a určitého Riemannova integrálu.

V praxi pracujeme s řadou veličin, které se počítají tak, že se parametr systému násobí obsahem.

- Z plošné hustoty desky a jejího obsahu násobením obdržíme hmotnost desky.
- Z hloubky nádrže (se svislými stěnami) a obsahu hladiny obdržíme násobením objem.
- Z tlaku a obsahu stěny obdržíme násobením tlakovou sílu působící na stěnu nádrže.

Je však otázka, jak tento přístup použít v případě, že daný parametr není po celé ploše konstantní. Deska může být nehomogenní, nádrž nemusí mít vodorovné dno a tlak působící na stěnu nádrže není ve všech místech stejný, protože různé části stěny jsou v různé hloubce.

U křivkového integrálu jsme se setkali s momentem setrvačnosti. Ukázali jsme si, jak stanovit moment setrvačnosti množiny, která má hmotnost rozloženu na křivce a třeba i nerovnoměrně. Při výpočtu namáhání nosníků, trámů,

polic nebo stromů řešíme podobnou úlohu, ale pro množiny v rovině namísto křivek. Potřebujeme zohlednit, že při deformaci nosníků se pro jednotlivé body průřezu liší vzdálenost od neutrální osy.

Řešení uvedených nesnází je stejné: další rozšíření integrálního počtu a zavedení dvojného integrálu. Ten si nyní představíme.

<https://youtu.be/DYySq6o6WTk>

Dvojný integrál

<https://youtu.be/tPf-7dZ4Il0>

Pro dvojný integrál použijeme podobnou myšlenkovou konstrukci jako u křivkového integrálu prvního druhu, pouze místo drátu s danou lineární hustotou budeme uvažovat rovinnou ohraničenou desku s danou plošnou hustotou.

- Pokud je hustota desky konstantní, je možno její hmotnost získat jednoduše jako součin plošné hustoty a obsahu.
- Pokud se hustota desky mění a v obecném bodě (x, y) je dána funkcí $f(x, y)$, můžeme myšlenkově rozdělit desku na malé kousky, v rámci každého malého kousku hustotu aproximovat konstantou, vypočítat hmotnost každého kousku jako součin hustoty a obsahu a všechny hmotnosti sečíst.
- Získaná veličina je aproximací celkové hmotnosti.

V limitním přechodu kdy rozměry všech kousků na něž je deska dělena jdou k nule dostáváme **dvojný integrál**

$$\iint_{\Omega} f(x, y) dx dy,$$

kde Ω je oblast v rovině (x, y) definovaná uvažovanou deskou. V aplikacích je častý též zápis

$$\iint_{\Omega} f(x, y) dA$$

nebo

$$\iint_{\Omega} f(x, y) dS.$$

Linearita a aditivita

Dvojný integrál je odvozen (tak jako všechny integrály) pro aditivní veličiny a proto se “dobře snáší” se sčítáním (ať už integrovaných funkcí, nebo integračních oborů) a s násobením integrované funkce konstantou. Přesněji, platí následující věty.

Věta (linearita dvojného integrálu). *Bud' f_1, f_2 funkce integrovatelné v Ω a c_1, c_2 libovolná reálná čísla. Platí*

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} [c_1 f_1(x, y) + c_2 f_2(x, y)] dx dy \\ = c_1 \iint_{\Omega} f_1(x, y) dx dy + c_2 \iint_{\Omega} f_2(x, y) dx dy \end{aligned}$$

Věta (aditivita vzhledem k oboru integrace). *Nechť je množina Ω rozdělena na dvě oblasti Ω_1 a Ω_2 , které mají společné nejvýše hraniční body. Platí*

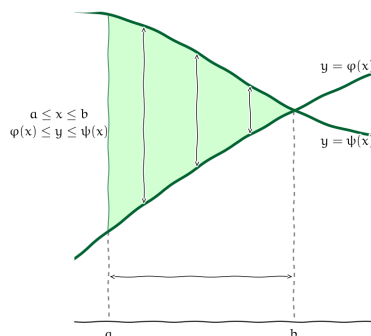
$$\iint_{\Omega} f(x, y) dx dy = \iint_{\Omega_1} f(x, y) dx dy + \iint_{\Omega_2} f(x, y) dx dy.$$

Výpočet dvojného integrálu

<https://youtu.be/ItTWxJGD3sY>

Výpočet dvojného integrálu se provádí převodem, na integrály funkcí jedné proměnné.

Výpočet (oblast mezi funkcemi proměnné x)



Obrázek 6.1: Oblast mezi funkcemi proměnné x .

V závislosti na tom, jakými nerovnostmi množinu Ω definujeme, můžeme pro výpočet dvojného integrálu použít následující věty. Tyto věty udávají, jak je možno dvojný integrál přepsat jako dvojnásobný integrál. Mají název Fubiniovy věty.

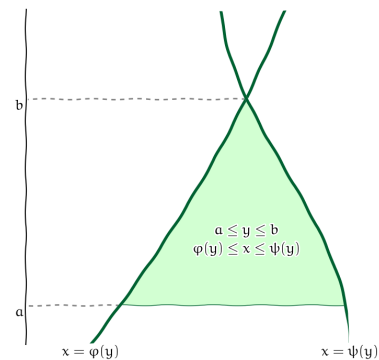
Věta (Fubiniova věta). *Nechť f je funkce spojitá v uzavřené oblasti*

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b \text{ a } \varphi(x) \leq y \leq \psi(x)\}.$$

Potom

$$\iint_{\Omega} f(x, y) dx dy = \int_a^b \left[\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y) dy \right] dx.$$

Výpočet (oblast mezi funkcemi proměnné y)



Obrázek 6.2: Oblast mezi funkcemi proměnné y .

Věta (Fubiniova věta pro jiné pořadí integrace).

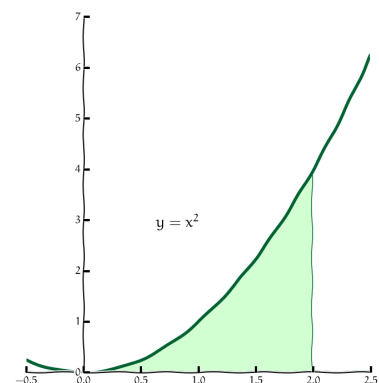
Nechť f je funkce spojitá v uzavřené oblasti

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq y \leq b \text{ a } \varphi(y) \leq x \leq \psi(y)\}.$$

Potom

$$\iint_{\Omega} f(x, y) dx dy = \int_a^b \left[\int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x, y) dx \right] dy.$$

Záměna pořadí integrace



Obrázek 6.3: Oblast, pro kterou jsou možná obě pořadí integrace.

Často je možné oblast integrace zapsat pomocí obou možností uvedených na předchozích slidech. Například

oblast na obrázku je možno zapsat buď jako

$$\begin{aligned} 0 &\leq x \leq 2 \\ 0 &\leq y \leq x^2 \end{aligned}$$

nebo

$$\begin{aligned} 0 &\leq y \leq 4 \\ \sqrt{y} &\leq x \leq 2. \end{aligned}$$

Pro integrál funkce $f(x, y)$ přes takovou množinu tedy máme dvě alternativy. Buď

$$\int_0^2 \int_0^{x^2} f(x, y) \, dy \, dx$$

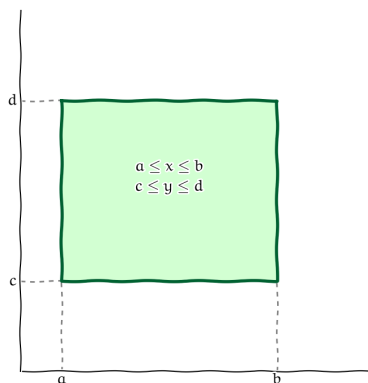
anebo

$$\int_0^4 \int_{\sqrt{y}}^2 f(x, y) \, dx \, dy.$$

Všimněte si, že nestačí prosté prohození integrálů. Je nutno přepočítávat meze a hraniční křivky je nutno vyjádřit jednou jako funkce proměnné x a jednou jako funkce proměnné y . V důsledku tohoto dochází v průběhu výpočtu dvěma různými způsoby k tomu, že pracujeme se dvěma různými integrály. Výsledky jsou samozřejmě stejné, ale nemusí být dosažitelné srovnatelnou námahou. Jedna z cest může být snazší.

Výpočet (obdélníková oblast)

<https://youtu.be/o38mi3tTAfw>



Obrázek 6.4: Integrál přes obdélník.

Výše uvedené problémy se stanovením a případným přepočítáváním mezí při záměně pořadí integrace se nevyskytují při integrování přes obdélníkovou oblast.

Věta (Fubiniova věta na obdélníku). *Nechť $R = [a, b] \times [c, d]$ je uzavřený obdélník v $\mathbb{R}^2$ a f funkce definovaná a spojitá na R . Pak platí*

$$\begin{aligned} \iint_R f(x, y) \, dx \, dy &= \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y) \, dy \right] dx \\ &= \int_c^d \left[\int_a^b f(x, y) \, dx \right] dy. \end{aligned}$$

Platí-li dokonce rovnost $f(x, y) = g(x)h(y)$, pak

$$\iint_R f(x, y) \, dx \, dy = \int_a^b g(x) \, dx \int_c^d h(y) \, dy.$$

Aplikace dvojného integrálu

<https://youtu.be/8YS2Fn8st5I>

Matematické aplikace dvojného integrálu

- **Obsah** $\mu(\Omega)$ množiny Ω vypočteme jako integrál

$$\mu(\Omega) = \iint_{\Omega} dx \, dy.$$

- **Integrální střední hodnota** funkce $f(x, y)$ definované na množině Ω je

$$\frac{\iint_{\Omega} f(x, y) \, dx \, dy}{\mu(\Omega)},$$

kde $\mu(\Omega) = \iint_{\Omega} dx \, dy$ je obsah množiny Ω .

Objem kopce nebo jezera pomocí vrstevnic

- Obsah množiny ohraničené vrstevnicí na mapě vynásobený rozestupem mezi vrstevnicemi je přibližně roven objemu vrstvy mezi dvěma vrstevnicemi.
- Pokud sečteme obsahy všech vrstevnic a vynásobíme rozestupem mezi těmito vrstevnicemi, dostaneme odhad pro objem kopce. Vlastně je to jako bychom kopec rozřezali na stejně tlusté plátky, naskládali je vedle sebe, sečetli obsahy postav takto vzniklých těles a vynásobili výškou.
- Podobně je možné odhadnout objem jezera.
- V tomto případě je dvojný integrál pouze koncept. Samozřejmě nemáme ambice vyjadřovat vrstevnice v analytickém tvaru a integrovat pomocí Fubiniovy věty. Ke slovu přijde spíše numerický výpočet integrálu.

Fyzikální aplikace dvojného integrálu

- **Hmotnost** množiny M je

$$m = \iint_M \sigma(x, y) dx dy,$$

kde $\sigma(x, y)$ je **plošná hustota** (hmotnost vztažená na jednotku povrchu).

- Je-li plošná u hustota kinetické energie molekul (což je veličina úměrná termodynamické teplotě), je $\iint_M u dx dy$ celková kinetická energie částic. Tato energie se může měnit tepelnou výměnou. Rychlost, s jakou se mění část vnitřní energie související s teplotou, je

$$\frac{d}{dt} \left(\iint_M u dx dy \right)$$

a odsud odvozujeme rovnici vedení tepla.

- **Lineární momenty** hmotné množiny M vzhledem k osám y a x jsou rovny

$$\iint_M x \sigma(x, y) dx dy$$

a

$$\iint_M y \sigma(x, y) dx dy.$$

- **Moment setrvačnosti** hmotné množiny M vzhledem k ose je

$$J = \iint_M \rho^2(x, y) \sigma(x, y) dx dy,$$

kde $\rho(x, y)$ je vzdálenost bodu (x, y) od osy otáčení. Například pro osu x je $\rho(x, y) = y$ a pro osu y je $\rho(x, y) = x$. Pro osu procházející kolmo počátkem je $\rho(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Technické aplikace dvojného integrálu

- **Souřadnice těžiště** množiny jsou podílem lineárních momentů a celkové hmotnosti množiny.
- **Kvadratický moment průřezu** (což je moment setrvačnosti pro $\sigma(x, y) = 1$, anglicky *second moment of area*) je veličina, která hraje podstatnou roli v mechanice (nábytek, stavby) při dimenzování (polic, nosných tyčí, nosníků).
- V technické praxi zpravidla neuvažujeme nekonstantní plošnou hustotu. Potom je možné je bez újmy na obecnosti nahradit jedničkou. Vzorci pro obsah, x -ovou souřadnici těžiště (x_0), y -ovou souřadnici těžiště (y_0), kvadratický moment vzhledem k ose x (I_x) a kvadratický moment vzhledem k ose y (I_y) (pro množinu M s plošnou hustotou 1) jsou

$$\begin{aligned} x_0 &= \frac{1}{S} \iint_M x dx dy, & I_x &= \iint_M y^2 dx dy, \\ y_0 &= \frac{1}{S} \iint_M y dx dy, & I_y &= \iint_M x^2 dx dy, \end{aligned}$$

kde $S = \mu(M)$ je obsah množiny M . Poloha těžiště je tedy střední hodnotou funkcí x a y .

Tuhost nosníků, stabilita stromů

Tuhost (odolnost vůči deformaci) pro nosník obdélníkového průřezu o výšce b a šířce a je dána kvadratickým momentem obdélníkového průřezu vzhledem k vodorovné ose procházející těžištěm.

$$\begin{aligned} I_x &= \iint_{[-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}] \times [-\frac{b}{2}, \frac{b}{2}]} y^2 dx dy \\ &= \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} dx \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} y^2 dy = a \left[\frac{1}{3} y^3 \right]_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} = \frac{1}{12} ab^3 \end{aligned}$$

Odsud máme okamžitě několik pozorování

- Pokud šířka vzroste dvakrát, tuhost vzroste také dvakrát. Pokud ale dvakrát vzroste výška, tuhost vzroste dokonce osmkrát. Pro nosník s poměrem stran 1:2 je poměr tuhostí při poloze naplácato a nastojato roven 1:4.
- Pro nosník čtvercového průřezu ($a = b$) roste tuhost se čtvrtou mocninou rozměrů. Obsah (a tedy i hmotnost) roste s druhou mocninou. Uvažujme tři nosníky. První má čtvercový průřez. Druhý také, ale průřez má dvojnásobný obsah. (Strana je tedy $\sqrt{2}$ -krát delší.) Třetí nosník bude krabicový nosník. Bude mít vnější rozměry stejné jako větší nosník, ale uvnitř bude čtvercová dutina o rozměrech prvního nosníku. Tuhost prvního nosníku bude referenční, označme ji I . Tuhost druhého nosníku bude čtyřnásobná, tj. $4I$ a za toto navýšení tuhosti "platíme" použitím dvojnásobného množství materiálu. Tuhost třetího nosníku najdeme jako rozdíl prvních dvou, tj. $3I$, protože i geometricky největší nosník vznikne zasunutím prvního nosníku do dutiny ve třetím krabicovém nosníku. Nyní porovnáme původní nosník a krabicový nosník. Oba používají stejné množství materiálu, ale tuhost krabicového nosníku je trojnásobná. To proto, že část materiálu je dál od osy symetrie průřezu. Podobně se dá zdůvodnit a výpočtem ukázat, že profil ve tvaru písmene I, známé íčko, je tužší než tyč vykovaná ze stejného množství materiálu.
- Pro čtvercový průřez roste tuhost se čtvrtou mocninou délky strany. Podobná závislost musí být u každého průřezu jednoparametrického tvaru, například pro kruh. Jako na nosník s kruhovým průřezem můžeme pohlížet i na stromy. Například strom, ve kterém je dutina o velikosti poloviny průměru kmene většinou vyvolá obavy ze stability. I když taková dutina vypadá obrovská, tuhost se sníží o původní tuhost vynásobenou koeficientem

$$(0.5)^4 = 0.0625 \approx 6\%.$$

Vidíme, že i s hrozně vypadající dutinou má kmen pořád tuhost 94% původní tuhosti (za předpokladu

dutiny uprostřed kmene). Pevnost roste jenom s třetí mocninou a proto odolnost vůči zlomení neklesne tak dramaticky jako tuhost.

Tlak na svislou plochu

Vzorec pro tlakovou sílu $F = pS$ není možné použít například pro výpočet celkové síly působící na svislou hráz, protože tlak p se mění s hloubkou a není tedy konstantní na celém průřezu o obsahu S . Ukážeme, jak tuto nesnáz překonat.

Uvažujme svislou rovinnou hráz M . Hrází je přitom myšlena rovinná množina s jednotkovou plošnou hustotou, ne postavený trojrozměrný objekt. Počátek kartézské soustavy souřadnic volíme u hladiny, osa y směřuje dolů, osa x vodorovně. Tlak v hloubce y je roven $p = y\rho g$, kde ρ je hustota vody a g tíhové zrychlení. Na plochu o rozměrech ΔS v hloubce y působí tlaková síla

$$\Delta F = y\rho g\Delta S.$$

Tato tlaková síla má ve všech bodech hráze stejný směr a celkovou sílu na hráz je možno zjistit sečtením sil v jednotlivých bodech. Podobná myšlenková úvaha jako v úvodu pro hmotnost desky, nebo přesný matematický popis, nás dovedou k tomu, že celková síla na hráz je dána integrálem

$$F = \iint_M y\rho g \, dx dy.$$

Protože g a ρ jsou konstanty, je možno psát

$$F = \rho g \iint_M y \, dx dy.$$

Využijeme-li vzorec pro y -ovou souřadnici těžiště, má výsledný vztah tvar

$$F = \rho g y_0 S,$$

kde S je obsah hráze. Formálně tento vztah odpovídá vzorci

$$F = p_0 S, \quad (\text{H1})$$

kde $p_0 = \rho g y_0$ je tlak v těžišti. *Proto v praxi stačí znát těžiště hráze a pro výpočet síly na hráz použít celkovou plochu hráze a tlak v těžišti.* Protože jsme pracovali s obecnou množinou M , není tento poznatek nijak vázán na konkrétní tvar hráze. Musí být však splněna podmínka, že všechny body hráze leží v jedné rovině.

V předchozím textu jsme proměnnou veličinu popisující tlak na hráz jako funkci hloubky nahradili konstantní veličinou, udávající tlak v těžišti. Výsledný účinek na hráz se nezměnil. To je přesně smysl střední hodnoty. V matematických pojmech je možno říci, že střední hodnota tlaku na svislou hráz je rovna tlaku v těžišti hráze. (Protože hrází myslíme spíše rovinnou plochu, tak by přesnější terminologie měla používat raději pojem geometrický střed. Budeme se však držet ustálené terminologie.)

Nikde ve výpočtu jsme nepoužili konkrétní meze pro integraci. Výsledek tedy platí nejenom pro hráz dosahující k hladině, ale například i pro poklop výpusti, který je celý pod vodou.

Působíště tlakové síly

Budeme pokračovat v předchozím příkladě a hledat působíště výsledné tlakové síly.

