Dvojný integrál

Robert Mařík

2020

Anotace.

- V předchozí přednášce jsme si ukázali rozšíření integrálu, které nám umožnilo počítat integrál nejenom po úsečce, ale i po libovolné křivce. V této přednášce se naučíme integrovat přes dvourozměrný obrazec v rovině. Seznámíme se s dvojným integrálem.
- Mezi aplikace spadá střední hodnota na dvourozměrné oblasti.
- Pomocí dvojného integrálu je definován kvadratický moment průřezu nosníku, což je zásadní veličina ovlivňující tuhost a chování těchto nosníků při deformaci.
- Pomocí dvojného integrálu je možné určit množství veličiny ze znalosti její plošné hustoty. To využijeme později při makroskopické formulaci bilance stavové veličiny a při odvození difuzní rovnice v integrálním tvaru.

Prerekvizity.

- Dvojný integrál počítáme převodem na dva jednorozměrné Riemannovy integrály. Je proto tedy dobré ovládat výpočet neurčitého a určitého Riemannova integrálu.

V praxi pracujeme s řadou veličin, které se počítají tak, že se parametr systému násobí obsahem.

- Z plošné hustoty desky a jejího obsahu násobením obdržíme hmotnost desky.
- Z hloubky nádrže (se svislými stěnami) a obsahu hladiny obdržíme násobením objem.
- Z tlaku a obsahu stěny obdržíme násobením tlakovou sílu působící na stěnu nádrže.

Je však otázka, jak tento přístup použít v případě, že daný parametr není po celé ploše konstantní. Deska může být nehomogenní, nádrž nemusí mít vodorovné dno a tlak působící na stěnu nádrže není ve všech místech stejný, protože různé části stěny jsou v různé hloubce.

U křivkového integrálu jsme se setkali s momentem setrvačnosti. Ukázali jsme si, jak stanovit moment setrvačnosti množiny, která má hmotnost rozloženu na křivce a třeba i nerovnoměrně. Při výpočtu namáhání nosníků, trámů, polic nebo stromů řešíme podobnou úlohu, ale pro množiny v rovině namísto křivek. Potřebujeme zohlednit, že při deformaci nosníků se pro jednotlivé body průřezu liší vzdálenost od neutrální osy.

Řešení uvedených nesnází je stejné: další rozšíření integrálního počtu a zavedení dvojného integrálu. Ten si nyní představíme.

https://youtu.be/DYySq6o6WTk

Dvojný integrál

https://youtu.be/tPf-7dZ4Il0

Pro dvojný integrál použijeme podobnou myšlenkovou konstrukci jako u křivkového integrálu prvního druhu, pouze místo drátu s danou lineární hustotou budeme uvažovat rovinnou ohraničenou desku s danou plošnou hustotou.

- Pokud je hustota desky konstantní, je možno její hmotnost získat jednoduše jako součin plošné hustoty a obsahu.
- Pokud se hustota desky mění a v obecném bodě (x, y) je dána funkcí $f(x, y)$, můžeme myšlenkově rozdělit desku na malé kousky, v rámci každého malého kousku hustotu aproximovat konstantou, vypočítat hmotnost každého kousku jako součin hustoty a obsahu a všechny hmotnosti sečíst.
- Získaná veličina je aproximací celkové hmotnosti.

V limitním přechodu kdy rozměry všech kousků na něž je deska dělena jdou k nule dostáváme **dvojný integrál**

$$\iint_\Omega f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

kde Ω je oblast v rovině (x, y) definovaná uvažovanou deskou. V aplikacích je častý též zápis

$$\iint_\Omega f(x, y)\mathrm{d}A$$

nebo

$$\iint_\Omega f(x, y)\mathrm{d}S.$$

Linearita a aditivita

Dvojný integrál je odvozen (tak jako všechny integrály) pro aditivní veličiny a proto se “dobře snáší” se sčítáním (ať už integrovaných funkcí, nebo integračních oborů) a s násobení integrované funkce konstantou. Přesněji, platí následující věty.

Věta (linearita dvojného integrálu). *Buď f_1, f_2 funkce integrovatelné v Ω a c_1, c_2 libovolná reálná čísla. Platí*

$$\begin{aligned}&\iint_\Omega [c_1 f_1(x,y) + c_2 f_2(x,y)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ &= c_1 \iint_\Omega f_1(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y + c_2 \iint_\Omega f_2(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\end{aligned}$$

Věta (aditivita vzhledem k oboru integrace). *Nechť je množina Ω rozdělena na dvě oblasti Ω_1 a Ω_2, které mají společné nejvýše hraniční body. Platí*

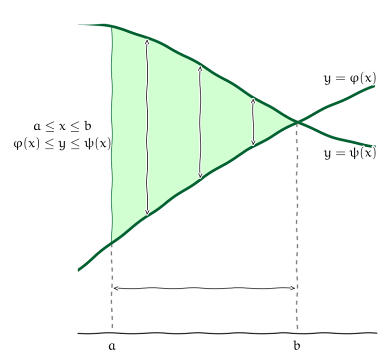
$$\iint_\Omega f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{\Omega_1} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint_{\Omega_2} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Výpočet dvojného integrálu

https://youtu.be/ItTWxJGD3sY

Výpočet dvojného integrálu se provádí převodem, na integrály funkcí jedné proměnné.

