Lineární operátory a lineární diferenciální rovnice

Robert Mařík

2014–2021

Anotace.

- Pasáže o lineární diferenciální rovnici prvního řádu jsou omezeny na rovnici s konstantními koeficienty. Rovnicím s nekonstantními koeficienty se nevěnujte. V tomto textu nejsou pokryty, nebudou ve cvičeních, nebudou v domácích úlohách ani písemkách. Pokud na ně narazíte při počítání starších písemek, nevěnujte se jim. Tato úprava souvisí s tím, že se více věnujeme aplikačnímu potenciálu než se tak činilo v letech minulých.
- Řešením lineární rovnice $y = ax + b$ je přímka a k jejímu zadání stačí jediný bod a jediný směr. Ukážeme si, že podobná tvrzení platí i pro celou řadu dalších rovnic, včetně diferenciálních rovnic a soustav diferenciálních rovnic.
- Výstupem bude dovednost popsat u některých speciálních rovnic množinu řešení tak, že nalezneme dva nebo více relativně jednoduše nalezitelné objekty a pomocí nich sestavíme všechna řešení. Podobně jako dokážeme z jednoho bodu a směru zrekonstruovat všechny body přímky.
- Naučíme se posoudit, jak se chovají řešení diferenciálních rovnic, kde pravá strana je lineární. Toto se později využije tak, že pomocí těchto rovnic budeme aproximovat obecnější nelineární modely.
- Pokud vám jde o to, pochopit proč výpočty fungují tak jak fungují, projděte si všechny materiály. Pokud máte ambice nižší, můžete se věnovat jenom pasáži "Lineární diferenciální rovnice prvního řádu s konstantními koeficienty" a k ostatním pasážím se vrátit, jakmile je budete potřebovat (pokud vůbec). Důležité pasáže jsou poptávány ve WeBWorKových úlohách a problematika toho, jak se chovají řešení nelineárních systémů, je lineárním systémům nadřazena a bude součástí příští přednášky. Pokud budete ovládat nelineární systémy, lineární systémy se dají chápat jako jejich podmnožina.

Prerekvizity.

- Co se týká využitých metod studia lineárních operátorů, je přednáška relativně nezávislá. Nemá v tomto ohledu žádné prerekvizity.
- Užitečnost linearity si ukážeme na příkladech diferenciálních rovnic několika typů. Proto je vhodné si zopakovat význam derivace, využití derivace v modelech založených a na diferenciálních rovnicích a interpretaci členů difuzní rovnice.
- Lineární systémy je vhodné zapisovat a studovat maticově. Budeme proto potřebovat maticový součin, maticovou formulaci soustavy lineárních rovnic, nutnou a postačující podmínku jednoznačné řešitelnosti této soustavy pomocí determinantu.
- Studentům obeznámeným s komplexními čísly se bude hodit Eulerova identita. Ostatní studenti budou muset příslušné pasáže akceptovat jako fakt.

Lineární operátory

https://youtu.be/_PcHv1GeEq4

Operátorem rozumíme zobrazení, které má na vstupu i na výstupu funkci. Například pro funkce jedné proměnné mohou být operátory derivace, druhá derivace, vynásobení funkce funkcí $\ln x$ anebo vnoření zadané funkce do funkce $\ln x$. Tj. pro $y = y(x)$ můžeme uvažovat operátory $F_1[y] = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$, $F_2[y] = \frac{d^2y}{dx^2}$, $F_3[y](x) = y(x)\ln(x)$, $F_4[y](x) = \ln(y(x))$.

Lineárním operátorem rozumíme zobrazení, které zachovává součet funkcí a násobek konstantou, tj. platí

$$L[y_1 + y_2] = L[y_1] + L[y_2]$$

a

$$L[Cy_1] = CL[y_1]$$

pro libovolné reálné číslo C a libovolné funkce y_1 a y_2 z definičního oboru operátoru L.

Příklady lineárních operátorů

Linearitu se naučíme využívat k tomu, abychom úlohu najít řešení rovnice rozkouskovali na řešení jednodušších úloh. Například je možné zkombinovat úlohu na stacionární proudění podzemní vody a úlohu na radiální proudění ke studni. Každou z těchto úloh umíme redukovat na separovatelnou diferenciální rovnici a vyřešit. Zkombinováním těchto úloh je možné modelovat chování studny v rovinném toku. Používá se například k zachycení kontaminace spodní vody.