Tlaková síla působící na svislou hráz má celkový nulový moment vzhledem k ose procházející působíštěm. Je-li hráz definována množinou M a je-li y_c působíště výsledné tlakové síly, je v hloubce y tlak na plošku o velikosti ΔS roven $y\rho g\Delta S$ a součin $(y_c - y)y\rho g\Delta S$ je příspěvek k otáčivému momentu vzhledem k ose, procházející vodorovně působíštěm tlakové síly. Součet všech těchto příspěvků se nuluje, tedy musí platit

$$\iint_M (y_c - y)y\rho g \, dx dy = 0.$$

Odsud po vydělení konstantami ρg dostáváme

$$\iint_M (y_c - y)y \, dx dy = 0$$

a po roznásobení závorky, rozdělení integrálu na dva a vytknutí konstanty

$$y_c \iint_M y \, dx dy = \iint_M y^2 \, dx dy.$$

Nyní již snadno dostaneme výsledný vztah

$$y_c = \frac{\iint_M y^2 \, dx dy}{\iint_M y \, dx dy}. \quad (\text{H2})$$

Pokud je množina M obdélník, je možné ji (po vhodné změně jednotek) brát jako jednotkový čtverec. Protože platí

$$\iint_{[0,1] \times [0,1]} y \, dx dy = \frac{1}{2}, \quad \iint_{[0,1] \times [0,1]} y^2 \, dx dy = \frac{1}{3},$$

dostáváme $y_c = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$ a působíště na obdélníkovou hráz je v hloubce odpovídající dvěma třetinám celkové hloubky.

Formálně vztah pro y_c odpovídá vztahu pro těžiště množiny s plošnou hustotou y . Na tomto pozorování a na skutečnosti, že u pravidelných množin umíme těžiště najít geometricky, je založena metoda nalezení působíště tlakové síly pomocí **zatěžovacího obrazce**.

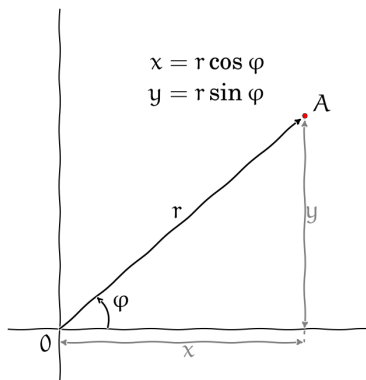
Dvojný integrál v polárních souřadnicích

<https://youtu.be/IEObYHpX72w>

Polární souřadnice

Dosud jsme používali pouze kartézské souřadnice: dvojici čísel udávající vzdálenost bodu od osy y a od osy x , která jednoznačně určuje polohu bodu v rovině. V praxi je někdy výhodnější použít i jiný způsob jak pomocí dvojice čísel charakterizovat polohu bodu v rovině - takové souřadnice potom nazýváme **křivočaré** souřadnice.

Z křivočarých souřadnic jsou nejdůležitější **polární souřadnice**. Při jejich použití polohu bodu A zadáváme tak, že určíme vzdálenost r bodu od počátku soustavy souřadnic O a úhel φ , který svírá spojnice bodů O a A s kladnou částí osy x .

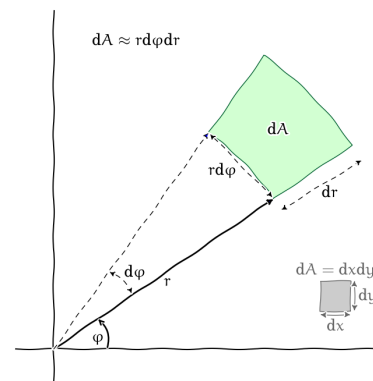


Obrázek 6.5: Polární souřadnice.

Množiny s jednoduchým vyjádřením v polárních souřadnicích

Nejsnáze se při výpočtu dvojného integrálu pracuje s obdélníkovými množinami, tj. s množinami charakterizovanými nerovnostmi pro jednotlivé proměnné a konstantním omezením pro tyto proměnné. Analogicky se bude snadno pracovat v polárních souřadnicích s množinami, které by se staly obdélníky pro překreslení do souřadné soustavy r a φ . Takové množiny jsou zobrazeny na následujících obrázcích.

Převod dvojného integrálu do polárních souřadnic



Obrázek 6.6: Element plochy v polárních souřadnicích

Chceme-li převést dvojný integrál do polárních souřadnic, provádíme v něm vlastně substituci $x = r \cos \varphi$ a $y = r \sin \varphi$. Přitom se transformují i diferenciály dx a dy . Při změně úhlu o $d\varphi$ a změně vzdálenosti o dr má odpovídající část roviny rozměry dr a $r d\varphi$ a její obsah je $r d\varphi dr$ (viz obrázek). Platí tedy, že obsah elementární oblasti $dA = dx dy$ se transformuje na $dA = r d\varphi dr$. Podíl $\frac{d\varphi dr}{dx dy}$ udává, kolikrát se změnil obsah elementární oblasti při změně souřadnic a nazývá se **jakobián**. V případě polárních souřadnic je jakobián jak vidíme roven r a platí tedy

$$\iint_{\Omega} f(x, y) dx dy = \iint_{\Omega} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r d\varphi dr.$$

V diferenciálním počtu polární souřadnice používáme především tam, kde má problém radiální symetrii. Například při studiu ochlazování nebo kmitů kruhových desek či válcovitých součástek. V integrálním počtu tyto souřadnice použijeme zejména v případě, kdy integrujeme přes kružnici nebo její část (např. mezikružší či kruhová výseč). V takovém případě mají totiž integrály které vzniknou po transformaci dvojného integrálu na dvojnásobný pevné meze a výpočet druhého integrálu je zpravidla jednodušší.

Z ptací perspektivy

- Dvojný integrál využijeme tam, kde nás zajímá celková hodnota aditivní veličiny, jejíž příspěvky jsou rozloženy ve dvourozměrné ploše. Například celková tlaková síla na stěnu akvária.
- Dvojný integrál počítáme jako integrál z integrálu aparátem integrálního počtu funkcí jedné proměnné. V řadě případů se však problém dá zjednodušit. Například při integrování funkcí se separovanými proměnnými přes obdélníkové množiny se integrál dá zapsat jako součin integrálů. Podobně, při integrování přes množiny které jsou částmi kruhu se dá v mnoha případech integrál přepsat pomocí polárních souřadnic na integrál přes obdélník (v polárních souřadnicích).

Kapitola 7

Greenova věta

Anotace.

- V přednášce se seznámíme s nástrojem, který umožňuje předvádět mezi sebou křivkové a dvojný integrály. To využijeme později při makroskopické formulaci bilance stavové veličiny a při odvození difuzní rovnice v integrálním tvaru.
- Dále se seznámíme s vektorovou obdobou Newtonovy-Leibnizovy věty. Naučíme se počítat křivkový integrál druhého druhu pomocí rozdílu potenciálu v koncových bodech. Tato možnost není k dispozici automaticky (pouze pro vektorová pole s nulovou rotací, pro která existuje kmenová funkce), ale pokud je možné touto cestou jít, bývá to velké ulehčení.

Prerekvizity.

- Křivkový integrál převádíme na dvojný integrál. Je proto dobré ovládat výpočet dvojného integrálu.
- Pro pochopení odvození rovnice kontinuity v integrálním tvaru je nutné znát význam dvojného integrálu hustoty a umět pomocí křivkového integrálu vypočítat tok.
- Dostaneme se jinou cestou ke stejné rovnici, kterou jsme poznali dříve jako difuzní rovnici. Je vhodné si ujasnit fyzikální význam jednotlivých členů této rovnice a jak se ve speciálních případech tyto členy mohou redukovat na členy jednodušší (izotropní materiál, homogenní materiál, materiál s lineárními vlastnostmi, stacionární děj, proces bez zdrojů).

Úvod

V této přednášce se seznámíme s nástroji pro pohodlný výpočet křivkového integrálu v případě, kdy tento integrál nezávisí na integrační cestě a s metodou převodu křivkového integrálu na dvojný integrál. Tyto myšlenky dnes stojí v samotném základu mnoha dalších teorií a jsou důležité pro přechod mezi lokálním a globálním (mikroskopickým a makroskopickým) popisem transportních jevů. Proto je až neuvěřitelné, že uvedený postup odvodil pekař a samouk **George Green**, který absolvoval jenom jediný rok školní docházky ve věku od osmi do devíti let! Svě

dílo publikoval vlastním nákladem a povětšinou rozdal přátelům, kteří však textu pravděpodobně nemohli vůbec rozumět. Proto nevešlo okamžitě ve známost. Nezávisle na Greenovi podobný přístup objevili i někteří další fyzikové.

V následujících větách si ukážeme některé souvislosti mezi studovanými pojmy. Tyto souvislosti existují, pokud objekty se kterými pracujeme jsou dostatečně pěkné - funkce jsou dostatečně hladké, oblasti mají dostatečně hladkou hranici a neobsahují díry apod. Pro úplnost uvedeme nebo zopakujeme potřebné pojmy. Některé pojmy pro názornost uvedeme poněkud volnější interpretací, jejich přesnější zavedení je možné nalézt v literatuře.

- Vektorové pole $\vec{F}$ se nazývá **potenciálové**, pokud existuje skalární funkce φ s vlastností $\nabla\varphi = \vec{F}$. Funkce φ se nazývá **kmenová funkce** vektorového pole.
- Křivka C se nazývá **uzavřená**, pokud její počáteční a koncový bod splývají.
- Křivka se nazývá **jednoduchá**, pokud sama sebe neprotíná (s případnou výjimkou stejného počátečního a koncového bodu u uzavřených křivek).
- Křivka se nazývá **regulární**, pokud funkce z jejího parametrického vyjádření jsou hladké (mají spojité derivace) a v každém bodě je aspoň jedna z těchto derivací nenulová.
- Pokud platí pro libovolné dvě regulární křivky C a C_1 , které leží v Ω a mají stejné počáteční body a stejné koncové body, platí

$$\int_C \vec{F} d\vec{r} = \int_{C_1} \vec{F} d\vec{r},$$

říkáme, že integrál v Ω **nezávisí na integrační cestě**. Vektorové pole ve kterém křivkový integrál nezávisí na integrační cestě se nazývá **konzervativní pole**.

- Oblast se nazývá **jednoduše souvislá**, pokud je souvislá a neobsahuje otvory.

Věta o nezávislosti integrálu na integrační cestě

<https://youtu.be/zQorgqarHG4>

Podle této věty je tedy vektorové pole v prostoru konzervativní právě tehdy, když je jeho rotace nulová a to je právě tehdy, když pro toto pole existuje kmenová funkce a je tedy možno zavést potenciál (záporně vzatá kmenová funkce).

Věta (o nezávislosti integrálu na integrační cestě). *Uvažujme vektorovou funkci $\vec{F}$, křivku C a oblast Ω v $\mathbb{R}^3$. Následující výroky jsou ekvivalentní za předpokladu hladkosti funkcí, regulárnosti křivek a jednoduše souvislé oblasti Ω .*

- Integrál $\int_C \vec{F} d\vec{r}$ nezávisí v Ω na integrační cestě.
- Křivkový integrál $\oint_C \vec{F} d\vec{r}$ po libovolné uzavřené křivce C v Ω je roven nule.
- Rotace $\nabla \times \vec{F}$ vektorového pole $\vec{F}$ je v Ω rovna nulovému vektoru.
- Existuje funkce φ s vlastností $\nabla\varphi = \vec{F}$ na Ω .

Pokud jsou předchozí podmínky splněny (platnost jedné z nich vynutí platnost i všech ostatních), je možno křivkový integrál vypočítat podle vzorce

$$\int_C \vec{F} d\vec{r} = \varphi(B) - \varphi(A),$$

kde A a B jsou počáteční a koncový bod křivky C a φ je kmenová funkce vektorového pole $\vec{F}$.

manimp:integracni_cesta|Křivkový integrál druhého druhu může a nemusí záviset na integrační cestě. Pokud nezávisí, je jakákoliv práce s úlohou usnadněna, protože je možné zavést potenciální energii.

Tato věta je použitelná na mnoho způsobů.

- Věta přímo udává efektivní kritérium, kdy křivkový integrál nezávisí na integrační cestě. Rotace vektorového pole musí být nulová. Pokud máme vektorové pole zadané analytickým předpisem jednotlivých komponent, je toto nejsnazší kritérium na ověření.
- Věta přímo udává, jak ze znalosti kmenové funkce snadno určit hodnotu křivkového integrálu. Stačí vypočítat změnu kmenové funkce (změnu skalárního potenciálu) mezi počátečním a koncovým bodem křivky.
- Věta také udává, jak vypočítat skalární potenciál pomocí křivkového integrálu. Ač se ve sbírkách příkladů studenti setkávají s výpočtem křivkového integrálu pomocí skalárního potenciálu, je toto typické využití jenom v případech s analyticky snadným řešením. V případě numerických výpočtů s naměřenými daty je hledání skalárního potenciálu v podstatě nemožné provést klasickou cestou. Pomocí křivkového integrálu to je naopak snadné. Stačí si vybrat výchozí bod a počítat křivkové integrály po libovolných křivkách (zpravidla úsečky) do bodů, kde chceme znát skalární potenciál. Tomuto je věnován **Jupyter zápisník ilustrující uvedenou větu**.

Poznámky k větě o nezávislosti křivkového integrálu na integrační cestě

Větu je možno formálně vyslovit i pro jiný než trojrozměrný prostor. Pokud je pole v předchozí větě pouze v rovině, tj. $\vec{F} = (F_x, F_y)$, doplníme třetí komponentu pro výpočet rotace nulou. Protože $\nabla \times \vec{F} = \left(\frac{\partial F_x}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial x} \right) \vec{k}$, přechází podmínka na nulovost rotace v nám již známou nutnou a postačující podmínku

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x}$$

pro to aby výraz

$$F_x dx + F_y dy$$

byl totálním diferenciálem.

Pokud pracujeme v prostoru vyšší dimenze, podmínka na rotaci je nahrazena jinou, komplikovanější podmínkou. Všechny další body věty o nezávislosti na integrační cestě však zůstávají v platnosti beze změny.

Podmínka hladkosti funkcí na jednoduše souvislé oblasti je podstatná. Například pole $\vec{v} = -\frac{y}{x^2 + y^2} \vec{i} + \frac{x}{x^2 + y^2} \vec{j}$ má rotaci rovnu nule ve všech bodech, kde je definované, tj. v celém prostoru kromě osy z . Opravdu, kromě přímého výpočtu to plyne z toho, že se jedná o gradient funkce $\arctan \frac{y}{x}$. Přímým výpočtem je možno ukázat, že křivkový integrál po jednotkové kružnici v rovině $z = 0$ je roven 2π . To je možné ukázat přímým výpočtem, kdy se díky stejnému směru vektorového pole a tečného vektoru křivky integrál redukuje na součin délky křivky s vektorovým polem konstantní velikosti.

[www:problems/krivkovy_integral/40_01.pg](http://www.problems.krivkovy_integral/40_01.pg)

[www:problems/krivkovy_integral/40_02.pg](http://www.problems.krivkovy_integral/40_02.pg)

[www:problems/krivkovy_integral/40_03.pg](http://www.problems.krivkovy_integral/40_03.pg)

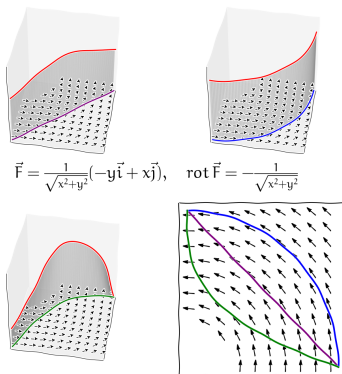
[www:problems/krivkovy_integral/40_04.pg](http://www.problems.krivkovy_integral/40_04.pg)

[www:problems/krivkovy_integral/40_05.pg](http://www.problems.krivkovy_integral/40_05.pg)

[www:problems/krivkovy_integral/40_06.pg](http://www.problems.krivkovy_integral/40_06.pg)

Greenova věta

<https://youtu.be/L9iF8H43feQ>



Obrázek 7.1: Křivkový integrál v nekonzervativním poli (obsahy jsou různé)

Věta (Greenova věta). Necht $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ je jednoduše souvislá regulární oblast, jejíž hranici je po částech regulární křivka $\partial\Omega$ orientovaná tak, že při obíhání podél křivky $\partial\Omega$ je oblast Ω vlevo. Necht vektorová funkce $\vec{F}(x, y) = P(x, y)\vec{i} + Q(x, y)\vec{j}$ je hladká uvnitř nějaké oblasti, obsahující množinu Ω a její hranici $\partial\Omega$. Platí

$$\underbrace{\oint_{\partial\Omega} P(x, y)dx + Q(x, y)dy}_{\text{Cirkulace po hranici } \partial\Omega} = \iint_{\Omega} \underbrace{\left(\frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} \right)}_{[\nabla \times (P\vec{i} + Q\vec{j})]_z} dx dy.$$

Varianta Greenovy věty pro tok křivkou

Nahradíme-li formálně vektorové pole $P\vec{i} + Q\vec{j}$ vektorovým polem $-Q\vec{i} + P\vec{j}$, dostáváme následující vztah mezi dvojným integrálem divergence vektorového pole přes oblast Ω a křivkovým integrálem vyjadřujícím tok vektorového pole $P\vec{i} + Q\vec{j}$ protékající přes hranici $\partial\Omega$.

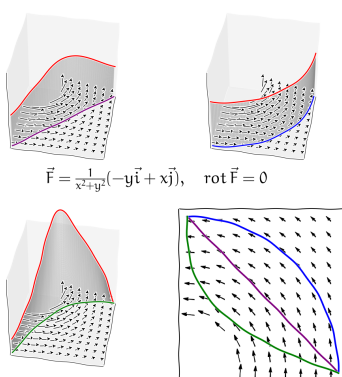
$$\underbrace{\oint_{\partial\Omega} -Q(x, y)dx + P(x, y)dy}_{\text{Tok přes hranici } \partial\Omega} = \iint_{\Omega} \underbrace{\left(\frac{\partial P(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial Q(x, y)}{\partial y} \right)}_{\text{div}(P\vec{i} + Q\vec{j})} dx dy$$

Výše popsané dvě varianty Greenovy věty nám dávají možnost najít fyzikální interpretaci operátorů divergence a rotace. Podíl dvojného integrálu funkce f přes oblast Ω a obsahu této oblasti je roven střední hodnotě funkce f na množině Ω . Při limitním přechodu, kdy rozměry množiny Ω jdou k nule, dostaneme přímo funkční hodnotu funkce f . Toto nám umožňuje dostat se do integrandů na pravých stranách vztahů.

Rotaci je tedy možno chápat jako limitu podílu cirkulace vektorového pole po uzavřené křivce a obsahu množiny uvnitř této křivky, kdy v limitním procesu stahujeme délku křivky k nule. Zejména pokud je práce po libovolné uzavřené křivce nulová, je nulová i rotace.

Podobně divergenci je možno chápat jako limitu podílu toku uzavřenou křivkou a obsahu množiny ohraničené touto křivkou, když rozměry uvažované oblasti jdou k nule. V ustáleném stavu a při absenci zdrojů ani spotřebičů je tok dovnitř křivky stejný jako tok ven (co do uzavřeného prostoru vteče, to i vyteče ven) a divergence je rovna nule.

Greenova věta a přechod mezi lokálním a globálním tvarem rovnice kontinuity



Obrázek 7.2: Křivkový integrál v konzervativním poli (obsahy jsou stejné)

ww:problems/dvojny_integral/14.pg

ww:problems/dvojny_integral/14a.pg

Greenova věta umožňuje přechod mezi lokálním tvarem fyzikálních zákonů (co se děje v daném bodě prostoru) a globálním tvarem (co se děje v konečném objemu). Z fyzikálního hlediska je zajímavější lokální tvar, protože dává náhled, jak fungují studované procesy. Z hlediska pozorovatele je zajímavější globální tvar, protože pracuje s reálně měřitelnými pojmy. Vzhledem k možnosti přechodu mezi těmito přístupy je užitečnost Greenovy věty a jejího trojrozměrného zobecnění nezastupitelná.

Navážeme na koncept představený v přednášce o divergenci vektorového pole a podobnou bilanci stavové veličiny, jakou jsme použili v odvození rovnice kontinuity a difuzní rovnice použijeme pro konečně velký objem.