Výpočet (oblast mezi funkcemi proměnné x)



Obrázek 1: *Oblast mezi funkcemi proměnné x.*

V závislosti na tom, jakými nerovnostmi množinu Ω definujeme, můžeme pro výpočet dvojného integrálu použít následující věty. Tyto věty udávají, jak je možno dvojný integrál přepsat jako dvojnásobný integrál. Mají název **Fubiniovy věty**.

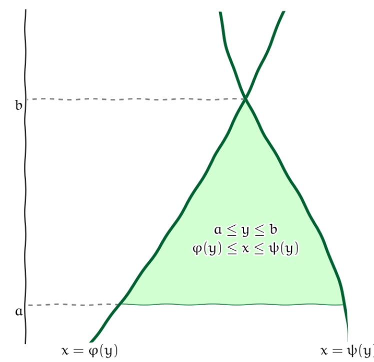
Věta (Fubiniova věta). *Nechť f je funkce spojitá v uzavřené oblasti*

$$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \le x \le b \text{ a } \varphi(x) \le y \le \psi(x)\}.$$

Potom

$$\iint_\Omega f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_a^b \Big[\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\mathrm{d}y\Big]\mathrm{d}x.$$

Výpočet (oblast mezi funkcemi proměnné y)



Obrázek 2: *Oblast mezi funkcemi proměnné y.*

Věta (Fubiniova věta pro jiné pořadí integrace). *Nechť f je funkce spojitá v uzavřené oblasti*

$$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \le y \le b \text{ a } \varphi(y) \le x \le \psi(y)\}.$$

Potom

$$\iint_\Omega f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_a^b \Big[\int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x,y)\mathrm{d}x\Big]\mathrm{d}y.$$

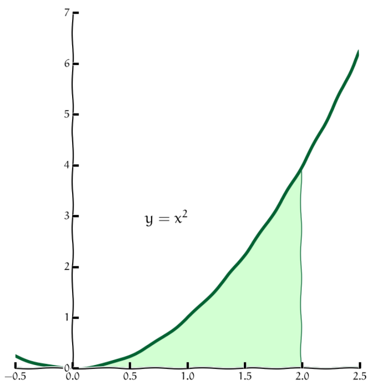
Záměna pořadí integrace

Často je možné oblast integrace zapsat pomocí obou možností uvedených na předchozích slidech. Například oblast na obrázku je možno zapsat buď jako

$$\begin{gathered}0 \le x \le 2\\ 0 \le y \le x^2\end{gathered}$$

nebo

$$\begin{gathered}0 \le y \le 4\\ \sqrt{y} \le x \le 2.\end{gathered}$$



Obrázek 3: *Oblast, pro kterou jsou možná obě pořadí integrace.*

Pro integrál funkce $f(x,y)$ přes takovou množinu tedy máme dvě alternativy. Buď

$$\int_0^2 \int_0^{x^2} f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$$

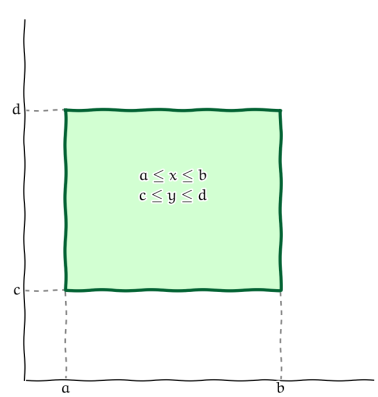
anebo

$$\int_0^4 \int_{\sqrt{y}}^2 f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Všimněte si, že nestačí prosté prohození integrálů. Je nutno přepočítávat meze a hraniční křivky je nutno vyjádřit jednou jako funkce proměnné x a jednou jako funkce proměnné y. V důsledku tohoto dochází v průběhu výpočtu dvěma různými způsoby k tomu, že pracujeme se dvěma různými integrály. Výsledky jsou samozřejmě stejné, ale nemusí být dosažitelné srovnatelnou námahou. Jedna z cest může být snazší.