- Operátor derivace, tj. operátor definovaný vztahem $L[y] = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ je lineární. Toto plyne ze vzorců pro derivaci součtu a konstantního násobku.
- Buď dána funkce $a(x)$. Operátor násobení funkcí $a(x)$, tj. $L[y](x) = a(x)y(x)$ je lineární. To plyne z komutativity násobení a z distributivního zákona (roznásobování závorek).
- Složení (postupná aplikace) lineárních operátorů je lineární operátor. Například tedy
$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}$$
je lineární operátor.
- Součet lineárních operátorů je lineární operátor.
- Buď pevně dána funkce $a(x)$. Lineární operátor
$$L[y] = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + a(x)y$$
se nazývá *lineární diferenciální operátor prvního řádu.*
- Buďte pevně dány funkce $p(x)$ a $q(x)$. Lineární operátor
$$L[y] = \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} + p(x)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + q(x)y$$
se nazývá *lineární diferenciální operátor druhého řádu.*
- Buď dána $n \times n$ matice reálných čísel A a n-vektorová funkce $\vec{F}(x)$. Zobrazení, které funkci $\vec{F}(x)$ přiřadí součin $A\vec{F}(x)$ je lineární. To plyne z distributivnosti násobení vzhledem ke sčítání matic a z toho, že součin matice a reálného čísla komutuje.
- Operátor z levé strany difuzní rovnice
$$\frac{\partial u}{\partial t} - \nabla \cdot (D\nabla u) = \sigma,$$
tj. operátor
$$L[u] = \frac{\partial u}{\partial t} - \nabla \cdot (D\nabla u)$$
je lineární. Po rozepsání divergence a gradientu pomocí parciálních derivací (které jsou lineární) jenom kombinujeme lineární operátory a tedy zachováváme linearitu.
- Rovnice podzemní vody pro proudění s napjatou hladinou
$$S_S\frac{\partial h}{\partial t} - \nabla \cdot (T\nabla h) = \sigma$$
je speciálním případem difuzní rovnice a operátor definovaný levou stranou je lineární. Rovnice podzemní vody pro proudění s volnou hladinou
$$S_S\frac{\partial h}{\partial t} - \nabla \cdot (kh\nabla h) = \sigma$$
definuje operátor
$$F[h] = S_S\frac{\partial h}{\partial t} - \nabla \cdot (kh\nabla h)$$
a není lineární. Pokud však využijeme rovnost
$$h\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{1}{2}\frac{\partial h^2}{\partial x}$$
a analogickou rovnost i pro další parciální derivace, je ve stacionárním případě (derivace podle času je nulová) rovnici možno přepsat do tvaru
$$-\frac{1}{2}\nabla \cdot (k\nabla(h^2)) = \sigma$$
a levá strana definuje lineární operátor v proměnné h^2.

Princip superpozice

Věta (princip superpozice). *Každý lineární operátor zachovává lineární kombinaci funkcí, tj. platí*
$$L[C_1y_1 + C_2y_2] = C_1L[y_1] + C_2L[y_2]$$
vždy, když $C_{1,2} \in \mathbb{R}$ a $y_{1,2}$ jsou funkce z definičního oboru operátoru L.

Plyne přímo rozepsáním
$$\begin{aligned} L[C_1y_1 + C_2y_2] &= L[C_1y_1] + L[C_2y_2] \\ &= C_1L[y_1] + C_2L[y_2] \end{aligned}$$

Operátorové rovnice s lineárním operátorem

https://youtu.be/i3By7KBu6ec

Operátorovou rovnicí budeme rozumět rovnici
$$L[x] = b(t),$$
kde $b(t)$ je funkce a L operátor.

- Například pro $b(t) = 0$ a $L[x] = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} - x$ má rovnice tvar
$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} - x = 0,$$
tj.
$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = x.$$

Následující věta vlastně vyjadřuje totéž co princip superpozice z předchozího textu, pouze v jiných pojmech: v pojmech řešení rovnice s lineárním operátorem.