Je-li $u(x, y)$ hustota stavové veličiny v množině M , $\sigma(x, y)$ vydatnost zdrojů a $\vec{J} = (P, Q)$ pole popisující tok stavové veličiny, je rychlost s jakou roste množství stavové veličiny v množině M (tj. derivace množství podle času) dána vydatností zdrojů stavové veličiny snížená o odtok stavové veličiny přes hranici množiny M . Matematicky vyjádřeno platí

$$\frac{d}{dt} \left(\iint_M u \, dx dy \right) = \iint_M \sigma \, dx dy - \oint_{\partial M} -Q \, dx + P \, dy.$$

Díky nezávislosti x a y na čase t můžeme zaměnit pořadí derivace podle času a dvojného integrálu vlevo. Křivkový integrál vpravo můžeme přepsat pomocí Greenovy věty na dvojný integrál. Tím dostáváme

$$\begin{aligned} \iint_M \frac{\partial u}{\partial t} \, dx dy &= \iint_M \sigma \, dx dy \\ &\quad - \iint_M \left(\frac{\partial P(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial Q(x, y)}{\partial y} \right) \, dx dy \end{aligned}$$

a po zkrácení označení v posledním dvojném integrálu a využití linearity integrálu vztah přejde do tvaru

$$\iint_M \frac{\partial u}{\partial t} \, dx dy = \iint_M \sigma - \nabla \cdot \vec{J} \, dx dy.$$

Protože tato rovnost má platit pro libovolnou množinu M , musí se rovnat nejenom integrály, ale i integrované funkce, tj. musí platit

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sigma - \nabla \cdot \vec{J}.$$

Toto je stejná rovnice jako rovnice odvozená lokálními úvahami v přednášce o divergenci. Stejně jako v této přednášce poté můžeme pomocí konstitutivního vztahu

$$\vec{J} = -D \nabla u$$

obdržet difuzní rovnici

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sigma + \nabla \cdot (D \nabla u).$$

Kapitola 8

Diferenciální rovnice

Anotace.

- V přednášce se seznámíme s rovnicemi, obsahujícími derivace neznámé funkce. Jejich využití je všude tam, kde rychlosti změn veličin jsou dány hodnotami těchto veličin.
- Typickým příkladem je radioaktivita, protože množství rozpadlých atomů je dáno množstvím nestabilních atomů. Aplikace potom můžeme najít například při ochraně budov před radioaktivním radonem.
- Jiným typickým příkladem jsou populační modely, kdy přírůstek populace je dán počtem jedinců schopných reprodukce a ten zpětně souvisí s velikostí populace. Využití je při návrhu trvale udržitelného hospodaření s přírodními zdroji při lovu.
- Technicky významným příkladem je i model tepelná výměna, kdy se rychlost změny teploty při tepelné výměně se mění podle intenzity toku a ta se mění s teplotním rozdílem.
- Řada diferenciálních rovnic má speciální vlastnosti, které můžeme využít při prozkoumávání řešení. Dokonce můžeme například popsat, jak vypadají všechna řešení, aniž bychom je museli počítat. Některé z těchto taktik se naučíme v přednáškách v dalších týdnech věnovaných lineárním rovnicím (následující přednáška) a autonomním systémům (přednáška následující po přednášce o lineárních rovnicích). Teď to zmiňujeme proto, aby šlo vidět, že v případě diferenciálních rovnic nejsou dovednosti spojené s výpočtem jejich řešení tak důležité, jak jsme zvyklí u jiných druhů rovnic. Proto jsou v následujícím seznamu dovedností až na konci.
- Důležité dovednosti, které se naučíme v souvislosti s diferenciálními rovnicemi, jsou zejména
 - schopnost naformulovat diferenciální rovnici podle slovního popisu mechanismu modelovaného děje,
 - dovednost posoudit existenci a jednoznačnost řešení,
 - dovednost snížit transformací počet parametrů rovnice
 - a až v poslední řadě najít řešení numericky nebo analytickou cestou.

Prerekvizity.

- Diferenciální rovnice souvisí s derivacemi. Pro úspěšné rozhodnutí, zda se úloha dá modelovat pomocí diferenciální rovnice nutně potřebujeme spolehlivě znát využití derivace. V podstatě s jistotou všude tam, kde se mluví o rychlostech, ale aplikace jsou i jinde.
- Pro nalezení analytického řešení diferenciální je třeba ovládat integrál funkce jedné proměnné.

Modely založené na rychlostech (derivacích)

<https://youtu.be/08uAuAgY-lw>

Tepelná výměna, káva v hrnku

- Z fyziky víme, že *rychlost tepelné výměny mezi dvěma tělesy je úměrná rozdílu jejich teplot* (Newtonův zákon tepelné výměny). Rychlostí tepelné výměny můžeme rozumět například rychlost s jakou roste teplota studeného tělesa v teplém prostředí nebo s jakou klesá teplota horkého tělesa umístěného v chladnějším prostředí.
- Rychlost s jakou roste teplota T tělesa v čase je derivace teploty podle času. Pokud potřebujeme pracovat s poklesem, uvažujeme záporně vzatou derivaci. Úměrnost matematicky vyjádříme násobením konstantou a teplotní rozdíl může být například při umístění horkého tělesa o teplotě T v chladné místnosti o teplotě T_0 vyjádřen rozdílem $T - T_0$.
- Proces tepelné výměny probíhající podle Newtonova zákona je tedy možno modelovat vztahem

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_0).$$

- K rovnici v ideálním případě dodáváme materiálovou charakteristiku (konstantu úměrnosti k) a počáteční teplotu. Řešením je funkce udávající závislost teploty na čase. Chceme-li znát teplotu za určitý čas, není nutné provádět pokus a čekat na uplynutí požadované doby. Můžeme teplotu přímo vypočítat.

- Někdy může být vhodné nesledovat teplotu T , ale rozdíl oproti okolní teplotě, $\tau = T - T_0$. Model se potom zjednoduší na

$$\frac{d\tau}{dt} = -k\tau,$$

tedy na model, kdy rychlost změny je úměrná funkční hodnotě.

Radioaktivní rozpad, radon ve sklepech

- Radioaktivní prvky se rozpadají rychlostí, která je úměrná množství dosud nerozpadnutého materiálu. Rychlost, s jakou se mění množství (a tedy i koncentrace y v daném vzorku) nerozpadnutého radioaktivního materiálu je tedy popsána matematickým modelem

$$\frac{dy}{dt} = -\lambda y,$$

kde λ je konstanta úměrnosti. Tato rovnice je přirozeným důsledkem toho, že pro daný nestabilní izotop mají všechny atomy stejnou pravděpodobnost, že u nich dojde k rozpadu a tato pravděpodobnost se s časem nemění.

- Nejznámější aplikací této rovnice je datování archeologických vzorků pomocí radioaktivního uhlíku ^{14}C . V tomto případě se sleduje vzájemná relace mezi množstvím tohoto nestabilního uhlíku a množstvím stabilního ^{12}C . Počáteční podmínka je známa (předpokládáme stejný poměr zastoupení jako relativně nedávno, před průmyslovou revolucí) a díky tomu můžeme najít funkci udávající, jak s časem klesá zastoupení radioaktivního uhlíku. Obsah radioaktivního i stabilního uhlíku je možné změřit a tím získáme odhad, kolik procent radioaktivního uhlíku se rozpadlo. Řešení počáteční úlohy poté použijeme pro odhad doby, kdy organismus přestal spotřebovávat uhlík z atmosféry, tj. odhad stáří vzorku.
- Při pokusu o datování kostí dinosaurů klesne množství radioaktivního uhlíku pod měřitelnou úroveň. Proto se v tomto případě používají látky s delším poločasem rozpadu.
- Optikou běžného života je nejzajímavější aplikací této rovnice model rozpadu v radioaktivní radě uranu, kdy vzniká plynný radon, který může působit problémy ve stavbách a v rizikových lokalitách je potřeba vhodnými konstrukčními přístupy nebo aktivními zařízeními na lapání a odvětrávání radonu.

Samočištění jezer, kontaminace v jezeře

- Nechť veličina y udává množství látky, která znečišťuje vodu v jezeře o objemu V .
- Předpokládejme, že do jezera přitéká čistá voda a stejnou rychlostí odtéká voda s nečistotami (hladina se nemění, je v ustáleném stavu). Nechť veličina r udává, jaký objem vody se v jezeře takto vymění za jeden den.

Předpokládejme dále (poněkud nerealisticky), že rozdělení znečišťujících částic v jezeře je rovnoměrné.

- Úbytek hmotnosti nečistot za časovou jednotku je dán derivací $\frac{dy}{dt}$.
- Protože koncentrace nečistot v jezeře a v odtékající vodě je $\frac{y}{V}$, je úbytek znečištění možno vyjádřit též ve tvaru $\frac{r}{V}y$. Podíl $\frac{r}{V}$ je pro dané jezero kladná konstanta udávající, jak velká část z celkového množství vody se v jezeře vymění za časovou jednotku. Označíme-li tuto konstantu symbolem k , je proces úbytku nečistot v jezeře popsán vztahem

$$\frac{dy}{dt} = -ky.$$

- Výše uvedený model se nazývá *rovnice samočištění jezer*, ale tento název je čistě formální. Jedná se vlastně o stejnou rovnici, která popisuje radioaktivní rozpad nebo změnu rozdílu mezi teplotou horkého nápoje a místnosti při chlazení nápoje.
- Stejnou rovnicí je možné popsat nejenom odbourávání nečistot z životního prostředí, ale i odbourávání léků nebo drog z těla. Považujeme krevní oběh za jezero a lék nebo drogu za znečišťující látku. V případě, že rychlost odbourávání je úměrná koncentraci (platí pro farmakokinetiku prvního řádu, toto splňuje většina léčiv za běžných koncentrací), řídí se proces odbourávání stejnou diferenciální rovnicí.

RC obvod a chytré stěny ve dřevostavbách.

Při nabíjení kondenzátoru o kapacitě C přes odpor o velikosti R roste napětí na kondenzátoru, tím se mění nabíjecí proud a proto se mění i rychlost nabíjení. Pomocí zákonů elektrotechniky je **možno ukázat**, že nabíjecí proud i kondenzátoru se řídí vztahem

$$R \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} i = 0.$$

Napětí na kondenzátoru je možno odvodit buď z proudu, napětí na rezistoru a napětí zdroje, nebo z celkového proudu, který prošel kondenzátorem.

Rovnice je tedy stejná jako rovnice radioaktivního rozpadu a rovnice samočištění jezer. Vhodnou manipulací s parametry součástek je možno měnit koeficient u této rovnice a vhodným spojováním těchto obvodů dokážeme podobně simulovat i složitější rovnice. To je bylo základem analogových počítačů, které nepracovaly s čísly, ale s napětími. Tyto počítače sehrály svou roli v době, kdy číslicové počítače byly nedostupné, pomalé a nespolehlivé. Tím byla historická úloha analogových počítačů splněna a již se nepoužívají.

RC obvod jako takový má však důležité místo i dnes. Dokáže například filtrovat signály podle frekvence. Výpočet jeho charakteristiky (tj. vyřešení rovnice) a sledování napětí na kondenzátoru umožní měření elektrického odporu

tam, kde není vhodné odpor určovat z proudu a napětí pomocí Ohmova zákona. Typickým příkladem je odpor dřeva a jeho vodivost, tj. převrácená hodnota odporu. Tato veličina se používá k rychlému stanovení vlhkosti dřeva, nebo je možno ji dlouhodobě sledovat pomocí senzorů zabudovaných do dřevostavby.

Ve skutečnosti žádná elektronická součástka nemá ideální vlastnosti a proto se v obvodu projevují i nežádoucí parazitní charakteristiky. Pokud by toto bylo limitující, je možné obvod nahradit podobně se chovajícím zapojením s **operačním zesilovačem** (odkazovaná stránka pracuje s rovnicí v integrálním tvaru).

Vývoj populace a její ekologický lov

- Zkoumejme velikost y určité populace v prostředí s nosnou kapacitou K .
- Realistickým předpokladem dodaným biologickými vědami je, že v prostředí s omezenými úživnými vlastnostmi specifická míra růstu populace (rychlost s jakou se velikost populace zvětšuje vztažená na jednotkové množství populace) klesá s tím, jak se velikost populace přibližuje k nosné kapacitě, a rychlost růstu populace je modelována funkcí $ry \left(1 - \frac{y}{K}\right)$. Podle velikosti koeficientů v této funkci dělíme živočichy na **r-strategii** a **K-strategii** a toto dělení odráží, jak se snaží druh vyrovnávat se změnami prostředí.
- Za uvedených předpokladů je možno vývoj populace popsat modelem

$$\frac{dy}{dt} = ry \left(1 - \frac{y}{K}\right),$$

který se nazývá *logistická rovnice*.

- Pokud lovem snížíme přírůstky populace, můžeme tento proces popsat modelem

$$\frac{dy}{dt} = ry \left(1 - \frac{y}{K}\right) - h(y),$$

kde $h(y)$ je intenzita lovu populace o velikosti y . Modelování tohoto procesu umožní nalezení ekonomicky výhodné ale přitom trvale udržitelné strategie lovu.

Obyčejná diferenciální rovnice prvního řádu

<https://youtu.be/3HTs6zJ0gMk>

Obyčejná diferenciální rovnice je rovnice, kde vystupuje neznámá funkce a její derivace. Setkáváme se s ní například všude tam, kde rychlost růstu nebo poklesu veličiny souvisí s její velikostí. Například rychlost s jakou se mění teplota horkého tělesa je funkcí teploty samotné. Rychlost tepelné výměny mezi dvěma tělesy je totiž úměrná rozdílu jejich teplot (Newtonův zákon). Takto se přirozeně diferenciální rovnice objevují v modelech nejrůznějších dějů

jevů. Podstatu děje, který modelujeme, musí dodat fyzika, biologie nebo jiná aplikovaná věda. To v matematice obsaženo není. Matematika poté poslouží k analýze, jaké jsou pozorovatelné důsledky a tím se ověří, jestli příslušná aplikovaná věda správně vystihuje podstatu modelovaného děje.

Definice (diferenciální rovnice). Obyčejnou diferenciální rovnici prvního řádu rozřešenou vzhledem k derivaci (stručněji též diferenciální rovnici, DR) s neznámou y rozumíme rovnicí tvaru

$$\frac{dy}{dx} = \varphi(x, y) \quad (1)$$

kde φ je funkce dvou proměnných.

(anglicky ordinary differential equation, ODE)

Další formy zápisu rovnice (1) jsou

$$\begin{aligned} y' &= \varphi(x, y), \\ dy &= \varphi(x, y)dx, \\ dy - \varphi(x, y)dx &= 0. \end{aligned}$$

Příklad. Najděte všechny funkce splňující $y' = 2xy$. (Naučíme se řešit později.)

Diferenciální rovnice udává scénář vývoje systému. K jednoznačnému předpovězení budoucího stavu je ovšem nutno znát nejenom, jaký mechanismus ovlivňuje vývoj systému, ale také stav současný.

Definice (počáteční podmínka, Cauchyova úloha).

Nechť x_0, y_0 jsou reálná čísla. Úloha najít řešení rovnice

$$\frac{dy}{dx} = \varphi(x, y), \quad (1)$$

které splňuje zadanou počáteční podmínku

$$y(x_0) = y_0 \quad (2)$$

se nazývá *počáteční* (též *Cauchyova*) *úloha*.

Řešení Cauchyovy úlohy nazýváme též *partikulárním řešením rovnice*. Graf libovolného partikulárního řešení se nazývá *integrální křivka*.

(anglicky initial condition, IC, initial value problem, IVP)

Příklad. Najděte všechny funkce splňující $y' = 2xy$ a $y(0) = 3$. (Naučíme se řešit později.)

Věta (existence a jednoznačnost řešení Cauchyovy úlohy). Má-li funkce $\varphi(x, y)$ ohraničenou parciální derivaci $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$ v okolí počáteční podmínky, potom má počáteční úloha (1)-(2) právě jedno řešení definované v nějakém okolí počáteční podmínky.

Příklad. Rovnice

$$y' = y \quad (3)$$

má řešení $y = e^x$, což nahlédneme snadno, protože exponenciální funkce se nemění derivováním. Dosazením je možné ukázat, že má dokonce řešení

$$y = Ce^x, \quad (4)$$

kde C je libovolné číslo.

Příklad. Řešení počáteční úlohy

$$y' = y, \quad y(x_0) = y_0$$

najdeme tak, že využijeme řešení (4) a zařídíme, aby byla splněna počáteční podmínka. Tj. řešením počáteční úlohy je

$$y = (y_0 e^{-x_0}) e^x.$$

Vidíme, že toto řešení existuje pro každou počáteční podmínku a proto vzorec (4) popisuje dokonce **všechna** řešení rovnice (3).

Obecné a partikulární řešení

Řešení diferenciální rovnice je nekonečně mnoho. Zpravidla je dokážeme zapsat pomocí jediného vzorce, který obsahuje nějakou (alespoň do jisté míry libovolnou) konstantu C . Takový vzorec se nazývá **obecné řešení rovnice**. Pokud není zadána počáteční podmínka a mluvíme o **partikulárním řešení**, máme tím na mysli jednu libovolnou funkci splňující diferenciální rovnici.

Příklad: Obecným řešením diferenciální rovnice

$$y' = 2xy$$

je

$$y = Ce^{x^2}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Žádná jiná řešení neexistují, všechna řešení se dají zapsat v tomto tvaru pro nějakou vhodnou konstantu C . Partikulárním řešením je například $y = 5e^{x^2}$. Řešením počáteční úlohy

$$y' = 2xy, \quad y(0) = 3$$

je

$$y = 3e^{x^2}.$$

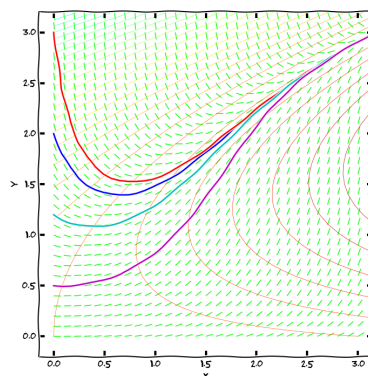
Úvod do problematiky numerického řešení diferenciálních rovnic

Nejprve si naznačíme možnosti numerického řešení. To vychází z grafické interpretace diferenciální rovnice a odpovídá v podstatě modelování, kdy postupně prodlužujeme řešení od zadané počáteční podmínky dopředu či dozadu v čase. Přitom musíme řešit situaci vždy pro konkrétní numerické hodnoty počáteční podmínky a všech parametrů. Naštěstí se dá vhodnou transformací (resp. vhodnou

volbou jednotek) počet parametrů zredukovat a tím se zvýší obecná použitelnost numerického výpočtu.

<https://youtu.be/7tm1QbNDiz8>

Geometrická interpretace ODE



Obrázek 8.1: Směrové pole diferenciální rovnice, integrální křivky, isokliny

Protože derivace funkce v bodě udává směrnici tečny ke grafu funkce v tomto bodě, lze rovnici

$$y' = \varphi(x, y)$$

chápat jako předpis, který každému bodu v rovině přiřadí směrnici tečny k integrální křivce, která tímto bodem prochází. Sestrojíme-li v dostatečném počtu (například i náhodně zvolených) bodů $[x, y]$ v rovině vektory $(1, \varphi(x, y))$, obdržíme **směrové pole diferenciální rovnice** — systém lineárních elementů, které jsou tečné k integrálním křivkám.