Výpočet (obdélníková oblast)

https://youtu.be/o38mi3tTAvw



Obrázek 4: *Integrál přes obdélník.*

Výše uvedené problémy se stanovením a případným přepočítáváním mezí při záměně pořadí integrace se nevyskytují při integrování přes obdélníkovou oblast.

Věta (Fubiniova věta na obdélníku). *Nechť $R = [a,b] \times [c,d]$ je uzavřený obdélník v $\mathbb{R}^2$ a f funkce definovaná a spojitá na R. Pak platí*

$$\iint_R f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_a^b \Bigl[\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y\Bigr]\mathrm{d}x = \int_c^d \Bigl[\int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x\Bigr]\mathrm{d}y.$$

Platí-li dokonce rovnost $f(x,y) = g(x)h(y)$, pak

$$\iint_R f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_a^b g(x)\mathrm{d}x \int_c^d h(y)\mathrm{d}y.$$

Aplikace dvojného integrálu

https://youtu.be/8YS2Fn8st5I

Matematické aplikace dvojného integrálu

- **Obsah** $\mu(\Omega)$ množiny Ω vypočteme jako integrál
$$\mu(\Omega) = \iint_\Omega \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$
- **Integrální střední hodnota** funkce $f(x,y)$ definované na množině Ω je
$$\frac{\iint_\Omega f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\mu(\Omega)},$$
kde $\mu(\Omega) = \iint_\Omega \mathrm{d}x\mathrm{d}y$ je obsah množiny Ω.

Objem kopce nebo jezera pomocí vrstevnic

- Obsah množiny ohraničené vrstevnicí na mapě vynásobený rozestupem mezi vrstevnicemi je přibližně roven objemu vrstvy mezi dvěma vrstevnicemi.
- Pokud sečteme obsahy všech vrstevnic a vynásobíme rozestupem mezi těmito vrstevnicemi, dostaneme odhad pro objem kopce. Vlastně je to jako bychom kopec rozřezali na stejně tlusté plátky, naskládali je vedle sebe, sečetli obsahy postav takto vzniklých těles a vynásobili výškou.
- Podobně je možné odhadnout objem jezera.

- V tomto případě je dvojný integrál pouze koncept. Samozřejmě nemáme ambice vyjadřovat vrstevnice v analytickém tvaru a integrovat pomocí Fubiniovy věty. Ke slovu přijde spíše numerický výpočet integrálu.

Fyzikální aplikace dvojného integrálu

- **Hmotnost** množiny M je
$$m = \iint_M \sigma(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$
kde $\sigma(x,y)$ je **plošná hustota** (hmotnost vztažená na jednotku povrchu).
- Je-li plošná u hustota kinetické energie molekul (což je veličina úměrná termodynamické teplotě), je $\iint_M u\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ celková kinetická energie částic. Tato energie se může měnit tepelnou výměnou. Rychlost, s jakou se mění část vnitřní energie související s teplotou, je
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\iint_M u\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)$$
a odsud odvozujeme rovnici vedení tepla.
- **Lineární momenty** hmotné množiny M vzhledem k osám y a x jsou rovny
$$\iint_M x\sigma(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
a
$$\iint_M y\sigma(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$
- **Moment setrvačnosti** hmotné množiny M vzhledem k ose je
$$J = \iint_M \rho^2(x,y)\sigma(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$
kde $\rho(x,y)$ je vzdálenost bodu (x,y) od osy otáčení. Například pro osu x je $\rho(x,y) = y$ a pro osu y je $\rho(x,y) = x$. Pro osu procházející kolmo počátkem je $\rho(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$.

Technické aplikace dvojného integrálu

- **Souřadnice těžiště** množiny jsou podílem lineárních momentů a celkové hmotnosti množiny.
- **Kvadratický moment průřezu** (což je moment setrvačnosti pro $\sigma(x,y) = 1$, anglicky *second moment of area*) je veličina, která hraje podstatnou roli v mechanice (nábytek, stavby) při dimenzování (polic, nosných tyčí, nosníků).
- V technické praxi zpravidla neuvažujeme nekonstantní plošnou hustotu. Potom je možné je bez újmy na obecnosti nahradit jedničkou. Vzorce pro obsah, x-ovou souřadnici těžiště (x_0), y-ovou souřadnici těžiště (y_0), kvadratický moment vzhledem k ose x (I_x) a kvadratický moment vzhledem k ose y (I_y) (pro množinu M s plošnou hustotou 1) jsou
$$x_0 = \frac{1}{S}\iint_M x\mathrm{d}x\mathrm{d}y, \qquad I_x = \iint_M y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$
$$y_0 = \frac{1}{S}\iint_M y\mathrm{d}x\mathrm{d}y, \qquad I_y = \iint_M x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$
kde $S = \mu(M)$ je obsah množiny M. Poloha těžiště je tedy střední hodnotou funkcí x a y.