Věta (princip superpozice při řešení rovnic). *Jsou-li funkce $x_1(t)$ a $x_2(t)$ po řadě řešeními rovnic*

$$L[x] = b_1(t), \quad L[x] = b_2(t),$$

Je funkce

$$x(t) = C_1 x_1(t) + C_2 x_2(t)$$

řešením rovnice

$$L[x] = C_1 b_1(t) + C_2 b_2(t).$$

Pro $b_1(t) = b_2(t) = 0$ všechny tři výše uvedené rovnice splynou a lineární kombinace dvou řešení homogenní lineární rovnice je také řešením. Toto je možné pochopitelně rozšířit na libovolný konečný počet funkcí.

Pro $b_1(t) = 0$ a $C_2 = 1$ jsou obě nehomogenní rovnice stejné a pokud k řešení rovnice přičteme řešení asociované homogenní rovnice (se stejným operátorem na levé straně, ale nulou na pravé straně), dostaneme řešení stejné rovnice.

Z těchto jednoduchých tvrzení plyne několik zásadních pozorování.

- Pokud máme k dispozici několik řešení homogenní rovnice, libovolná jejich lineární kombinace je také řešením.
- Za určitých okolností lineární kombinace z předchozího bodu umožní splnit libovolnou počáteční podmínku a vzhledem k jednoznačnosti řešení, která lineární rovnice zpravidla provází, je jistota, že žádné další řešení neexistuje. Nalezení těchto funkcí je tedy zásadní krok při řešení rovnice.
- U nehomogenní rovnice se úloha najít všechna řešení dá rozdělit na dvě dílčí úlohy: najít jenom jedno řešení a k tomu najít všechna řešení homogenní rovnice se stejnou levou stranou. Každá z těchto dvou úloh je mnohem lehčí než úloha celková a součtem jednoho řešení nehomogenní rovnice a obecného řešení asociované homogenní rovnice dostaneme obecné řešení nehomogenní rovnice.

Příklad využití linearity v jedné dimenzi

Pro konkrétnost specifikujeme myšlenky z předchozího textu na příkladě.

Pro jednu funkci lineární kombinace degenerují na násobky. Proto je obecné řešení rovnice součtem jednoho řešení rovnice a obecného řešení asociované homogenní rovnice. Toto jedno řešení vlastně udává pozici v prostoru funkcí a řešení asociované homogenní rovnice udává směr. Například funkce $x = e^t$ splňuje rovnici

$$x' - x = 0$$

a funkce $x = -\pi$ splňuje rovnici

$$x' - x = \pi.$$

Všechna řešení rovnice

$$x' - x = \pi$$

jsou tvaru $x = Ce^t - \pi$

Lineární diferenciální rovnice prvního řádu s konstantními koeficienty

V aplikacích často vídáme rovnici tvaru

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + ax = b, \tag{N}$$

která vznikne například úpravou rovnice

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = b - ax.$$

Podobně jako v předchozím příkladě stačí najít jedno řešení rovnice (N) a jedno nenulové řešení rovnice

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + ax = 0. \tag{H}$$

První z řešení udává bod v prostoru funkcí, druhé řešení jakýsi směr a společně definují jakousi přímku obsahující všechna řešení. Rovnici (N) splňuje konstantní funkce $x(t) = \frac{b}{a}$ a rovnici (H) exponenciální funkce $x(t) = e^{-at}$. Obecné řešení rovnice (N) je proto

$$x(t) = \frac{b}{a} + Ce^{-at}.$$

Pro t jdoucí do nekonečna toto řešení za předpokladu $a > 0$ konverguje ke stacionárnímu řešení $\frac{b}{a}$. Partikulární řešení odpovídající počáteční podmínce $x(0) = 0$ je

$$x(t) = \frac{b}{a} - \frac{b}{a}e^{-at} = \frac{b}{a}\left(1 - e^{-at}\right).$$

To znamená, že řešení se exponenciálně přibližuje ke stacionárnímu řešení. Pro $a < 0$ se naopak od stacionárního řešení exponenciálně vzdaluje.

Věta (řešení lineární diferenciální rovnice prvního řádu s konstantními koeficienty). *Obecným řešením rovnice*

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + ax = b$$

je

$$x(t) = x_{st} + Ce^{-at},$$

kde $x_{st} = \frac{b}{a}$ je stacionárním řešením této rovnice. Pro $a > 0$ je toto řešení stabilní a globálně atraktivní. Pro $a < 0$ je nestabilní.