Počáteční podmínka $y(x_0) = y_0$ geometricky vyjadřuje skutečnost, že graf příslušného řešení prochází v rovině bodem $[x_0, y_0]$. Má-li tato počáteční úloha jediné řešení, neprochází bodem $[x_0, y_0]$ žádná další křivka. Má-li každá počáteční úloha jediné řešení (což bude pro nás velice častý případ), znamená to, že integrální křivky se *nikde neprotínají*.

Křivky s konstantní hodnotou $\varphi(x, y)$ mají tu vlastnost, že je všechna řešení protínají pod stejným úhlem, měřeným od kladné části osy x . Například v bodech kde platí $\varphi(x, y) = 0$ míří všechny integrální křivky vodorovně. Proto se křivky, kde je $\varphi(x, y)$ konstantní, nazývají **izokliny**.

Transformace diferenciální rovnice

manimp:ODE_transformace|Vhodnou transformací je možno zredukovat počet parametrů v rovnici a tím usnadnit numerické simulace. Nematematická cesta k transformaci je vhodná volba jednotek pro sledované veličiny.

Naučíme se vyjadřovat diferenciální rovnici v jiných proměnných tak, aby bylo možné snížit počet parametrů

v této rovnici. Pro jednoduchost budeme uvažovat jenom případ, kdy nová proměnná je lineární funkcí původní proměnné.

Uvažujme funkci y proměnné x . Připomeneme si vzorce pro derivaci součtu, derivaci konstantního násobku a derivaci složené funkce, ale uvedeme si je v kontextu vhodném pro studium diferenciálních rovnic.

- Z derivace součtu a z derivace konstanty plyne pro funkci y a konstantu y_0 vztah

$$\frac{d(y \pm y_0)}{dx} = \frac{dy}{dx} \pm \frac{dy_0}{dx} = \frac{dy}{dx} \pm 0 = \frac{dy}{dx}.$$

- Z derivace konstantního násobku funkce plyne pro funkci y a konstantu k vztah

$$\frac{d(ky)}{dx} = k \frac{dy}{dx}.$$

- Z derivace složené funkce plyne pro konstantu k a veličinu $X = kx$ vztah

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dX} \frac{dX}{dx} = \frac{dy}{dX} k$$

tj.

$$\frac{dy}{d(kx)} = \frac{dy}{dX} = \frac{1}{k} \frac{dy}{dx}.$$

Výše uvedené výpočty je možno shrnout do pravidla v následující poznámce.

Poznámka (transformace diferenciální rovnice do jiných jednotek). Pro $Y = k_1(y - y_0)$ a $X = k_2x$ platí

$$\frac{dY}{dX} = \frac{d(k_1(y - y_0))}{d(k_2x)} = \frac{k_1}{k_2} \frac{dy}{dx}$$

a podobně (všimněte si druhé mocniny u k_2 díky druhé derivaci)

$$\frac{d^2Y}{dX^2} = \frac{k_1}{k_2^2} \frac{d^2y}{dx^2}.$$

Výraz nalevo neobsahuje konstanty, které jsou ve výrazu napravo. Tyto konstanty jsou v definici nových veličin X a Y .

Navíc vzorec z poznámky silně připomíná klasické počítání se zlomky. Proto máme Leibnizův tvar zápisu derivací $\frac{dy}{dx}$ při studiu diferenciálních rovnic více v oblibě, než zápis Lagrangeův, y' .

Příklad. Diferenciální rovnice tepelné výměny

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_\infty), \quad T(0) = T_0 \quad (*)$$

obsahuje tři parametry: teplotu okolního prostředí T_∞ , počáteční teplotu T_0 a konstantu k související s fyzikálními vlastnostmi prostředí. Postupně můžeme posunout teplotní stupnici tak, aby teplota okolí byla nula a počáteční

teplota jedna, tj. hodnotu T snížíme o T_∞ a upravíme dílek stupnice $(T_0 - T_\infty)$ -krát

$$\frac{d\left(\frac{T-T_\infty}{T_0-T_\infty}\right)}{dt} = -k \frac{T-T_\infty}{T_0-T_\infty}$$

vydělit konstantou k

$$\frac{d\left(\frac{T-T_\infty}{T_0-T_\infty}\right)}{k dt} = -\frac{T-T_\infty}{T_0-T_\infty}$$

a přeškálovat pomocí konstanty k čas

$$\frac{d\left(\frac{T-T_\infty}{T_0-T_\infty}\right)}{d(kt)} = -\frac{T-T_\infty}{T_0-T_\infty}.$$

Po substituci $y = \frac{T-T_\infty}{T_0-T_\infty}$, $x = kt$ má úloha tvar

$$\frac{dy}{dx} = -y, \quad y(0) = 1. \quad (**)$$

Nová rovnice (**) *neobsahuje žádné parametry* a proto je pro studium jednodušší. Přesto je v ní obsažena veškerá informace obsažená v rovnici (*). Tuto informaci je však nutno interpretovat v kontextu definice nových proměnných. Například to, že všechna řešení rovnice (**) konvergují k nule znamená, že všechna řešení rovnice (*) konvergují k T_0 . To, že řešení rovnice (**) klesne na poloviční hodnotu za čas $\ln 2$ znamená, že vzdálenost řešení rovnice (*) od rovnovážného stavu se na polovinu zmenší za čas $\frac{1}{k} \ln 2$.

Poznámka (nondimenzionalizace, rozměrová analýza). Proces eliminace parametrů z modelu popsaného diferenciální rovnicí se nazývá nondimenzionalizace nebo rozměrová analýza modelu, protože eliminaci parametrů je vhodné provádět tak, aby výsledné nové veličiny vycházely bez fyzikálních jednotek. K tomu se provádí rozbor jednotek jednotlivých veličin. V jednoduchých případech však stačí primitivní postup popsaný v odstavcích výše a ukázaný na příkladu. V tomto příkladě veličina x nemá fyzikální jednotku, protože je součinem konstanty k (s jednotkou s^{-1}) a času t (s jednotkou s). Je možné ji považovat za *bezrozměrný čas*. Veličina y také nemá fyzikální jednotku, protože je podílem dvou teplot a je možné ji považovat za *bezrozměrnou teplotu*.

V této úloze bylo zavedení nových veličin přirozené. I u méně zřejmých úloh zkušenosti ukazují, že je vhodné volit transformaci tak, aby vznikly veličiny bezrozměrné, které nemají fyzikální jednotku. Například v *Horáček, Fyzikální a mechanické vlastnosti dřeva I* je zavedena *bezrozměrná vlhkost, bezrozměrný čas a bezrozměrná vzdálenost* na straně 61 pro rovnici popisující difuzi a *charakteristická délka, Biotovo číslo (bezrozměrná tepelná vodivost) a bezrozměrná teplota, bezrozměrný čas a bezrozměrná vzdálenost* pro rovnici popisující vedení tepla na stranách 88 a 89.

ODE tvaru $\frac{dy}{dx} = f(x)g(y)$ (rovnice se separovanými proměnnými)

https://youtu.be/yH6jzK_999E

Najít řešení obecné diferenciální rovnice je nemožné, ani však takové ambice mít nemusíme. V praxi se setkáváme s poměrně speciálními druhy diferenciálních rovnic a pro ně jsou metody řešení k dispozici. Jeden takový jednoduše řešitelný druh diferenciální rovnice je představen v následujícím textu.

Definice (ODE se separovanými proměnnými). Diferenciální rovnice tvaru

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y) \quad (S)$$

kde f a g jsou funkce spojitě na (nějakých) otevřených intervalech se nazývá *obyčejná diferenciální rovnice se separovanými proměnnými*.

Příklad: Rovnice

$$y' + xy + xy^2 = 0$$

je rovnicí se separovanými proměnnými, protože je možno ji zapsat ve tvaru

$$y' = -xy(y + 1).$$

Rovnice

$$y' = x^2 - y^2$$

není rovnicí se separovatelnými proměnnými.

Řešení ODE se separovanými proměnnými

1. Má-li algebraická rovnice $g(y) = 0$ řešení $k_1, k_2, \dots, k_n$, jsou konstantní funkce $y \equiv k_1, y \equiv k_2, \dots, y \equiv k_n$ řešeními rovnice.
2. Pracujeme na intervalech, kde $g(y) \neq 0$ a odseparujeme proměnné.

$$\frac{dy}{g(y)} = f(x)dx$$

3. Získanou rovnost integrujeme. Tím získáme obecné řešení v implicitním tvaru.

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx + C$$

4. Pokud je zadána počáteční podmínka, je možné ji na tomto místě dosadit do obecného řešení a určit hodnotu konstanty C . Tuto hodnotu poté dosadíme zpět do obecného řešení a obdržíme řešení *partikulární*.

5. Pokud je to možné, převedeme řešení (obecné nebo partikulární) do explicitního tvaru (vyjádříme odsud y).

Poslední krok (převod do explicitního tvaru) je volitelný, zpravidla záleží na tom, co dalšího hodláme s řešením dělat. Pro většinu výpočtů je však explicitní tvar vhodnější než tvar implicitní a proto se o něj vždy snažíme.

Poznámka (zápis partikulárního řešení pomocí určitého integrálu). V případě počáteční podmínky $y(x_0) = y_0$ je možné spojit třetí a čtvrtý krok a použít určitý integrál

$$\int_{y_0}^y \frac{dt}{g(t)} = \int_{x_0}^x f(t)dt.$$

Počáteční úloha má jediné řešení, pokud má pravá strana ohraničenou parciální derivace podle y , jak je zmíněno v úvodu přednášky. Nicméně pro diferenciální rovnici se separovanými proměnnými je možné vyslovit následující mnohem jednodušší postačující podmínku pro jednoznačnost řešení.

Věta (existence a jednoznačnost řešení Cauchyovy úlohy pro rovnici se separovanými proměnnými). Je-li $g(y_0) \neq 0$, má počáteční úloha

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y), \quad y(x_0) = y_0$$

právě jedno řešení definované v nějakém okolí počáteční podmínky.

Poznámka (existence a jednoznačnost konstantního řešení). Je-li $g(y_0) = 0$, potom má počáteční úloha

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y), \quad y(x_0) = y_0$$

konstantní řešení $y(t) = y_0$, ale z předchozí věty neplatí nic o jednoznačnosti tohoto řešení. Je možné použít větu o jednoznačnosti platnou pro obecnější rovnici

$$\frac{dy}{dx} = \varphi(x, y)$$

uvedenou výše a potom je řešení určeno jednoznačně, pokud má funkce g v okolí počáteční podmínky ohraničenou derivaci.

Redukce parciální diferenciální rovnice na obyčejnou

<https://youtu.be/vDEQBp8y6Jk>

V předchozích týdnech jsme se seznámili s modely založenými na parciálních derivacích, zejména s difuzní rovnicí. V případě, kdy hledaná stavová veličina je funkcí jenom jedné proměnné se parciální derivace redukují na obyčejné derivace a můžeme takové modely řešit v rámci obyčejných diferenciálních rovnic.

Jednorozměrný případ

Ukážeme si, že parciální diferenciální rovnice popisující tok tepla nebo tok podzemní vody se ve speciálních případech redukují na diferenciální rovnice, jaké jsme se právě naučili řešit.

Uvažujme tok tepla stěnou o tloušťce d která odděluje dvě prostředí o teplotách T_1 a T_2 .

Stacionární tok tepla v jedné dimenzi je dán rovnicí

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) = 0.$$

V ustáleném stavu je T funkcí jedné proměnné x a parciální derivace se redukují na obyčejné derivace. Rovnice má tvar

$$\frac{d}{dx} \left(k \frac{dT}{dx} \right) = 0.$$

Po integraci dostáváme

$$k \frac{dT}{dx} = C_1.$$

Tuto rovnici budeme řešit ve dvou různých situacích, a to pro lineární a nelineární materiálové vztahy.

Lineární materiálové vztahy, tj. konstantní materiálová charakteristika

- Je-li k konstantní, dostáváme

$$\frac{dT}{dx} = \frac{C_1}{k}$$

a integrací dostáváme

$$T = \frac{C_1}{k} x + C_2.$$

Konstanty C_1 a C_2 určíme z podmínek na teplotu na jednotlivých stranách stěny. Vidíme, že teplota ve stěně klesá lineárně.

- Stejná rovnice a stejné řešení vychází i pro piezometrickou hladinu při rovinném ustáleném proudění podzemní vody v případě, že materiálová charakteristika je konstantní, tj. při proudění s napjatou hladinou (podzemní kolektor s nepropustným stropem a pod tlakem).

Nelineární materiálové vztahy, tj. nekonstantní materiálová charakteristika

- Zopakujme předchozí výpočet pro materiál s nelineární materiálovou odezvou, kdy Fourierův (Darcyho v případě podzemní vody) zákon není lineární, tj. k závisí na teplotě. Nejjednodušší zobecnění je případ, kdy $k(T)$ je lineární, tj. platí

$$k(T) = aT + b.$$

Poté má rovnice tvar

$$(aT + b) \frac{dT}{dx} = C_1$$

a po separaci proměnných dostáváme

$$(aT + b)dT = C_1 dx$$

a

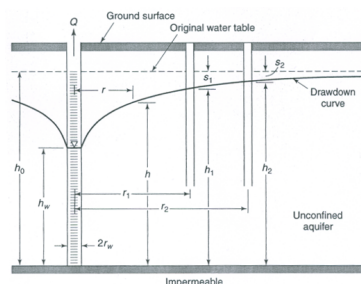
$$\frac{1}{2} a T^2 + b T = C_1 x + C_2.$$

Teplotní profil není lineární, ale parabolický s parabolou otočenou naležato. Kterou polovinu paraboly vybrat poznáme z toho, že teplota uvnitř stěny je mezi teplotami na okrajích.

- Stejný výpočet pro $b = 0$ odpovídá proudění podzemní vody s volnou hladinou. Toto je jiným způsobem (přímé odvození rovnice z Darcyho zákona) odvozeno v textu Dana Říhová a Jana Marková, Poznámky k přednáškám z Hydrauliky, přednáška č. 9. Hladina podzemní vody tedy klesá jako ležatá parabola.

Dvourozměrný radiálně symetrický případ

Jiný případ, kdy je možno redukovat složitost problému na jednu dimenzi je stacionární děj v rovině, kdy je situace radiálně symetrická. K tomu je nutno transformovat divergenci a gradient do polárních souřadnic. Příslušné vzorce nebudeme odvozovat, dodá je [Wikipedie](http://en.wikipedia.org).



Obrázek 8.2: Radiální proudění směrem k čerpanému vrtu. Zdroj: <http://ecoursesonline.iasri.res.in>.

- Uvažujme například horkou trubku ochlazovanou zvenčí a proudění tepla radiálně směrem od středu. Teplota T je funkcí vzdálenosti r od středu a po transformaci gradientu a divergence do polárních souřadnic se stacionární bezdrojová rovnice vedení tepla

$$0 = \nabla \cdot (k \nabla T)$$

redukuje na

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(kr \frac{\partial T}{\partial r} \right) = 0.$$

Parciální derivace se opět redukuje pro funkci jedné proměnné na obyčejné derivace a stejně jako v předchozím případě můžeme integrovat na

$$kr \frac{dT}{dr} = C_1.$$

Odsud

$$kdT = \frac{C_1}{r} dr$$

a

$$kT = C_1 \ln(r) + C_2.$$

Konstanty C_1 a C_2 se určí z teplot na vnitřním a vnějším povrchu trubky.

- Stejný vzorec platí pro analogické radiální proudění podzemní vody při proudění s napjatou hladinou. Toho se využívá při čerpacích zkouškách nebo při umělelém snižování hladiny spodní vody. Po dosažení relevantních veličin a výpočtu konstant se odvozený vzorec uvádí ve tvaru

$$h - h_0 = \frac{Q}{2\pi T} \ln \frac{r}{r_0}$$

a nazývá **Thiemova rovnice**.

- Předchozí postup můžeme modifikovat i pro radiální proudění s volnou hladinou, tj. proudění modelované rovnicí

$$\nabla \cdot (K \nabla h) = 0,$$

kde $K = kh$ je materiálová konstanta pro proudění s volnou hladinou. Jako v předchozím případě přejdeme do proměnné r a dostáváme

$$khr \frac{dh}{dr} = C_1.$$

Odsud

$$h dh = \frac{C_1}{kr} dr$$

a

$$\frac{1}{2} h^2 = \frac{C_1}{k} \ln(r) + C_2.$$

Zpravidla se tato rovnice používá pro stanovení výdatnosti čerpané studny a konstanty C_1 a C_2 určíme z výšky hladiny ve studni a z výšky hladiny v kontrolním vrtu nedaleko studny. Tento vztah umožňuje například navrhnout průměr studny, odhadnout výdatnost studny, nebo pomocí odčerpávaného vrtu a menších pomocných vrtů sledujících pokles hladiny v okolí odčerpávaného vrtu stanovit filtrační součinitel k . Využití vzorce je však mnohem rozmanitější, umožňuje vypočítat poměry ve stavebních jámách a v jejich okolí. To je užitečné například při odhadu, kolik vody se hromadí ve výkopu. Další využití je, že dokážeme odhadnout vliv stavební jámy na hydrologické poměry v okolí a tyto poměry dokážeme měnit a přizpůsobovat našim potřebám. Častou aplikací je

také hydraulická clona (soustava prvků rozmístěných a provozovaných tak, aby nedocházelo k šíření kontaminace z chemické výroby do vodárensky využívaných vod). V tomto případě je však situace komplikovanější, protože je nutné zkombinovat dostředivé proudění k čerpanému vrtu s rovinným prouděním podzemní vody. Toto se naučíme v příští přednášce a využijeme linearitu.

Diferenciální rovnice růstu vodní kapky

<https://youtu.be/gJoOmF39rbw>

Modelujeme růst kulové kapky. Ta roste tak, že na povrchu kondenzují vodní páry. Kapka proto roste tak, že její objem se zvětšuje rychlostí úměrnou povrchu. Povrch je zase úměrný druhé mocnině poloměru a poloměr je úměrný třetí odmocnině objemu. Platí tedy (po sloučení všech konstant úměrnosti do jedné)

$$\frac{dV}{dt} = kV^{2/3}.$$

Tato rovnice má konstantní řešení $V = 0$. Nekonstantní řešení dostaneme po úpravě

$$V^{-2/3} dV = k dt$$

a po integraci

$$\int V^{-2/3} dV = k \int dt,$$

což dává

$$3V^{1/3} = kt + C$$

a

$$V = \left(\frac{1}{3} kt + \frac{1}{3} C \right)^3,$$

tj.

$$V = (k_0 t + c)^3,$$

kde $k_0 = \frac{1}{3} k$ a $c = \frac{1}{3} C$ jsou konstanta spojená rychlostí kondenzace a integrační konstanta.

Všimněte si, že počáteční úloha s počáteční podmínkou $V(0) = 0$ má konstantní nulové řešení

$$V(t) = 0$$

a nenulové řešení

$$V(t) = (k_0 t)^3.$$

Máme zde tedy nejednoznačnost v řešení počáteční úlohy. Tato nejednoznačnost není v rozporu s větou o existenci a jednoznačnosti řešení, protože pravá strana je nulová (podmínka pro separovatelnou rovnici není splněna) a nemá ohraničenou derivaci podle V (podmínka pro obecnou rovnici také není splněna). A nejednoznačnost má v tomto

případě dokonce fyzikální význam. Plynné skupenství může existovat i pod bodem kondenzace. Takovému jevu se říká přechlazená pára. Aby došlo ke kondenzaci, musí být k dispozici kondenzační jádra, například nečistoty ve vzduchu. Proto ve znečištěném ovzduší dochází častěji ke kondenzaci a tvorbě mlhy. Své by o tom mohli vyprávět obyvatelé Londýna, kteří se proslulých mlh zbavili poté, co se omezilo topení uhlím. My dnes spíše známe přechlazenou tekutinu ve formě hřejících polštářků, kde se po lupnutí plíškem spustí přeměna skupenství na pevné spojená s intenzivním uvolněním tepla.

Kapitola 9

Lienární operátory a lineární diferenciální rovnice

Anotace.

- Pasáže o lineární diferenciální rovnici prvního řádu jsou omezeny na rovnici s konstantními koeficienty. Rovnicím s nekonečnými koeficienty se nevěnujte. V tomto textu nejsou pokryty, nebudou ve cvičeních, nebudou v domácích úlohách ani písemkách. Pokud na ně narazíte při počítání starších písemek, nevěnujte se jim. Tato úprava souvisí s tím, že se více věnujeme aplikačnímu potenciálu než se tak činilo v letech minulých.
- Řešením lineární rovnice $y = ax + b$ je přímka a k jejímu zadání stačí jediný bod a jediný směr. Ukážeme si, že podobná tvrzení platí i pro celou řadu dalších rovnic, včetně diferenciálních rovnic a soustav diferenciálních rovnic.
- Výstupem bude dovednost popsat u některých speciálních rovnic množinu řešení tak, že nalezneme dva nebo více relativně jednoduše naležitelné objekty a pomocí nich sestavíme všechna řešení. Podobně jako dokážeme z jednoho bodu a směru zrekonstruovat všechny body přímky.
- Naučíme se posoudit, jak se chovají řešení diferenciálních rovnic, kde pravá strana je lineární. Toto se později využije tak, že pomocí těchto rovnic budeme aproximovat obecnější nelineární modely.
- Pokud vám jde o to, pochopit proč výpočty fungují tak jak fungují, projděte si všechny materiály. Pokud máte ambice nižší, můžete se věnovat jenom pasáži “Lineární diferenciální rovnice prvního řádu s konstantními koeficienty” a k ostatním pasážím se vrátit, jakmile je budete potřebovat (pokud vůbec). Důležité pasáže jsou poptávány ve WeBWorKových úlohách a problematika toho, jak se chovají řešení nelineárních systémů, je lineárním systémům nadřazena a bude součástí příští přednášky. Pokud budete ovládat nelineární systémy, lineární systémy se dají chápat jako jejich podmnožina.

Prerekvizity.

- Co se týká využitých metod studia lineárních operátorů, je přednáška relativně nezávislá. Nemá v tomto

ohledu žádné prerekvizity.

- Užitečnost linearity si ukážeme na příkladech diferenciálních rovnic několika typů. Proto je vhodné si zopakovat význam derivace, využití derivace v modelech založených a na diferenciálních rovnicích a interpretaci členů difuzní rovnice.
- Lineární systémy je vhodné zapisovat a studovat maticově. Budeme proto potřebovat maticový součin, maticovou formulaci soustavy lineárních rovnic, nutnou a postačující podmínku jednoznačné řešitelnosti této soustavy pomocí determinantu.
- Studentům obeznámeným s komplexními čísly se bude hodit Eulerova identita. Ostatní studenti budou muset příslušné pasáže akceptovat jako fakt.

Lineární operátory

https://youtu.be/_PcHv1GeEq4

Operátorem rozumíme zobrazení, které má na vstupu i na výstupu funkci. Například pro funkce jedné proměnné mohou být operátory derivace, druhá derivace, vynásobení funkce funkcí $\ln x$ anebo vnoření zadané funkce do funkce $\ln x$. Tj. pro $y = y(x)$ můžeme uvažovat operátory $F_1[y] = \frac{dy}{dx}$, $F_2[y] = \frac{d^2y}{dx^2}$, $F_3[y](x) = y(x) \ln(x)$, $F_4[y](x) = \ln(y(x))$.

Lineárním operátorem rozumíme zobrazení, které zachovává součet funkcí a násobek konstantou, tj. platí

$$L[y_1 + y_2] = L[y_1] + L[y_2]$$

a

$$L[Cy_1] = CL[y_1]$$

pro libovolné reálné číslo C a libovolné funkce y_1 a y_2 z definičního oboru operátoru L .

Příklady lineárních operátorů

Linearity se naučíme využívat k tomu, abychom úlohu najít řešení rovnice rozkouskovali na řešení jednodušších úloh.

Například je možné zkombinovat úlohu na stacionární proudění podzemní vody a úlohu na radiální proudění ke studni. Každou z těchto úloh umíme redukovat na separovatelnou diferenciální rovnici a vyřešit. Zkombinováním těchto úloh je možné modelovat chování studny v rovinném toku. Používá se například k zachycení kontaminace spodní vody.

- Operátor derivace, tj. operátor definovaný vztahem $L[y] = \frac{dy}{dx}$ je lineární. Toto plyne ze vzorců pro derivaci součtu a konstantního násobku.
- Buď dána funkce $a(x)$. Operátor násobení funkcí $a(x)$, tj. $L[y](x) = a(x)y(x)$ je lineární. To plyne z komutativity násobení a z distributivního zákona (roznásobování závorek).
- Složení (postupná aplikace) lineárních operátorů je lineární operátor. Například tedy

$$\frac{d^2y}{dx^2}$$

je lineární operátor.

- Součet lineárních operátorů je lineární operátor.
- Buď pevně dána funkce $a(x)$. Lineární operátor

$$L[y] = \frac{dy}{dx} + a(x)y$$

se nazývá *lineární diferenciální operátor prvního řádu*.

- Buďte pevně dány funkce $p(x)$ a $q(x)$. Lineární operátor

$$L[y] = \frac{d^2y}{dx^2} + p(x)\frac{dy}{dx} + q(x)y$$

se nazývá *lineární diferenciální operátor druhého řádu*.

- Buď dána $n \times n$ matice reálných čísel A a n -vektorová funkce $\vec{F}(x)$. Zobrazení, které funkci $\vec{F}(x)$ přiřadí součin $A\vec{F}(x)$ je lineární. To plyne z distributivnosti násobení vzhledem ke sčítání matic a z toho, že součin matice a reálného čísla komutuje.
- Operátor z levé strany difuzní rovnice

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \nabla \cdot (D \nabla u) = \sigma,$$

tj. operátor

$$L[u] = \frac{\partial u}{\partial t} - \nabla \cdot (D \nabla u)$$

je lineární. Po rozepsání divergence a gradientu pomocí parciálních derivací (které jsou lineární) jenom kombinujeme lineární operátory a tedy zachováváme linearitu.

- Rovnice podzemní vody pro proudění s napjatou hladinou

$$S_S \frac{\partial h}{\partial t} - \nabla \cdot (T \nabla h) = \sigma$$

je speciálním případem difuzní rovnice a operátor definovaný levou stranou je lineární. Rovnice podzemní vody pro proudění s volnou hladinou

$$S_S \frac{\partial h}{\partial t} - \nabla \cdot (kh \nabla h) = \sigma$$

definuje operátor

$$F[h] = S_S \frac{\partial h}{\partial t} - \nabla \cdot (kh \nabla h)$$

a není lineární. Pokud však využijeme rovnost

$$h \frac{\partial h}{\partial x} = \frac{1}{2} \frac{\partial h^2}{\partial x}$$

a analogickou rovnost i pro další parciální derivace, je ve stacionárním případě (derivace podle času je nulová) rovnici možno přepsat do tvaru

$$-\frac{1}{2} \nabla \cdot (k \nabla (h^2)) = \sigma$$

a levá strana definuje lineární operátor v proměnné h^2 .

Princip superpozice

Věta (princip superpozice). Každý lineární operátor zachovává lineární kombinaci funkcí, tj. platí

$$L[C_1 y_1 + C_2 y_2] = C_1 L[y_1] + C_2 L[y_2]$$

vždy, když $C_{1,2} \in \mathbb{R}$ a $y_{1,2}$ jsou funkce z definičního oboru operátoru L .

Plyne přímo rozepsáním

$$\begin{aligned} L[C_1 y_1 + C_2 y_2] &= L[C_1 y_1] + L[C_2 y_2] \\ &= C_1 L[y_1] + C_2 L[y_2] \end{aligned}$$

Operátorové rovnice s lineárním operátorem

<https://youtu.be/i3By7KBu6ec>

Operátorovou rovnici budeme rozumět rovnici

$$L[x] = b(t),$$

kde $b(t)$ je funkce a L operátor.

- Například pro $b(t) = 0$ a $L[x] = \frac{dx}{dt} - x$ má rovnice tvar

$$\frac{dx}{dt} - x = 0,$$

tj.

$$\frac{dx}{dt} = x.$$

Následující věta vlastně vyjadřuje totéž co princip superpozice z předchozího textu, pouze v jiných pojmech: v pojmech řešení rovnice s lineárním operátorem.

Věta (princip superpozice při řešení rovnic). Jsou-li funkce $x_1(t)$ a $x_2(t)$ po řadě řešením rovnic

$$L[x] = b_1(t), \quad L[x] = b_2(t),$$

Je funkce

$$x(t) = C_1 x_1(t) + C_2 x_2(t)$$

řešením rovnice

$$L[x] = C_1 b_1(t) + C_2 b_2(t).$$

Pro $b_1(t) = b_2(t) = 0$ všechny tři výše uvedené rovnice splynou a lineární kombinace dvou řešení homogenní lineární rovnice je také řešením. Toto je možné pochopitelně rozšířit na libovolný konečný počet funkcí.

Pro $b_1(t) = 0$ a $C_2 = 1$ jsou obě nehomogenní rovnice stejné a pokud k řešení rovnice přičteme řešení asociované homogenní rovnice (se stejným operátorem na levé straně, ale nulou na pravé straně), dostaneme řešení stejné rovnice.

Z těchto jednoduchých tvrzení plyne několik zásadních pozorování.

- Pokud máme k dispozici několik řešení homogenní rovnice, libovolná jejich lineární kombinace je také řešením.
- Za určitých okolností lineární kombinace z předchozího bodu umožní splnit libovolnou počáteční podmínku a vzhledem k jednoznačnosti řešení, která lineární rovnice zpravidla provází, je jistota, že žádné další řešení neexistuje. Nalezení těchto funkcí je tedy zásadní krok při řešení rovnice.
- U nehomogenní rovnice se úloha najít všechna řešení dá rozdělit na dvě dílčí úlohy: najít jenom jedno řešení a k tomu najít všechna řešení homogenní rovnice se stejnou levou stranou. Každá z těchto dvou úloh je mnohem lehčí než úloha celková a součtem jednoho řešení nehomogenní rovnice a obecného řešení asociované homogenní rovnice dostaneme obecné řešení nehomogenní rovnice.

Příklad využití linearit v jedné dimenzi

Pro konkrétnost specifikujeme myšlenky z předchozího textu na příkladě.

Pro jednu funkci lineární kombinace degenerují na násobky. Proto je obecné řešení rovnice součtem jednoho řešení rovnice a obecného řešení asociované homogenní rovnice. Toto jedno řešení vlastně udává pozici v prostoru funkcí a řešení asociované homogenní rovnice udává směr. Například funkce $x = e^t$ splňuje rovnici

$$x' - x = 0$$

a funkce $x = -\pi$ splňuje rovnici

$$x' - x = \pi.$$

Všchna řešení rovnice

$$x' - x = \pi$$

jsou tvaru $x = Ce^t - \pi$

Lineární diferenciální rovnice prvního řádu s konstantními koeficienty

V aplikacích často vídáme rovnici tvaru

$$\frac{dx}{dt} + ax = b, \quad (\text{N})$$

která vznikne například úpravou rovnice

$$\frac{dx}{dt} = b - ax.$$

Podobně jako v předchozím příkladě stačí najít jedno řešení rovnice (N) a jedno nenulové řešení rovnice

$$\frac{dx}{dt} + ax = 0. \quad (\text{H})$$

První z řešení udává bod v prostoru funkcí, druhé řešení jakýsi směr a společně definují jakousi přímkou obsahující všechna řešení. Rovnici (N) splňuje konstantní funkce

$x(t) = \frac{b}{a}$ a rovnici (H) exponenciální funkce $x(t) = e^{-at}$.

Obecné řešení rovnice (N) je proto

$$x(t) = \frac{b}{a} + Ce^{-at}.$$

Pro t jdoucí do nekonečna toto řešení za předpokladu $a > 0$ konverguje ke stacionárnímu řešení $\frac{b}{a}$. Partikulární řešení odpovídající počáteční podmínce $x(0) = 0$ je

$$x(t) = \frac{b}{a} - \frac{b}{a}e^{-at} = \frac{b}{a}(1 - e^{-at}).$$

To znamená, že řešení se exponenciálně přibližuje ke stacionárnímu řešení. Pro $a < 0$ se naopak od stacionárního řešení exponenciálně vzdaluje.

Věta (řešení lineární diferenciální rovnice prvního řádu s konstantními koeficienty). Obecným řešením rovnice

$$\frac{dx}{dt} + ax = b$$

je

$$x(t) = x_{st} + Ce^{-at},$$

kde $x_{st} = \frac{b}{a}$ je stacionárním řešením této rovnice. Pro $a > 0$ je toto řešení stabilní a globálně atraktivní. Pro $a < 0$ je nestabilní.

Obrat, že stacionární řešení je globálně atraktivní znamená, že všechna řešení k tomuto stacionárnímu stavu konvergují nezávisle na počáteční podmínce.

Další lineární rovnice

Pro skalární lineární diferenciální rovnice druhého řádu je situace obdobná, pouze pro řešení asociované homogenní diferenciální rovnice potřebujeme dvě lineárně nezávislá řešení (jedno není násobkem druhého).

Například $x_1(t) = e^t$ a $x_2(t) = e^{-t}$ nejsou jedno násobkem druhého a obě splňují rovnici

$$x'' - x = 0.$$

Proto všechna řešení jsou tvaru

$$x(t) = C_1 e^t + C_2 e^{-t},$$

kde $C_{1,2} \in \mathbb{R}$. Funkce $x = -t$ splňuje rovnici

$$x'' - x = t$$

a všechna řešení této rovnice jsou

$$x(t) = C_1 e^t + C_2 e^{-t} - t.$$

Rovnicím majícím derivace vyššího řádu se budeme věnovat později.

Lineární autonomní systémy

<https://youtu.be/AjpQ0Zh1jkU>

Pokud pracujeme s nekonstantními vektorovými funkcemi tak, že při derivaci derivujeme každou komponentu samostatně, je rovnice

$$\frac{dX}{dt} - AX = B$$

operátorová rovnice s lineárním operátorem. Tyto rovnice se v případě, kdy matice A a B nezávisí na čase, nazývají autonomní systémy a budeme se jim věnovat za chvíli. Pro tyto rovnice je souvislost mezi homogenní a nehomogenní rovnici obdobná jako v minulých případech. Řešením nehomogenní úlohy najdeme jedno řešení (bod v prostoru) a řešením asociované úlohy najdeme směry definující množinu všech řešení. Vzhledem k vícedimenzionalitě úlohy bude těchto řešení více. Situace je podobná jako to, že v geometrii je rovina dána dvěma směry. Nakonec dané informace můžeme využít k vygenerování množiny všech řešení. Popsaná metoda je komplikovanější na konkrétní použití, ale často se ani nemusí provádět. Často stačí například informace o chování řešení v nekonečnu. To je také to, na co se omezíme na příští přednášce.

Lineární autonomní systém ve dvou dimenzích

Následující příklad je mírně modifikovaný příklad z **kurzu MIT o diferenciálních rovnicích**. Ve formulaci s vařením vajíčka se zdá triviální a prakticky neužitečný. Toto je však

voleno pro jednoduchost výkladu a snadnou představu povahy zkoumaného jevu. V praxi se stejným modelem předává teplo vrstveným materiálem (jako je tepelná ochrana domů nebo raketoplánů) nebo chemické látky vstupující do dalších reakcí (jako například řetěz reakcí vedoucí k syntéze bílkovin, které buňka v reakci na okolní prostředí potřebuje k přežití).

Budeme modelovat ohřívání vejce ve vodě o konstantní teplotě T_0 . Na počátku mají bílek a žloutek teplotu T_1 a T_2 . Žloutek přebírá teplo od bílku rychlostí úměrnou rozdílu teplot žloutku a bílku. Bílek přebírá teplo od vodní lázně rychlostí úměrnou rozdílu teplot a předává teplo žloutku procesem popsaným v předchozí větě. Vody je hodně a její teplota se nemění. Proces můžeme modelovat soustavou diferenciálních rovnic

$$T_1' = k_1(T_0 - T_1) - k_2(T_1 - T_2)$$

$$T_2' = k_2(T_1 - T_2)$$

Tento systém je možno přepsat do tvaru

$$T_1' = -(k_1 + k_2)T_1 + k_2T_2 + T_0k_1$$

$$T_2' = k_2T_1 - k_2T_2$$

a zapsat maticově

$$\begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} -(k_1 + k_2) & k_2 \\ k_2 & -k_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k_1T_0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Pokud zvolíme teplotní stupnici tak, že teplota vroucí vody je v naší nové stupnici nula, můžeme dokonce eliminovat druhý člen a dostáváme

$$\begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} -(k_1 + k_2) & k_2 \\ k_2 & -k_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \end{pmatrix} \quad (\text{V})$$

tj. symbolicky $X' = AX$, kde $X = (T_1, T_2)^T$ je vektorová funkce (sloupcový vektor) a A je 2×2 matice.

Systém $X' = AX$

Je-li determinant matice nenulový, má soustava $AX = 0$ pouze nulové řešení a systém

$$X' = AX \quad (1)$$

má jediné konstantní řešení, kterým je počátek. Konstantní řešení bude nazývat stacionární bod.

Tento systém můžeme přepsat na

$$X' - AX = 0$$

a tento systém je lineární, protože díky distributivnímu zákonu pro matice pro operátor $L[X] = X' - AX$ platí

$$\begin{aligned} L[X_1 + X_2] &= (X_1 + X_2)' - A(X_1 + X_2) \\ &= X_1' + X_2' - AX_1 - AX_2 \\ &= (X_1' - AX_1) + (X_2' - AX_2) \\ &= L[X_1] + L[X_2] \end{aligned}$$

a díky komutativitě při násobení s konstantou $C \in \mathbb{R}$ také

$$\begin{aligned} L[CX] &= (CX)' - A(CX) \\ &= CX' - CAX \\ &= C(X' - AX) \\ &= CL[X]. \end{aligned}$$

Je možné ukázat, že každá počáteční úloha je jednoznačně řešitelná a pro obecné řešení stačí najít tolik nezávislých řešení, kolik komponent má neznámá vektorová funkce X . Platí následující věta, kterou je možno ověřit přímo dosazením.

Věta (souvislost vlastních čísel matice a řešení lineárního autonomního systému). Má-li matice A vlastní číslo λ a příslušný vlastní vektor je v , tj. platí $Av = \lambda v$, je funkce $X(t) = ve^{\lambda t}$ řešením systému $X' = AX$. Jsou-li λ a v komplexní, je řešením i samostatně reálná část a imaginární část.

Systém

$$X' = AX + B \quad (2)$$

je možno na tvar (1) převést po přepsání do tvaru $(X - X_0)' = A(X - X_0)$, kde X_0 je řešením soustavy $AX + B = 0$, což odpovídá posunu stacionárního bodu do počátku.