Obrat, že stacionární řešení je globálně atraktivní znamená, že všechna řešení k tomuto stacionárním stavu konvergují nezávisle na počáteční podmínce.

Další lineární rovnice

Pro skalární lineární diferenciální rovnice druhého řádu je situace obdobná, pouze pro řešení asociované homogenní diferenciální rovnice potřebujeme dvě lineárně nezávislá řešení (jedno není násobkem druhého).
Například $x_1(t) = e^t$ a $x_2(t) = e^{-t}$ nejsou jedno násobkem druhého a obě splňují rovnici

$$x'' - x = 0.$$

Proto všechna řešení jsou tvaru

$$x(t) = C_1 e^t + C_2 e^{-t},$$

kde $C_{1,2} \in \mathbb{R}$. Funkce $x = -t$ splňuje rovnici

$$x'' - x = t$$

a všechna řešení této rovnice jsou

$$x(t) = C_1 e^t + C_2 e^{-t} - t.$$

Rovnicím majícím derivace vyššího řádu se budeme věnovat později.

Lineární autonomní systémy

https://youtu.be/AjpQ0Zh1jkU

Pokud pracujeme s nekonstantními vektorovými funkcemi tak, že při derivaci derivujeme každou komponentu samostatně, je rovnice

$$\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t} - AX = B$$

operátorová rovnice s lineárním operátorem. Tyto rovnice se v případě, kdy matice A a B nezávisí na čase, nazývají autonomní systémy a budeme se jim věnovat za chvíli. Pro tyto rovnice je souvislost mezi homogenní a nehomogenní rovnicí obdobná jako v minulých případech. Řešením nehomogenní úlohy najdeme jedno řešení (bod v prostoru) a řešením asociované úlohy najdeme směry definující množinu všech řešení. Vzhledem k vícedimenzionalitě úlohy bude těchto řešení více. Situace je podobná jako to, že v geometrii je rovina dána dvěma směry. Nakonec dané informace můžeme využít k vygenerování množiny všech řešení. Popsaná metoda je komplikovanější na konkrétní použití, ale často se ani nemusí provádět. Často stačí například informace o chování řešení v nekonečnu. To je také to, na co se omezíme na příští přednášce.

Lineární autonomní systém ve dvou dimenzích

Následující příklad je mírně modifikovaný příklad z kurzu MIT o diferenciálních rovnicích. Ve formulaci s vařením vajíčka se zdá triviální a prakticky neužitečný. Toto je však voleno pro jednoduchost výkladu a snadnou představu povahy zkoumaného jevu. V praxi se stejným modelem předává teplo vrstveným materiálem (jako je tepelná ochrana domů nebo raketoplánů) nebo chemické látky vstupující do dalších reakcí (jako například řetěz reakcí vedoucí k syntéze bílkovin, které buňka v reakci na okolní prostředí potřebuje k přežití).

Budeme modelovat ohřívání vejce ve vodě o konstantní teplotě T_0. Na počátku mají bílek a žloutek teplotu T_1 a T_2. Žloutek přebírá teplo od bílku rychlostí úměrnou rozdílu teplot žloutku a bílku. Bílek přebírá teplo od vodní lázně rychlostí úměrnou rozdílu teplot a předává teplo žloutku procesem popsaným v předchozí větě. Vody je hodně a její teplota se nemění. Proces můžeme modelovat soustavou diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned} T_1' &= k_1(T_0 - T_1) - k_2(T_1 - T_2) \\ T_2' &= k_2(T_1 - T_2) \end{aligned}$$

Tento systém je možno přepsat do tvaru

$$\begin{aligned} T_1' &= -(k_1 + k_2)T_1 + k_2 T_2 + T_0 k_1 \\ T_2' &= k_2 T_1 - k_2 T_2 \end{aligned}$$

a zapsat maticově

$$\begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} -(k_1 + k_2) & k_2 \\ k_2 & -k_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k_1 T_0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Pokud zvolíme teplotní stupnici tak, že teplota vroucí vody je v naší nové stupnici nula, můžeme dokonce eliminovat druhý člen a dostáváme

$$\begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} -(k_1 + k_2) & k_2 \\ k_2 & -k_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \end{pmatrix} \tag{V}$$

tj. symbolicky $X' = AX$, kde $X = (T_1, T_2)^T$ je vektorová funkce (sloupcový vektor) a A je 2×2 matice.