Poznámka (vlastní hodnoty a řešení). Následující poznatky jsou shrnutím a specifikací výše uvedeného a klasifikují stabilitu některých řešení systému (2), tj.

$$X' = AX + B.$$

- Jakmile má matice A reálnou kladnou vlastní hodnotu, existuje řešení, které se vzdaluje od stacionárního bodu směrem daným příslušným vlastním vektorem.
- Jakmile má matice A reálnou zápornou vlastní hodnotu, existuje řešení, které se přibližuje ke stacionárnímu bodu ze směru daného příslušným vlastním vektorem.
- Jakmile má matice A komplexní hodnotu s kladnou reálnou částí, existuje řešení, které se v oscilacích vzdaluje od stacionárního bodu.
- Jakmile má matice A komplexní hodnotu se zápornou reálnou částí, existuje řešení, které se v oscilacích přibližuje ke stacionárnímu bodu.

manimp:AS_vlastni_cisla|O chování trajektorií v okolí stacionárního bodu rozhoduje znaménko vlastních čísel (u reálných vlastních čísel), nebo znaménko reálné části (u komplexně sdružených vlastních čísel)

Pokud jsou například všechna vlastní čísla v daném bodě záporná, poté každé z nich generuje řešení konvergující do stacionárního bodu. Díky linearitě, jednoznačnosti řešení a tomu, že máme tolik řešení, kolik je nutno pro

splnění libovolné podmínky, je možné pomocí těchto dílčích řešení zapsat i libovolné jiné řešení. Tím pádem ale všechna řešení konvergují do stacionárního bodu. Pokud jsou vlastní čísla komplexní se zápornou reálnou částí, je situace stejná, ale řešení navíc konvergují do stacionárního bodu postupnými oscilacemi. Podobně, pokud všechny vlastní hodnoty jsou kladné, všechna řešení se od stacionárního bodu vzdalují a pokud jsou všechny vlastní hodnoty komplexní s kladnou reálnou částí, probíhá toto vzdalování oscilacemi s narůstající amplitudou.

Příklad. Model ohřívání vajíčka (V) z předchozí části této přednášky má (v posunuté teplotní stupnici, na které teplota varu vody odpovídá nule) stacionární bod $(0, 0)$. Zkusíme zvolit parametry k_1 a k_2 a určit chování trajektorií v okolí tohoto bodu. Pro $k_1 = 1$ a $k_2 = 2$ dostáváme

$$\begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \end{pmatrix}.$$

Charakteristická rovnice je

$$\lambda^2 + 5\lambda + 2 = 0$$

se dvěma zápornými kořeny $\lambda_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 8}}{2} = \dots$. Budou tedy existovat dvě nezávislá řešení konvergující do počátku a všechna další řešení dostaneme jako jejich lineární kombinaci. Proto všechna řešení konvergují k počátku tj. $T_1 = T_2 = 0$. Obě teploty v naší posunuté stupnici se tedy ustálí na teplotě vodní lázně. Nic jiného jsme ani nečekali, ať mají žloutek a bílek na začátku jakoukoliv teplotu, po čase se teplota ustálí na teplotě vodní lázně. V tomto případě není zajímavé vědět, do jakého stavu systém konverguje, ale například za jak dlouho bude dosaženo potřebné teploty ve žloutku nebo v bílku. V praxi se podobným způsobem neřeší vaření vajec, ale předávání chemických látek jako jsou léky nebo enzymy mezi tkáněmi, prostřednictvím krve. Podobně jako u Newtonova zákona tepelné výměny, i zde je rychlost procesu úměrná množství, v tomto případě úměrná rozdílu koncentrací.

www.problems/autonomni_systemy/13.pg

Mechanický oscilátor

<https://youtu.be/8KQ9qG1eQtU>

S mechanickým oscilátorem se setkáváme tam, kde je systém vychýlen z rovnovážné polohy a nějaká síla jej do této rovnovážné polohy vrací. Přičemž v některých situacích dojde (například vlivem setrvačnosti) k tomu, že systém se přehoupne přes rovnovážnou polohu na opačnou stranu a vrací se zpět. Klasickým případem je těleso o hmotnosti m na pružině. Pokud sílu závisející na rychlosti v a výchylce x označíme F , dostáváme

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= v, \\ \frac{dv}{dt} &= \frac{1}{m} F(v, x), \end{aligned}$$

přičemž první rovnice vyjadřuje, že rychlost je derivace polohy a druhá rovnice je Newtonův zákon síly. Pro pružinu tuhosti k a odpor prostředí úměrný rychlosti dostáváme

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= v, \\ \frac{dv}{dt} &= -\frac{k}{m}x - bv,\end{aligned}$$

nebo ve vektorovém tvaru

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix}.$$

Charakteristická rovnice je

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -\frac{k}{m} & -b - \lambda \end{vmatrix} = -\lambda(-b - \lambda) + \frac{k}{m} = \lambda^2 + b\lambda + \frac{k}{m} = 0.$$

Pro velké tlumení, tj. $b^2 > \frac{4k}{m}$ má rovnice dva záporné reálné kořeny

$$\lambda_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - \frac{4k}{m}}}{2}$$

Systém se tedy bez oscilací překlopí do rovnovážného stavu. Při opačné nerovnosti jsou kořeny charakteristické rovnice

$$\lambda_{1,2} = -\frac{b}{2} \pm \frac{1}{2}i\sqrt{-b^2 + \frac{4k}{m}}$$

komplexní se zápornou reálnou částí a systém osciluje okolo rovnovážné polohy. Pro $b > 0$ mají tyto kořeny zápornou reálnou část a systém osciluje okolo rovnovážné polohy se zmenšující se amplitudou. Pro $b = 0$ se amplituda nezmenšuje a oscilátor kmitá do nekonečna. Příklad $b < 0$ neuvažujeme, protože odpor prostředí je síla působící proti pohybu.

Poznámka (diferenciální rovnice druhého řádu).

Uvažovaný systém se v literatuře často vyskytuje ve tvaru, kdy je rychlost v dosazena do druhé rovnice a poté dostáváme model ve tvaru

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x - b\frac{dx}{dt},$$

tj. ve tvaru rovnice obsahující první dvě derivace neznámé funkce. V podstatě celá klasická mechanika je založena právě na rovnicích tohoto typu.

Kapitola 10

Autonomní systémy

Úmluva

V celé přednášce budeme jako nezávislou proměnnou uvažovat čas t . Autonomní znamená v tomto kontextu nezávislý na čase. Budeme studovat rovnice mající tuto vlastnost. Budeme dále studovat systémy, které mají dostatečně pěkná data na to, aby byla zaručena jednoznačnost řešení. To je například, pokud funkce na pravé straně rovnice má ohraničené parciální derivace, což bude v níže uvedených příkladech vždy splněno.

Autonomní diferenciální rovnice

<https://youtu.be/9PbghCvHQ5c>

manim:Stabilita|Siu5ZgEA59s|Grafické znázornění stability stacionárních řešení.

Autonomní diferenciální rovnice je rovnice tvaru

$$\frac{dy}{dt} = f(y). \quad (1)$$

Je speciálním případem rovnice se separovanými proměnnými a umíme ji řešit analytickou cestou. Proto se nyní nebudeme zaměřovat na hledání obecného řešení, ale pokusíme se popsat chování řešení, aniž bychom tato řešení znali. Pokusíme se s co nejmenší námahou říct, jak se budou řešení chovat.

Všechna konstantní řešení rovnice (1) jsou nulové body pravé strany. Nazývají se *stacionární body*. Je užitečné umět posoudit chování řešení v okolí stacionárních bodů, což umožní následující věta.

Věta (stabilita konstantních řešení). Jestliže platí $f(y_0) = 0$, je konstantní funkce $y(x) = y_0$ konstantním řešením rovnice

$$\frac{dy}{dt} = f(y).$$

Toto řešení je stabilní pokud $f'(y_0) < 0$ a nestabilní pokud $f'(y_0) > 0$.

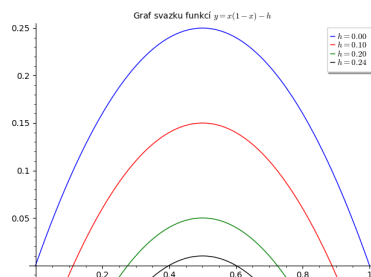
Poznámka (stabilita řešení). Stabilita je u diferenciálních rovnic chápána různým způsobem. V tomto textu *stabilitou* stacionárního bodu budeme rozumět, že malá výchylka od stacionárního bodu vede na řešení, které konverguje zpět k tomuto stacionárnímu bodu. Přesněji se tento typ stability jmenuje *asymptotická stabilita*.

Pro grafickou interpretaci věty je vhodné připomenout, že funkce s kladnou derivací jsou rostoucí a funkce se zápornou derivací klesající. Pokud má tedy pravá strana derivaci různou od nuly, poznáme stabilitu z monotonie pravé strany.

Věta je odvozena z pozorování, že rovnice $y' = ky$ má řešení $y(t) = Ce^{kt}$ a toto řešení se pro velká t blíží k nule nebo roste neohraničeně, v závislosti na znaménku hodnoty k . Pravou stranu rovnice, funkci $f(y)$, je možné aproximovat vztahem $f(y) \approx f'(y_0)(y - y_0)$ a odsud a z poznatku, že malá změna rovnice většinou nemění dramaticky chování řešení (přesněji, existuje spojitá závislost na parametrech) a proto rovnice $y' = f(y)$ kopíruje v okolí bodu y_0 chování rovnice $(y - y_0)' = f'(y_0)(y - y_0)$, pokud vynecháme patologické případy, což je zde $f'(y_0) = 0$. Řešení je tedy $y \approx y_0 + Ce^{f'(y_0)t}$ a tato funkce buď konverguje k y_0 nebo roste neohraničeně, v závislosti na znaménku derivace $f'(y_0)$.

Logistická diferenciální rovnice s konstantním lovem

manim:Logistic|NyLkjOTYzVQ|Logistická rovnice s lovem.



Obrázek 10.1: Pravá strana k modelu lovu s konstantní intenzitou.

Logistická diferenciální rovnice s konstantním lovem h , tj. rovnice

$$\frac{dy}{dt} = ry \left(1 - \frac{y}{K}\right) - h,$$

má pro malé h dva stacionární body. Funkce $ry \left(1 - \frac{y}{K}\right)$ je parabola otočená vrcholem nahoru a s nulovými body $y = 0$ a $y = K$. V prvním stacionárním bodě je funkce rostoucí a tento stacionární bod je nestabilní. Ve druhém stacionárním bodě je funkce klesající a tento stacionární bod je stabilní. Jak se zvyšuje faktor h , graf paraboly se posouvá směrem dolů a oba stacionární body se posouvají směrem k sobě a k vrcholu. Jejich stabilita zůstává neporušena. To znamená, že sice pořád existuje stabilní stav, ale se zvyšující se intenzitou lovu se tento stacionární stav dostává stále blíže ke stavu nestacionárnímu a rovnováha je tedy poněkud křehká.

Numerický model

Pokud se intenzita lovu zvětšuje tak, že se parabola dostane vrcholem na vodorovnou osu a poté pod tuto osu, oba stacionární body splynou v jeden a zaniknou. V okamžiku, kdy se vrchol dostává pod vodorovnou osu i malinká změna v lovu způsobí dramatickou změnu v modelu. Ztratí se totiž existence stabilního řešení a všechna řešení budou konvergovat k nule.

Poznámka (strukturální stabilita modelu, bifurkace). Stabilita je u diferenciálních rovnic chápána různým způsobem. V tomto textu budeme *strukturální stabilitou* modelu závislého na parametrech rozumět stav, kdy malá změna parametrů nemění kvalitativní vlastnosti rovnice nebo systému, tj. například zůstává stejný počet stacionárních bodů, zachovává se jejich stabilita. To je přirozené chování, kdy malá změna parametrů modelu způsobí malé změny v řešení. Pro některé hodnoty parametrů však strukturální stabilitu ztrácíme. V takovém případě se i při nepatrných změnách parametrů dramaticky mění chování rovnice nebo systému. Například při zvyšování lovu v právě uvažovaném modelu dva stacionární body splynou v jeden a zaniknou. Takové chování se nazývá *bifurkace* a hodnoty parametrů, při kterých k bifurkaci dojde, jsou důležité pro další vývoj předmětu. Zjednodušeně řečeno, malé změny parametrů v oblasti daleko od bifurkace znamenají, že chování modelu se mění pozvolna. Blízko k bifurkační hodnotě je situace komplikovanější a může se stát, že malá změna parametrů modelu způsobí dramaticky odlišné chování modelu. Rovnice blízko bifurkaci je citlivá na rozkolísání.

Model ostrovní biogeografie

viz zde

Model metapopulací

viz zde

Model soupeření jestřábí a holubičí povahy

manim:Hawk_and_dove_game|zAzZrIShj9U|Model soupeření dvou povah. Ukazuje, že vždy bude v přírodě určité procento agresivního vzorce chování. Někdy dokonce tento vzorech chování bude jediný.

Cílem tohoto modelu je studovat typy chování živočichů a rostlin a zjistit, zda některý typ chování přináší jeho nositelům evoluční výhodu.

Nechť se v populaci vyskytují dva vzorce chování – jedince používající první z nich budeme nazývat *jestřábi* a druhý *holubice*. Chování se projeví, pokud se dva jedinci setkají u téhož zdroje (potrava, hnízdiště, apod).

- Jestřáb o zdroj bojuje a ustoupí pouze po prohraném boji.
- Holubice o zdroje nebojuje a zkonsumuje zdroj pouze pokud protivník ustoupí bez boje.
- Předpokládejme, že každý jedinec v populaci si zkonsumováním zdroje si může svou evoluční zdatnost posílit o hodnotu V , pokud je nucen a ochoten o zdroj bojovat, je jeho evoluční zdatnost naopak snížena o hodnotu D .
- Setkají-li se u zdroje dvě holubice, jedna z nich ustoupí bez boje a druhá zkonsumuje zdroj. Předpokládejme, že po častých setkáních tohoto typu každá holubice zkonsumuje průměrně polovinu zdrojů.
- Setká-li se u zdroje holubice s jestřábem, zkonsumuje celý zdroj jestřáb.
- Setkají-li se u zdroje dva jestřábi, ani jeden z nich neustoupí a bojují o zdroj. Předpokládejme, že všichni jestřábi jsou stejně silní a po boji je pravděpodobnost zkonsumování zdroje poloviční pro každého jestřába.

Matematický rozbor (J. Kalas, Z. Pospíšil, Spojité modely v biologii) ukazuje, že četnost x výskytu jestřábů v populaci se řídí diferenciální rovnicí

$$x' = x(1-x) \left(\frac{V}{2} - \frac{D}{2}x \right).$$

Jediné realistické hodnoty x jsou z intervalu $[0, 1]$. Pro nalezení stacionárních bodů a posouzení jejich stability budeme studovat funkci

$$f = x(1-x) \left(\frac{V}{2} - \frac{D}{2}x \right).$$

Stacionární body rovnice jsou nulové body funkce f a to jsou $x = 0$, $x = 1$ a $x = \frac{V}{D}$. Poslední stacionární bod v závislosti na hodnotě parametrů **může a nemusí** ležet v intervalu $[0, 1]$

- V bodě $x = 0$ je funkce f nulová a rostoucí. Stacionární bod $x = 0$ je vždy nestabilní. **Ať jsou tedy podmínky jakékoliv, vždy budou v populaci přítomni jestřábi.** Přítom právě jestřábi paradoxně plýtvají zdroji energie na boj, namísto, aby celou energii zaměřili na rozmnožování. Z hlediska efektivity při

využívání zdrojů prostředí platí, že populace složená ze samých holubic využívá zdroje prostředí nejefektivnějším možným způsobem. Přesto je taková populace evolučně nestabilní! Pronikne-li do populace samých holubic jeden jestřáb, má značnou evoluční výhodu, protože každý zdroj, u kterého se nachází, zkonsumuje. Tím poroste jeho evoluční zdatnost a jeho geny nebo vzorce chování (u druhů které mohou přepínat strategie chování) se budou v populaci rychle šířit.

- Pokud jsou náklady na boj větší než užitek ze zdrojů, platí $V < D$. V intervalu $[0, 1]$ leží stacionární bod $x = \frac{V}{D}$ a tento bod je stabilní. Poslední stacionární bod $x = 1$ je nestabilní. V tomto případě všechna řešení konvergují ke stacionárnímu bodu $x = \frac{V}{D}$. V populaci tedy budou přítomni i jestřábi i holubice.
- Pokud platí $V > D$, všechna řešení konvergují ke stacionárnímu bodu $x = 1$. Ať je počáteční rozložení vzorců chování v populaci jakékoliv, evolučně stabilní je pouze populace složená ze samých jestřábů. Jsou-li náklady na boj o zdroje nižší než užitek ze zdrojů, nevypatí se ustupovat při soupeření o zdroje. *Příkladem populace složené ze samých jestřábů je les. Náklady na boj spočívají ve vytvoření vyššího kmene, užitek je světlo.*

Autonomní rovnice s pravou stranou ve tvaru rozdílu

<https://youtu.be/ccWuBp4kies>

Poznámka (autonomní rovnice s rozdílem na pravé straně). Rovnice

$$\frac{dy}{dt} = g(y) - h(y)$$

má stacionární bod y_0 , jestliže

$$g(y_0) = h(y_0).$$

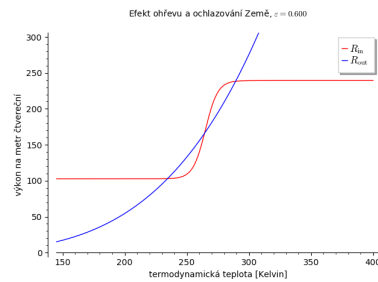
Často jsou funkce g a h zadány graficky a stacionární bod je v průsečíku grafů funkcí g a h . Ze vzájemné polohy těchto grafů také vidíme, zda je stacionární bod stabilní (funkce g je napravo od bodu y_0 pod funkcí h a nalevo nad ní) nebo nestabilní (naopak).

Teplotní bilance Země

Příklad. Teplotní bilanci Země je možno vyjádřit rovnicí

$$\frac{dT}{dt} = R_{\text{in}}(T) - R_{\text{out}}(T),$$

kde R_{in} a R_{out} jsou funkce dané na obrázku. Vidíme tři průsečíky, tj. tři stacionární body. Uvažujme stacionární



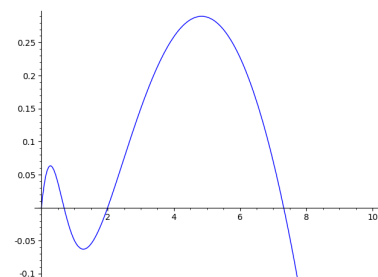
Obrázek 10.2: Funkce z pravé strany rovnice pro teplotní bilanci Země

bod nejvíce napravo. Malá výchylka nahoru k větší teplotě nás posune do oblasti, kde převažuje vyzařování energie, R_{out} je větší než R_{in} , pravá strana je záporná a teplota klesá zpět do stacionárního stavu. Podobně, malá výchylka směrem dolů způsobí nárůst a opět návrat do stacionárního stavu. Stacionární stav zcela vpravo je tedy stabilní. Podobně ukážeme, že stacionární stav odpovídající průsečíku zcela vlevo je také stabilní. Naopak, stacionární stav uprostřed je nestabilní, libovolná výchylka z tohoto stavu způsobí přechod systému do některého ze stabilních stavů.

[Online model.](#)

Logistická diferenciální rovnice s predátory

manim:Obalec|iFmQWcR_JX4|Model populace pro predátním tlakem využijeme například při studiu škůdce. Model vykazuje bifurkaci (malá změna vstupních dat může zcela změnit chování modelu) a hysterezi (stav souvisí i s historií modelu).

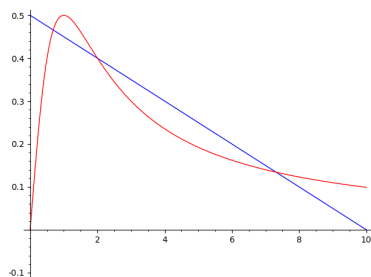


Obrázek 10.3: Pravá strana diferenciální rovnice modelu obaleče jako funkce proměnné y .

Následující model je model obaleče *Choristoneura fumiferana*, který periodicky atakuje lesy severní Ameriky. Jeho populace je relativně malá, ale některé roky (historicky cca po 40 letech) se velikost populace zvýší tisícinásobně a dokáže zahubit 80% stromů v lese a prakticky zničit les. Populaci je možno modelovat logistickou rovnicí

$$y' = ry \left(1 - \frac{y}{K}\right) - H \frac{y^2}{y^2 + A^2},$$

kde druhý člen na pravé straně charakterizuje vliv predátorů. Jedná se o funkci, která zpomaluje růst, podobně



Obrázek 10.4: Křivky udávající znaménko pravé strany diferenciální rovnice z modelu obaleče.

jako lov. Protože však predátoři mají určitou hodnotu, nad kterou jsou saturovaní a nestačí brzdit růst populace, je tato funkce ohraničená. Platí

$$H \frac{y^2}{y^2 + A^2} \leq H.$$

To má dalekosáhlé důsledky. Pro určité hodnoty parametrů může mít pravá strana rovnice dva nebo čtyři nulové body. Nakreslíme si **druhou variantu**.

Vidíme dva průsečíky, kde je funkce rostoucí, to odpovídá nestabilním stavům. Vidíme i dva stabilní stavy, přibližně pro hodnoty 0.6 a 7.3. Malé populace, které se rozvíjejí od nuly, dospějí do nižšího stabilního stavu. Pokud se nějakým způsobem změní velikost populace o malé množství, systém se po čase díky stabilitě vrátí do původního stavu. Pokud však skok je velký a systém populace se dostane nad hodnotu nestabilního stavu, růst pokračuje a systém spěje ke stabilitě, ale s vyšším výskytem škůdce odpovídající stacionárnímu bodu 7.3.

Poněkud jednodušší je kvalitativní analýza, pokud zvolíme jednotku veličiny y tak, aby koeficient A byl roven jedné, zvolíme jednotku času tak, aby koeficient H byl roven jedné a vytkneme proměnnou y . Model má potom tvar

$$y' = y \left[r \left(1 - \frac{y}{K} \right) - \frac{y}{y^2 + 1} \right].$$

Na pravé straně v hranaté závorce zůstává rozdíl funkce $\frac{y}{y^2 + 1}$ neobsahující žádný parametr a lineární funkce, se kterou snadno dokážeme manipulovat.

Numerický model

Brauer a Kirbs vysvětlují situaci tak, že s růstem lesa se mění parametry modelu, stacionární body se posunují a populace obaleče se tomu přizpůsobuje. Více stromů znamená vyšší nosnou kapacitu prostředí pro obaleče a predátoři svou činností populaci obaleče udržují na rozumné míře. Pokud však nosná kapacita prostředí dosáhne takové hodnoty, že predátoři jsou nasycení a nestačí populaci redukovat, odpovídá to posunu nestabilního stacionárního bodu pod hodnotu velikosti populace a dojde k přemnožení. Toto přemnožení má devastující účinky pro les.

Autonomní systém $X' = f(X)$

<https://youtu.be/udATObf0s8I>

Soustava diferenciálních rovnic, kde pravé strany nezávisí na čase, se nazývá autonomní systém. Seznámili jsme se již s lineárními autonomními systémy, obecný autonomní systém však lineární být nemusí. Například při modelování chemických reakcí je rychlost úměrná mocnině koncentrace reagujících látek odpovídající počtu molekul, které do reakce vstupují. Níže uvidíme příklad takového modelu.

Ukážeme si, jak studovat nelineární systém pomocí lineárního a pomocí vlastních čísel. Půjde o lineární aproximaci. V tomto případě o lineární aproximaci vektorové funkce definující pravé strany rovnic.

Je-li $f(X_0) = 0$, je možno systém

$$X' = f(X)$$

v okolí bodu X_0 aproximovat lineárním systémem

$$X' = J(X_0)(X - X_0),$$

kde $J(X_0)$ je Jacobiho matice funkce $f(X)$ v bodě X_0 , tj. pro $f(X) = (f_1(X), \dots, f_n(X))^T$ je

$$J(X_0) = \left(\frac{\partial f_i(X_0)}{\partial x_j} \right).$$

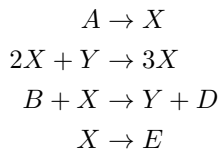
O chování trajektorií v okolí stacionárního bodu tedy rozhodnou vlastní čísla Jacobiho matice. Za předpokladu, že jsme relativně daleko od případů, kdy se mění typ stacionárního bodu, tj. vlastní čísla jsou navzájem různá, jsou nenulová a v případě komplexních vlastních čísel mají nenulové reálné části, má původní nelineární systém stejný typ stacionárního bodu jako lineární systém s Jacobiho maticí. Nelineární systém tedy v jistém smyslu “zdědí” chování řešení od své lineární aproximace pomocí Jacobiho matice. Je však nutno připomenout, že aproximace pomocí Jacobiho matice je jenom lokální a můžeme takto posoudit jenom řešení z nějakého okolí stacionárního bodu.

Zejména tedy, pokud má Jacobiho matice všechny vlastní hodnoty záporné, tak všechna řešení z nějakého okolí stacionárního bodu konvergují do tohoto bodu. Pokud má všechny vlastní hodnoty kladné, všechna řešení z nějakého okolí se naopak od stacionárního bodu vzdalují. To platí i pro vlastní komplexní vlastní hodnoty, pouze se mezi konvergencí a vzdalování přepíná podle znaménka reálné části vlastních hodnot a řešení oscilují směrem ke stacionárnímu bodu nebo od něj.

Poznámka (stabilita a strukturální stabilita řešení). *Stabilitou* stacionárního bodu budeme rozumět, stejně jako výše, že malá výchylka od stacionárního bodu vede na řešení, které konverguje zpět k tomuto stacionárnímu bodu. Stabilita vyjadřující, že při malé změně koeficientů v systému se nezmění typ singulárních bodů se nazývá *strukturální stabilita*.

Bruselátor

Systém chemických reakcí



má pozoruhodnou minulost. První chemickou reakci probíhající podle tohoto schematu objevil ruský chemik B. Bělousov, jeho výsledky přezkoumal a potvrdil A. Žabotinský. Oba zaznamenali překvapivé chování, kdy se periodicky mění koncentrace. Protože to bylo v roce 1951 mimo chápání chemiků, měli potíže s publikováním tohoto převratného jevu. Všeobecně totiž panoval názor, že chemická reakce rychle spěje ke stavu termodynamické rovnováhy a oscilující reakce byla něco jako chemické perpetuum mobile. Později vědci (I. Prigogine) sestavili teoretický model periodicky probíhající reakce a po čase několik takových reakcí i našli. Dnes toto chápeme jako jakési chemické hodiny. Název bruselátor je spojení slova Brusel (pracoviště I. Prigogina) a oscilátor.

Pokud je dostatek složek A a B , modeluje po zjednodušení (viz Wikipedie, konstanty úměrnosti klademe rovny jedné) chemické reakce soustava

$$\begin{aligned}\frac{dX}{dt} &= A + X^2Y - BX - X, \\ \frac{dY}{dt} &= BX - X^2Y,\end{aligned}$$

kde X pro jednoduchost znamená koncentraci látky X a totéž platí i pro další veličiny vystupující v rovnici.

Stacionárním bodem je bod $X = A$, $Y = \frac{B}{A}$. Pro $A = 1$ a $B = 4$ má systém tvar

$$\begin{aligned}\frac{dX}{dt} &= 1 + X^2Y - 5X, \\ \frac{dY}{dt} &= 4X - X^2Y.\end{aligned}$$

Jacobiho matice je

$$J(X, Y) = \begin{pmatrix} 2XY - 5 & X^2 \\ 4 - 2XY & -X^2 \end{pmatrix}$$

a

$$J(1, 4) = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -4 & -1 \end{pmatrix}.$$

Vlastní čísla jsou řešením rovnice

$$0 = \begin{vmatrix} 3 - \lambda & 1 \\ -4 & -1 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda + 4 = (\lambda - 1)^2 + 3.$$

Taková rovnice nemá řešení v množině reálných čísel a vlastní čísla jsou komplexně sdružená

$$\lambda_{1,2} = 1 \pm \sqrt{3}i.$$

Protože reálná část $\Re(\lambda_i) = 1 > 0$, řešení se v oscilacích vzdalují od rovnovážného bodu. Protože systém je druhého řádu a tímto postupem je možno získat dvě nezávislá řešení, lineárními kombinacemi vygenerujeme všechna řešení. Proto se v oscilacích budou od stacionárního bodu vzdalovat všechna řešení. Další stacionární bod neexistuje a koncentrace určitě zůstanou ohraničené z fyzikálních důvodů. Proto neexistuje stabilní stav, a systém je nestabilní. Je možné ukázat, že systém není chaotický, ale oscilacemi se přibližuje k periodickému řešení. Taková analýza je však již nad rámec základního seznámení se s aparátem autonomních systémů.

Autonomní systém ve dvou dimenzích

Vlastní hodnoty, $\lambda_{1,2} \in \mathbb{R}$	typ stac. bodu	průběh trajektorií
$\lambda_1 \geq \lambda_2 > 0$	nestabilní uzel	
$\lambda_1 > 0 > \lambda_2$	sedlo	
$0 > \lambda_1 \geq \lambda_2$	stabilní uzel	

Obrázek 10.5: Trajektorie pro stacionární body spojené s reálnými vlastními čísly.

Vlastní hodnoty, $\lambda_{1,2} \notin \mathbb{R}$	typ stac. bodu	průběh trajektorií
$\Re(\lambda_{1,2}) > 0$	nestabilní ohnisko	
$\Re(\lambda_{1,2}) < 0$	stabilní ohnisko	
$\Re(\lambda_{1,2}) = 0$	ohnisko nebo bod rotace	

Obrázek 10.6: Trajektorie pro stacionární body spojené s nereálnými vlastními čísly.

Ve dvou dimenzích je autonomní systém možno psát ve tvaru

$$\begin{aligned}x' &= f(x, y), \\ y' &= g(x, y).\end{aligned}$$

Pro autonomní systémy v rovině používáme dva základní způsoby vizualizace. Oba si můžete prohlédnout výše v příkladu s bruselátorem.

1. Řešení zobrazíme jako *grafy funkcí* $x(t)$ a $y(t)$. Tímto přístupem dokážeme posoudit dynamiku v čase, odhadnout rychlost s jakou se mění obě komponenty řešení. Často kreslíme do jednoho obrázku a často máme v tomto obrázku dvojí souřadnicový systém: jeden pro hodnoty x a jeden pro hodnoty y .
2. Řešení zobrazíme jako parametrickou křivku $\vec{r}(t) = [x(t), y(t)]$. Tato křivka se nazývá *trajektorie*. V tomto případě sice nemáme informaci o dynamice v čase, ale

můžeme lehce posoudit, jak se chovají řešení vycházející z různých počátečních podmínek. Proto tento způsob zpravidla preferujeme. Tento způsob znázornění se nazývá *fázový portrét*.

Křivky tvořené trajektoriemi mají speciální vlastnosti. Například se díky jednoznačné řešitelnosti nemohou dvě různé trajektorie protnout. Díky tomu existuje jenom několik málo druhů trajektorií.

- Stacionární body. Tyto body odpovídají konstantním řešením.
- Uzavřené trajektorie, cykly. Tyto trajektorie odpovídají periodickým řešením. Uvnitř každého cyklu leží alespoň jeden stacionární bod.
- Trajektorie, které samy sebe nikde neprotínají a pro $t \rightarrow \pm\infty$ tyto trajektorie mají jednu z následujících vlastností.
 - Trajektorie mají alespoň jednu složku neohrazenou.
 - Trajektorie konvergují k některému ze stacionárních bodů.
 - Trajektorie konvergují k některému z cyklů.
 - Trajektorie konvergují k množině tvořené konečným počtem singulárních bodů a jinými trajektoriemi, které vedou z jednoho stacionárního bodu do druhého. S tímto typem trajektorií se však v jednoduchých modelech nesetkáme.

Podle chování trajektorií v okolí stacionárních bodů rozdělujeme tyto stacionární body do několika navzájem disjunktních skupin. Dokážeme je identifikovat pomocí vlastních hodnot Jacobiho matice vypočtené v tomto stacionárním bodě.

- Stabilní uzel je stacionární bod takový, že pro $t \rightarrow \infty$ všechny trajektorie z nějakého okolí konvergují do tohoto bodu bez oscilací. Nestabilní uzel má stejnou vlastnost, ale pro $t \rightarrow -\infty$, tedy trajektorie z tohoto bodu vycházejí. Stabilní uzel poznáme podle dvou záporných a nestabilní uzel podle dvou kladných reálných vlastních hodnot.
- Stabilní a nestabilní ohnisko je stacionární bod se stejnou vlastností jako uzel, ale konvergence je spojena s oscilacemi okolo stacionárního bodu. Stabilní ohnisko poznáme podle dvou komplexně sdružených vlastních hodnot se zápornou reálnou částí, nestabilní ohnisko s kladnou reálnou částí.
- Sedlo je stacionární bod, který má v každém okolí pouze konečný počet trajektorií, které pro $t \rightarrow \pm\infty$ konvergují k tomuto bodu. Poznáme jej podle jedné kladné a jedné záporné vlastní hodnoty.
- Bod rotace je takový bod, v jehož každém okolí jsou cykly. Pokud navíc v nějakém okolí existují pouze cykly, nazývá se tento bod navíc střed. Bod rotace souvisí s komplexně sdruženými vlastními čísly s nulovou reálnou částí, ale v těchto případech může stacionární bod být i ohniskem.

ww:problems/autonomni_systemy/10.pg

ww:problems/autonomni_systemy/11.pg

ww:problems/autonomni_systemy/12.pg

ww:problems/autonomni_systemy/14.pg

Základní modely populační ekologie

Populační ekologie je součástí ekologie zabývající se modelováním vývoje populací. Základním vyjadřovacím jazykem jsou diferenciální rovnice nebo jejich diskrétní obdoba, kdy se čas mění po skocích, diferenciální rovnice. Málokdy uvažujeme jedinou populaci, většinou studujeme bohatší ekosystémy, což vede na soustavy rovnic. Dva nejklaší-
tější si zde stručně uvedeme a prostudujeme ve cvičení.

Model konkurence dvou druhů

manim:Konkurence_druhu|Při konkurenci dvou druhů může dojít (podle nastavení parametrů) ke koexistenci nebo ke konkurenčnímu vyloučení. Model ukazuje, jak se konkurence projevuje v nejjednodušším případě, při sledování konkurence dvou populací.

Situace kdy dva druhy žijí ve společné lokalitě a přítomnost jednoho druhu ovlivňuje druhý druh je modelována autonomním systémem

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= xr_1(1 - ax - by), \\ \frac{dy}{dt} &= yr_2(1 - cx - dy).\end{aligned}$$

Tento systém vychází z logistické rovnice pro každou z populací s doplněním členů r_1bxy a r_2cxy , které charakterizují mezidruhovou konkurenci. Ukazuje se, že tento systém má kapacitu popsat všechny v přírodě pozorované druhy interakcí (slabá konkurence, silná konkurence, dominance jednoho z druhů) a je výchozím systémem pro veškeré modely používané v populační ekologii.

Model dravce a kořisti

manim:Predator_preyl|zihShrEOJAU|Model dravce a kořisti vysvětluje kolísání populací okolo rovnovážné polohy. Jde o stabilitu, která však nespočívá s konstantních hodnotách stavů, ale v periodickém průběhu.

Skutečnost kdy žijí ve společné lokalitě a přítomnost jednoho druhu umožňuje přežití druhého je modelována autonomním systémem

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= xr(1 - ax) - V(x)y, \\ \frac{dy}{dt} &= y(-\alpha + kV(x)).\end{aligned}$$

V tomto případě je $V(x)$ trofická funkce. Pro $V(x) = k_0 x$ a $a = 0$, (tj. pro nenažrané dravce kteří nejsou nikdy saturováni a bez vnitrodruhové konkurence v populaci kořisti) dostáváme klasický Lotkuv-Voterrův model, který v jistém smyslu odstartoval využití matematiky v modelování biologických systémů. Povedlo se mu vysvětlit oscilace mezi populacemi kořisti a dravce. Přes tento úspěch se však pro praktické modelování využívají dokonalejší modely. Zejména je nutno uvažovat ohraničenou trofickou funkci.

Vícerozměrné autonomní systémy, kompartmentové modely

Kompartimentové modely jsou modely, kde se je studovaná veličina rozdělena do několika stavů a mezi těmito stavy se v jakémsi smyslu přelévá definovanou rychlostí. Klasickým případem v roce 2020 je model epidemie, například **SIR model** nebo **SEIR model**.

Kapitola 11

Lineární diferenciální rovnice druhého řádu

Anotace.

- Lineární diferenciální rovnice druhého řádu se vyskytují v úlohách z mechaniky a při řešení difuzní rovnice.
- Soustředte se na vysvětlení, jak souvisí DR druhého řádu se zrychlením tělesa a působící silou v úlohách z mechaniky, jak se může jednorozměrná difuzní stacionární rovnice redukovat na LDR druhého řádu a jak se metodou separace proměnných dá nestacionární difuzní rovnice rozdělit na obyčejnou diferenciální rovnici prvního a druhého řádu.
- Soustředte se na pasáže týkající se toho, jak okrajová podmínka dokáže vybrat hodnoty parametrů pro které existuje nenulové řešení. To determinuje například frekvenci při mechanickém kmitání.
- **Numerické experimenty** s rovnicí.
- Konkrétní nalezení řešení rovnice pomocí řešení kvadratické rovnice, pomocí metody neurčitých koeficientů pro nalezení partikulárního řešení atd. je pro nás málo zajímavé a věnujte se mu případně až v poslední fázi.

Lineární diferenciální rovnice druhého řádu

<https://youtu.be/PcNc0tfv7Q0>

Definice (Lineární diferenciální rovnice druhého řádu). Buďte p , q a f funkce definované a spojité na intervalu I . Diferenciální rovnice

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x) \quad (\text{LDE})$$

se nazývá *lineární diferenciální rovnice druhého řádu*. Řešením rovnice (nebo též *integrálem rovnice*) na intervalu I rozumíme funkci, která má spojité derivace do řádu 2 na intervalu I a po dosazení identicky splňuje rovnost (LDE) na I . Úloha nalézt řešení rovnice, které splňuje v bodě $x_0 \in I$ *počáteční podmínky*

$$\begin{cases} y(x_0) = y_0, \\ y'(x_0) = y'_0, \end{cases} \quad (\text{IC})$$

kde y_0 a y'_0 jsou reálná čísla, se nazývá *počáteční úloha* (*Cauchyova úloha*). Řešení počáteční úlohy se nazývá *partikulární řešení rovnice*.

Zkratky: LDE - lineární diferenciální rovnice, IC - počáteční podmínka, IVP - počáteční úloha

Příklad - těleso na pružině

Kmity tělesa o hmotnosti m pružně připevněného k nehybné podložce spojem tuhosti k jsou popsány diferenciální rovnicí $\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$. Zde navíc používáme fyzikální úzus označovat derivace podle času pomocí tečky a ne čárky. Symbol $\ddot{x}$ tedy značí druhou derivaci funkce x , kde x bereme jako funkci času.