Systém $X' = AX$

Je-li determinant matice nenulový, má soustava $AX = 0$ pouze nulové řešení a systém

$$X' = AX \tag{1}$$

má jediné konstantní řešení, kterým je počátek. Konstantní řešení bude nazývat stacionární bod.

Tento systém můžeme přepsat na

$$X' - AX = 0$$

a tento systém je lineární, protože díky distributivnímu zákonu pro matice pro operátor $L[X] = X' - AX$ platí

$$\begin{aligned} L[X_1 + X_2] &= (X_1 + X_2)' - A(X_1 + X_2) \\ &= X_1' + X_2' - AX_1 - AX_2 \\ &= (X_1' - AX_1) + (X_2' - AX_2) \\ &= L[X_1] + L[X_2] \end{aligned}$$

a díky komutativitě při násobení s konstantou $C \in \mathbb{R}$ také

$$\begin{aligned} L[CX] &= (CX)' - A(CX) \\ &= CX' - CAX \\ &= C(X' - AX) \\ &= CL[X]. \end{aligned}$$

Je možné ukázat, že každá počáteční úloha je jednoznačně řešitelná a pro obecné řešení stačí najít tolik nezávislých řešení, kolik komponent má neznámá vektorová funkce X. Platí následující věta, kterou je možno ověřit přímo dosazením.

Věta (souvislost vlastních čísel matice a řešení lineárního autonomního systému). *Má-li matice A vlastní číslo λ a příslušný vlastní vektor je v, tj. platí $Av = \lambda v$, je funkce $X(t) = ve^{\lambda t}$ řešením systému $X' = AX$. Jsou-li λ a v komplexní, je řešením i samostatně reálná část a imaginární část.*

Systém

$$X' = AX + B \tag{2}$$

je možno na tvar (1) převést po přepsání do tvaru $(X - X_0)' = A(X - X_0)$, kde X_0 je řešením soustavy $AX + B = 0$, což odpovídá posunu stacionárního bodu do počátku.

Poznámka (vlastní hodnoty a řešení). Následující poznatky jsou shrnutím a specifikací výše uvedeného a klasifikují stabilitu některých řešení systému (2), tj.

$$X' = AX + B.$$

- Jakmile má matice A reálnou kladnou vlastní hodnotu, existuje řešení, které se vzdaluje od stacionárního bodu směrem daným příslušným vlastním vektorem.
- Jakmile má matice A reálnou zápornou vlastní hodnotu, existuje řešení, které se přibližuje ke stacionárnímu bodu ze směru daného příslušným vlastním vektorem.
- Jakmile má matice A komplexní hodnotu s kladnou reálnou částí, existuje řešení, které se v oscilacích vzdaluje od stacionárního bodu.
- Jakmile má matice A komplexní hodnotu se zápornou reálnou částí, existuje řešení, které se v oscilacích přibližuje ke stacionárnímu bodu.

manimp:AS_vlastni_cisla|O chování trajektorií v okolí stacionárního bodu rozhoduje znaménko vlastních čísel (u reálných vlastních čísel), nebo znaménko reálné části (u komplexně sdružených vlastních čísel)

Pokud jsou například všechna vlastní čísla v daném bodě záporná, poté každé z nich generuje řešení konvergující do stacionárního bodu. Díky linearitě, jednoznačnosti řešení a tomu, že máme tolik řešení, kolik je nutno pro splnění libovolné podmínky, je možné pomocí těchto dílčích řešení zapsat i libovolné jiné řešení. Tím pádem ale všechna řešení konvergují do stacionárního bodu. Pokud jsou vlastní čísla komplexní se zápornou reálnou částí, je situace stejná, ale řešení navíc konvergují do stacionárního bodu postupnými oscilacemi. Podobně, pokud všechny vlastní hodnoty jsou kladné, všechna řešení se od stacionárního bodu vzdalují a pokud jsou všechny vlastní hodnoty komplexní s kladnou reálnou částí, probíhá toto vzdalování oscilacemi s narůstající amplitudou.