Jednoduchým mechanickým modelem je těleso na pružině. Zde je deformace úměrná působící síle. Analogické situace vedoucí na stejnou rovnici však dostáváme i obecněji. Pokud pro jednoduchost předpokládáme, že těleso s jedním stupněm volnosti se nachází ve stabilním stavu s minimem potenciální energie a energie závisí na poloze x , můžeme v okolí minima x_0 potenciální energii aproximovat Taylo-

rovým rozvojem druhého řádu

$$E(x) \approx E(x_0) + E'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}E''(x_0)(x - x_0)^2.$$

Vzhledem k tomu, že v x_0 je minimum, platí $E'(x_0) = 0$. Je výhodné volit počátek v rovnovážné poloze, protože poté platí $x_0 = 0$. Síla je poté dána vztahem

$$F(x) = -\frac{\partial}{\partial x}E(x) = -E''(0)x.$$

Síla F je tedy úměrná výchylce x a vrací těleso do rovnovážné polohy.

Situace tedy perfektně koresponduje s kmitáním na pružině i když potenciální energie uvažovaná v tomto odstavci může být jiného charakteru. Něco podobného jsme viděli již u autonomních systémů, kdy systém modelující tlumený oscilátor z přednášky byl stejný jako systém modelující regulaci topení ze cvičení a tento systém byl jenom lépe představitelnou realizací systému regulace syntézy proteinů.

Řešitelnost LDE druhého řádu

<https://youtu.be/sw5EvXHFtA0>

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x) \quad (\text{LDE})$$

Věta (o existenci a jednoznačnosti řešení LDE druhého řádu). Každá počáteční úloha pro LDE druhého řádu má řešení, které je určeno jednoznačně a toto řešení je definované na celém intervalu I .

Definice (speciální typy LDE druhého řádu). Platí-li v rovnici (LDE) $f(x) = 0$ pro všechna $x \in I$, nazývá se rovnice (LDE) *homogenní*, v opačném případě *nehomogenní*.

Jsou-li koeficienty $p(x)$ a $q(x)$ na intervalu I konstantní funkce, nazývá se (LDE) *rovnice s konstantními koeficienty*.

Definice (triviální řešení). Funkce $y(x) \equiv 0$ je řešením homogenní LDE druhého řádu

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

vždy, bez ohledu na tvar koeficientů p , q . Toto řešení nazýváme *triviální řešení*.

Definice (asociovaná homogenní rovnice). Nahradíme-li v nehomogenní LDE pravou stranu (tj. funkci f) nulovou funkcí obdržíme rovnici

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0.$$

Tato rovnice se nazývá *asociovaná homogenní rovnice k rovnici (LDE)*.

Definice (obecné řešení). Všechna řešení LDE druhého řádu lze vyjádřit ve tvaru obsahujícím dvě nezávislé konstanty $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$. Takovýto předpis se nazývá *obecné řešení rovnice (LDE)*.

Důsledky linearity

Nechť L je lineární diferenciální operátor druhého řádu. Jako speciální případ vztahu

$$L[C_1y_1 + C_2y_2] = C_1L[y_1] + C_2L[y_2]$$

dostáváme následující.

- Platí

$$L[y_1] = L[y_2] = 0 \implies L[C_1y_1 + C_2y_2] = 0,$$

tj. každá lineární kombinace dvou řešení homogenní LDE je opět řešením této rovnice. Pokud se nám navíc podaří volbou konstant C_1 a C_2 splnit libovolnou počáteční podmínku, je jistota, že máme obecné řešení.

- Platí

$$L[y_2] = 0 \text{ a } L[y_1] = f(x) \implies L[y_1 + y_2] = f(x),$$

tj. součet řešení nehomogenní a asociované homogenní LDE je řešením původní nehomogenní rovnice. Pokud je navíc y_2 obecným řešením homogenní rovnice, je $y_1 + y_2$ obecným řešením nehomogenní rovnice, protože se podaří splnit libovolnou počáteční podmínku.

Důsledky linearity prakticky

Vztah

$$L[C_1y_1 + C_2y_2] = C_1L[y_1] + C_2L[y_2]$$

poslouží (podobně jako u lineárních rovnic prvního řádu), abychom popsali strukturu množiny všech řešení rovnice a dokázali tuto množinu vytvořit jenom na základě znalosti několika prvků.

Rovnice

$$y'' + y = x \quad (\text{A})$$

má partikulární řešení $y = x$.

Asociovaná homogenní rovnice je

$$y'' + y = 0. \quad (\text{B})$$

Tato rovnice má řešení například $y = \sin x$, $y = \cos x$. Z linearity plyne

- Funkce $y = C_1 \sin x + C_2 \cos x$ je řešením rovnice (B) pro libovolná reálná C_1, C_2 . Protože platí $y(0) = C_2$ a $y'(0) = C_1$, je možné splnit libovolnou podmínku $y(0) = \alpha$, $y'(0) = \beta$ volbou $C_2 = \alpha$ a $C_1 = \beta$. Jedná se tedy o obecné řešení.
- Funkce $y = C_1 \sin x + C_2 \cos x + x$ je obecným řešením rovnice (A).

Homogenní LDE 2. řádu (obecné řešení)

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \quad (\text{LDE0})$$

Věta (obecné řešení homogenní LDE). Jsou-li y_1 a y_2 dvě netriviální lineárně nezávislá řešení rovnice (LDE0) na intervalu I , pak funkce y definovaná vztahem

$$y(x, C_1, C_2) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x),$$

kde $C_{1,2} \in \mathbb{R}$, je obecným řešením rovnice (LDE0) na intervalu I .

Dvojici lineárně nezávislých řešení rozumíme dvě řešení taková, že jedno není násobkem druhého.

Definice (fundamentální systém řešení). Dvojici funkcí y_1 a y_2 z předchozí věty nazýváme *fundamentální systém řešení rovnice (LDE0)*.

Homogenní LDE 2. řádu s konstantními koeficienty

Rovnici

$$y'' + py' + qy = 0$$

je možno přepsat na

$$(y')' = -qy - py'$$

a tato rovnice je po substituci $x_1 = y$, $x_2 = y'$ ekvivalentní autonomnímu systému

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -q & -p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

U řešitelnosti této rovnice hraje velkou roli charakteristická rovnice matice soustavy, která je obsažena v následující definici.

Definice (charakteristická rovnice). Kvadratická rovnice

$$z^2 + pz + q = 0$$

s neznámou z se nazývá *charakteristická rovnice* pro rovnici

$$y'' + py' + qy = 0.$$

Věta (o obecném řešení LDE s konstantními koeficienty). Uvažujme LDE

$$y'' + py' + qy = 0, \quad (1)$$

a její charakteristickou rovnici

$$z^2 + pz + q = 0.$$

- Jsou-li $z_1, z_2 \in \mathbb{R}$ dva různé reálné kořeny charakteristické rovnice, definujeme

$$y_1 = e^{z_1 x}, \quad y_2 = e^{z_2 x}.$$

- Je-li $z_1 \in \mathbb{R}$ dvojnásobným kořenem charakteristické rovnice, definujeme

$$y_1 = e^{z_1 x}, \quad y_2 = x e^{z_1 x}.$$

- Jsou-li $z_{1,2} = \alpha \pm i\beta \notin \mathbb{R}$ dva komplexně sdružené kořeny charakteristické rovnice, definujeme

$$y_1(x) = e^{\alpha x} \cos(\beta x), \quad y_2(x) = e^{\alpha x} \sin(\beta x).$$

Potom obecné řešení rovnice (1) je

$$y(x, C_1, C_2) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x), \quad C_1 \in \mathbb{R}, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Nehomogenní LDE 2. řádu

Věta (o obecném řešení nehomogenní LDE). Součet libovolného partikulárního řešení nehomogenní lineární diferenciální rovnice a obecného řešení asociované homogenní rovnice je obecným řešením původní nehomogenní rovnice

Následující věta udává jednu z metod nalezení partikulárního řešení, pokud je diferenciální rovnice do jisté míry speciální: má konstantní koeficienty a polynomiální pravou stranu.

Věta (metoda neurčitých koeficientů). Uvažujme lineární diferenciální rovnici druhého řádu

$$y'' + py' + qy = P_n(x),$$

kde $p \in \mathbb{R}$ je konstanta, $q \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ je nenulová konstanta a $P_n(x)$ je polynom stupně n . Existuje polynom stupně n , který je partikulárním řešením této diferenciální rovnice.

V praxi polynom který má být řešením napíšeme s neurčitými koeficienty a dosazením do rovnice určíme potřebné hodnoty těchto koeficientů.

Dirichletova okrajová úloha, vlastní čísla

<https://youtu.be/9rFZAfiOM5Y>

Někdy je nutné řešit diferenciální rovnice druhého řádu s jinými než počátečními podmínkami. Ukážeme si na jednoduchém příkladě odlišnost od počáteční úlohy. Následující úloha má velké uplatnění při studiu kmitavých pohybů.

Pro parametr $\lambda \in \mathbb{R}$ najděte řešení rovnice

$$y'' + \lambda y = 0 \quad (*)$$

splňující podmínky

$$y(0) = 0 = y(1). \quad (**)$$

Definice (okrajová úloha). Úloha najít řešení diferenciální rovnice (*), které splňuje podmínky (**) se nazývá (Dirichletova) *okrajová úloha*.

Odlišnost Dirichletovy úlohy od (Cauchyovy) počáteční úlohy je v tom, že nezadáujeme funkční hodnotu a derivaci v jednom bodě, ale funkční hodnotu ve dvou různých bodech.

Jedno z řešení Dirichletovy úlohy je triviální řešení $y(x) = 0$. Ukazuje se, že netriviální řešení existuje jen pro některé hodnoty parametru λ .

Definice (vlastní funkce, vlastní hodnota okrajové úlohy). Hodnota λ , pro kterou existuje netriviální řešení Dirichletovy okrajové úlohy se nazývá *vlastní hodnota okrajové úlohy* a příslušné řešení se nazývá *vlastní funkce okrajové úlohy*.

Výpočet vlastních hodnot

Případ $\lambda > 0$

Je-li $\lambda > 0$, je řešením rovnice

$$y'' + \lambda y = 0 \quad (*)$$

funkce

$$y(x) = C_1 \sin(\sqrt{\lambda}x) + C_2 \cos(\sqrt{\lambda}x).$$

Z podmínky $y(0) = 0$ dostáváme $C_2 = 0$. Tedy

$$y(x) = C_1 \sin(\sqrt{\lambda}x).$$

Z podmínky $y(1) = 0$ dostáváme

$$0 = C_1 \sin(\sqrt{\lambda}),$$

která je splněna pokud $C_1 = 0$, nebo $\sqrt{\lambda} = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

Okrajová úloha

$$y'' + \lambda y = 0, \quad y(0) = 0 = y(1)$$

má vlastní hodnoty $\lambda = (k\pi)^2$, $k \in \mathbb{Z}$

Případ $\lambda < 0$

Je-li $\lambda < 0$, je řešením rovnice

$$y'' + \lambda y = 0 \quad (*)$$

funkce

$$y(x) = C_1 e^{\sqrt{-\lambda}x} + C_2 e^{-\sqrt{-\lambda}x}.$$

Z podmínky $y(0) = 0$ dostáváme

$$C_1 + C_2 = 0.$$

Z podmínky $y(1) = 0$ dostáváme

$$C_1 e^{\sqrt{-\lambda}} + C_2 e^{-\sqrt{-\lambda}} = 0.$$

Protože jedna rovnice není násobkem druhé, má soustava jediné řešení $C_1 = C_2 = 0$ a okrajová úloha má v případě $\lambda < 0$ pouze triviální nulové řešení. Nemá tedy žádné vlastní hodnoty.

Obvyklá formulace

V praktických úlohách, kdy požadujeme existenci nenulového řešení, zpravidla pracujeme s rovnicí ve tvaru

$$y'' + \lambda^2 y = 0,$$

abychom zdůraznili kladnou hodnotu parametru a abychom dostávali řešení formálně bez druhé odmocniny. Tedy okrajová úloha

$$y'' + \lambda^2 y = 0, \quad y(0) = 0 = y(1)$$

má vlastní čísla $\lambda = k\pi$, kde k je kladné celé číslo.

Kmity struny

Při kmitání struny délky l upevněné na koncích se ukazuje, že proces je možno modelovat okrajovou úlohou

$$y'' + \lambda^2 y = 0, \quad y(0) = 0 = y(l),$$

kde y je amplituda kmitů v místě x a λ souvisí s frekvencí. Rovnice má obecné řešení

$$y(x) = C_1 \sin(\lambda x) + C_2 \cos(\lambda x)$$

Z podmínky $y(0) = 0$ dostáváme $C_2 = 0$ a z podmínky $y(l) = 0$ dostáváme

$$y(x) = C_1 \sin(\lambda x)$$

pokud

$$\lambda l = k\pi \quad (***)$$

a $y = 0$ jinak. Při podrobnějším popisu se ukazuje, že λ souvisí s hmotností struny, napětím ve struně a frekvencí, kterou slyšíme. Podmínka **(***)** určuje spektrum slyšitelných frekvencí, na kterých může struna kmitat, výsledný pohyb (a zvuk) je díky linearitě složením jednotlivých variant. Toho se dá s výhodou vyžívat a stejnou strunu je možné **rozeznávat více způsobů** a dosahovat různý výsledný zvuk.

Vzpěry

Předpokládejme, že máme nosník namáhaný na vzpěr. Nosník je uchycen na dolním a horním konci tak, že se nemůže pohybovat do stran, ale může se otáčet. Osu x zvolíme podélně v ose vzpěry, osu y kolmo. Při namáhání takového nosníku, je výchylka dána okrajovou úlohou (A. Požgaj a kol., **Štruktúra a vlastnosti dreva**, str. 359)

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \alpha^2 y = 0, \quad y(0) = y(l) = 0,$$

kde $\alpha^2 = \frac{F}{EI}$ je parametr závislý na působící síle, materiálu a kvadratickém momentu průřezu nosníku. (Pro jiné způsoby uchycení se rovnice a okrajové podmínky mohou mírně lišit, rovnice může být například i nehomogenní a pro jiné druhy zatížení i vyššího řádu, zásadní vlastnosti jsou však stejné.) Toto je stejná úloha jako u kmitání struny. Při síle, která se postupně zvětšuje, se nenulové řešení objeví v bodě, kde platí

$$\alpha l = \pi,$$

(odpovídá základní frekvenci struny) tj.

$$\sqrt{\frac{F}{EI}} l = \pi$$

a

$$F = \frac{\pi^2 EI}{l^2}.$$

Toto je pro daný nosník kritická síla a ta je pro daný materiál nepřímo úměrná druhé mocnině délky a přímo úměrná kvadratickému momentu I .

Neumannova a smíšená okrajová úloha

Při řešení Dirichletovy úlohy hledáme řešení diferenciální rovnice druhého řádu s předepsanými hodnotami ve dvou různých bodech

$$y(a) = \alpha, \quad y(b) = \beta.$$

Tento požadavek se uplatní při studiu kmitů struny nebo tyče s pevnými konci.

V praxi je možné si představit i jiné podmínky. Například v termodynamice se používají podmínky na hodnotu derivací ve dvou různých bodech

$$y'(a) = \alpha, \quad y'(b) = \beta.$$

Takové podmínky se nazývají Neumannovy podmínky a úloha najít řešení rovnice, které tyto podmínky splňuje se nazývá **Neumannova okrajová úloha**, též **Neumannova úloha**.

Existují i smíšené úlohy, například při kmitání tělesa s jedním upevněným a jedním volným koncem je přirozené formulovat **smíšenou okrajovou podmínku**

$$y(a) = 0, \quad y'(b) = 0,$$

kde a je upevněný konec a b volný konec.

Fourierova metoda separace proměnných

<https://youtu.be/wfvY6bwlxaw>

Budeme se zabývat jednorozměrnou rovnicí vedení tepla ve tvaru

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

V tomto tvaru rovnice neobsahuje žádné konstanty a je to tvar, se kterým se pracuje ve většině matematických publikací. Reálnou rovnici vedení tepla převedeme do tohoto tvaru zavedením bezrozměrných veličin, což si ukážeme v následující přednášce. Teď si ukážeme, jak řešení rovnice vede na řešení LDR druhého řádu. Uvažujme pro jednoduchost okrajovou úlohu, kdy konce tyče jsou udržovány na nulové teplotě, tj. je-li tyč délky l položena v ose x tak že levý konec je v počátku, platí pro teplotu $u(x, t)$ podmínky $u(0, t) = u(l, t) = 0$ v libovolném čase t .

Budeme řešení hledat ve tvaru $u(x, t) = \varphi(x)\psi(t)$, kde φ a ψ jsou funkcemi jedné proměnné. Platí

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \varphi(x)\psi'(t), \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \varphi''(x)\psi(t)$$

a rovnice má tvar

$$\varphi(x)\psi'(t) = \varphi''(x)\psi(t).$$

Vydělením této rovnice součinem $\varphi(x)\psi(t)$ dostáváme

$$\frac{\psi'(t)}{\psi(t)} = \frac{\varphi''(x)}{\varphi(x)}.$$

Toto je rovnice, kde levá strana je funkcí proměnné t a pravá strana funkcí proměnné x . Obě proměnné jsou však nezávislé a uvedená rovnost může být splněna jen tehdy, když se rovnají společné konstantě.

Okrajové podmínky si vynucují platnost vztahů $\varphi(0) = \varphi(l) = 0$ a díky tomu máme pouze nulové řešení pokud je tato konstanta kladná (viz výše výpočet vlastních hodnot pro tuto úlohu). Společná konstanta tedy musí být záporná. Označme ji $-\lambda^2$. Platí tedy

$$\frac{\psi'(t)}{\psi(t)} = -\lambda^2, \quad \frac{\varphi''(x)}{\varphi(x)} = -\lambda^2.$$

První rovnice představuje lineární diferenciální rovnici prvního řádu

$$\psi' = -\lambda^2 \psi$$

s partikulárním řešením $\psi(t) = e^{-\lambda^2 t}$. Druhá rovnice představuje společně s okrajovou podmínkou okrajovou úlohu pro lineární diferenciální rovnici druhého řádu

$$\varphi'' + \lambda^2 \varphi = 0, \quad \varphi(0) = \varphi(l) = 0.$$

Máme tedy Dirichletovu úlohu na vlastní čísla a vlastní funkce, jak jsme ji viděli u kmitů struny nebo u namáhání na vzpěr. Řešením je funkce $\varphi(x) = \sin(\lambda x)$, kde λ je vlastní hodnota této úlohy. Funkce

$$u(x, t) = \sin(\lambda x) e^{-\lambda^2 t}$$

je tedy řešením rovnice

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Rovnici je možno přepsat do tvaru

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0,$$

kdy na levé straně stojí lineární operátor a na pravé straně je nula. Proto je každá lineární kombinace řešení opět řešením a pro libovolnou volbu konstant je funkce

$$u(x, t) = \sum_{\lambda} C_{\lambda} \sin(\lambda x) e^{-\lambda^2 t}$$

také řešením. Součet na pravé straně je přes všechna vlastní čísla, kterých je nekonečně mnoho.

Nyní začíná být rozbor úlohy nad rámec našeho kurzu, protože se objevil nekonečný součet. Ukazuje se, že tento zápis je dostatečně bohatý na to, aby obsáhl libovolnou rozumnou počáteční podmínku a vzorec je tedy schopen popsat řešení úlohy pro libovolné fyzikálně relevantní situace. Vidíme i přímo strukturu řešení, které je jakousi lineární kombinací různých módů. Tato skutečnost lépe vynikne na analogické diferenciální rovnici kmitání struny,

kdy jednotlivé módy přímo vnímáme sluchem: struna nemůže kmitat na libovolné frekvenci ale pouze a frekvenci dané okrajovou podmínkou a na frekvencích násobných.

Poznámka: Podobná situace a možnost separace proměnných je u rovnice kmitů struny

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

nebo jejího zobecnění na kmity desek a chvění těles. Opět separace vede k LDR druhého řádu pro složku závislé na x . V tomto případě je druhého řádu i rovnice pro složku závislou na čase.