Příklad. Model ohřívání vajíčka (V) z předchozí části této přednášky má (v posunuté teplotní stupnici, na které teplota varu vody odpovídá nule) stacionární bod $(0, 0)$. Zkusíme zvolit parametry k_1 a k_2 a určit chování trajektorií v okolí tohoto bodu. Pro $k_1 = 1$ a $k_2 = 2$ dostáváme

$$\begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \end{pmatrix}.$$

Charakteristická rovnice je

$$\lambda^2 + 5\lambda + 2 = 0$$

se dvěma zápornými kořeny $\lambda_{1,2} = \dfrac{-5 \pm \sqrt{25 - 8}}{2} = \cdots$. Budou tedy existovat dvě nezávislá řešení konvergující do počátku a všechna další řešení dostaneme jako jejich lineární kombinaci. Proto všechna řešení konvergují k počátku tj. $T_1 = T_2 = 0$. Obě teploty v naší posunuté stupnici se tedy ustálí na teplotě vodní lázně. Nic jiného jsme ani nečekali, ať mají žloutek a bílek na začátku jakoukoliv teplotu, po čase se teplota ustálí na teplotě vodní lázně. V tomto případě není zajímavé vědět, do jakého stavu systém konverguje, ale například za jak dlouho bude dosaženo potřebné teploty ve žloutku nebo v bílku. V praxi se podobným způsobem neřeší vaření vajec, ale předávání chemických látek jako jsou léky nebo enzymy mezi tkáněmi, prostřednictvím krve. Podobně jako u Newtonova zákona tepelné výměny, i zde je rychlost procesu úměrná množství, v tomto případě úměrná rozdílu koncentrací.

ww:problems/autonomni_systemy/13.pg

Mechanický oscilátor

https://youtu.be/8KQ9qG1eQtU

S mechanickým oscilátorem se setkáváme tam, kde je systém vychýlen z rovnovážné polohy a nějaká síla jej do této rovnovážné polohy vrací. Přičemž v některých situacích dojde (například vlivem setrvačnosti) k tomu, že systém se přehoupne přes rovnovážnou polohu na opačnou stranu a vrací se zpět. Klasickým případem je těleso o hmotnosti m na pružině. Pokud sílu závisející na rychlosti v a výchylce x označíme F, dostáváme

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} &= v,\\ \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} &= \frac{1}{m}F(v,x),\end{aligned}$$

přičemž první rovnice vyjadřuje, že rychlost je derivace polohy a druhá rovnice je Newtonův zákon síly. Pro pružinu tuhosti k a odpor prostředí úměrný rychlosti dostáváme

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} &= v,\\ \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} &= -\frac{k}{m}x - bv,\end{aligned}$$

nebo ve vektorovém tvaru

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix} x\\ v\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1\\ -\frac{k}{m} & -b\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x\\ v\end{pmatrix}.$$

Charakteristická rovnice je

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1\\ -\frac{k}{m} & -b-\lambda\end{vmatrix} = -\lambda(-b-\lambda) + \frac{k}{m} = \lambda^2 + b\lambda + \frac{k}{m} = 0.$$

Pro velké tlumení, tj. $b^2 > \dfrac{4k}{m}$ má rovnice dva záporné reálné kořeny

$$\lambda_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - \frac{4k}{m}}}{2}$$

Systém se tedy bez oscilací překlopí do rovnovážného stavu. Při opačné nerovnosti jsou kořeny charakteristické rovnice

$$\lambda_{1,2} = -\frac{b}{2} \pm \frac{1}{2}i\sqrt{-b^2 + \frac{4k}{m}}$$

komplexní se zápornou reálnou částí a systém osciluje okolo rovnovážné polohy. Pro $b > 0$ mají tyto kořeny zápornou reálnou část a systém osciluje okolo rovnovážné polohy se zmenšující se amplitudou. Pro $b = 0$ se amplituda nezmenšuje a oscilátor kmitá do nekonečna. Případ $b < 0$ neuvažujeme, protože odpor prostředí je síla působící proti pohybu.

Poznámka (diferenciální rovnice druhého řádu). Uvažovaný systém se v literatuře často vyskytuje ve tvaru, kdy je rychlost v dosazena do druhé rovnice a poté dostáváme model ve tvaru

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{k}{m}x - b\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t},$$

tj. ve tvaru rovnice obsahující první dvě derivace neznámé funkce. V podstatě celá klasická mechanika je založena právě na rovnicích tohoto typu.