Tuhost nosníků, stabilita stromů

Tuhost (odolnost vůči deformaci) pro nosník obdélníkového průřezu o výšce b a šířce a je dána kvadratickým momentem obdélníkového průřezu vzhledem k vodorovné ose procházející těžištěm.

$$\begin{aligned} I_x &= \iint_{[-\frac{a}{2},\frac{a}{2}]\times[-\frac{b}{2},\frac{b}{2}]} y^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \mathrm{d}x \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} y^2\,\mathrm{d}y = a\left[\frac{1}{3}y^3\right]_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} = \frac{1}{12}ab^3 \end{aligned}$$

Odsud máme okamžitě několik pozorování

- Pokud šířka vzroste dvakrát, tuhost vzroste také dvakrát. Pokud ale dvakrát vzroste výška, tuhost vzroste dokonce osmkrát. Pro nosník s poměrem stran 1:2 je poměr tuhostí při poloze naplacato a nastojato roven 1:4.
- Pro nosník čtvercového průřezu ($a = b$) roste tuhost se čtvrtou mocninou rozměrů. Obsah (a tedy i hmotnost) roste s druhou mocninou. Uvažujme tři nosníky. První má čtvercový průřez. Druhý také, ale průřez má dvojnásobný obsah. (Strana je tedy $\sqrt{2}$-krát delší.) Třetí nosník bude krabicový nosník. Bude mít vnější rozměry stejné jako větší nosník, ale uvnitř bude čtvercová dutina o rozměrech prvního nosníku. Tuhost prvního nosníku bude referenční, označme ji I. Tuhost druhého nosníku bude čtyřnásobná, tj. $4I$ a za toto navýšení tuhosti "platíme" použitím dvojnásobného množství materiálu. Tuhost třetího nosníku najdeme jako rozdíl prvních dvou, tj. $3I$, protože i geometricky největší nosník vznikne zasunutím prvního nosníku do dutiny ve třetím krabicovém nosníku. Nyní porovnjeme původní nosník a krabicový nosník. Oba používají stejné množství materiálu, ale tuhost krabicového nosníku je trojnásobná. To proto, že část materiálu je dál od osy symetrie průřezu. Podobně se dá zdůvodnit a výpočtem ukázat, že profil ve tvaru písmene I, známé íčko, je tužší než tyč vykovaná ze stejného množství materiálu.
- Pro čtvercový průřez roste tuhost se čtvrtou mocninou délky strany. Podobná závislost musí být u každého průřezu jednoparametrického tvaru, například pro kruh. Jako na nosník s kruhovým průřezem můžeme pohlížet i na

stromy. Například strom, ve kterém je dutina o velikosti poloviny průměru kmene většinou vyvolá obavy ze stability. I když taková dutina vypadá obrovská, tuhost se sníží o původní tuhost vynásobenou koeficientem

$$(0.5)^4 = 0.0625 \approx 6\%.$$

Vidíme, že i s hrozivě vypadající dutinou má kmen pořád tuhost 94% původní tuhosti (za předpokladu dutiny uprostřed kmene). Pevnost roste jenom s třetí mocninou a proto odolnost vůči zlomení neklesne tak dramaticky jako tuhost.

Tlak na svislou plochu

Vzorec pro tlakovou sílu $F = pS$ není možné použít například pro výpočet celkové síly působící na svislou hráz, protože tlak p se mění s hloubkou a není tedy konstantní na celém průřezu o obsahu S. Ukážeme, jak tuto nesnáz překonat.

Uvažujme svislou rovinnou hráz M. Hrází je přitom myšlena rovinná množina s jednotkovou plošnou hustotou, ne postavený trojrozměrný objekt. Počátek kartézské soustavy souřadnic volíme u hladiny, osa y směřuje dolů, osa x vodorovně. Tlak v hloubce y je roven $p = y\rho g$, kde ρ je hustota vody a g tíhové zrychlení. Na plochu o rozměrech ΔS v hloubce y působí tlaková síla

$$\Delta F = y\rho g \Delta S.$$

Tato tlaková síla má ve všech bodech hráze stejný směr a celkovou sílu na hráz je možno zjistit sečtením sil v jednotlivých bodech. Podobná myšlenková úvaha jako v úvodu pro hmotnost desky, nebo přesný matematický popis, nás dovedou k tomu, že celková síla na hráz je dána integrálem

$$F = \iint_M y\rho g \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Protože g a ρ jsou konstanty, je možno psát

$$F = \rho g \iint_M y \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Využijeme-li vzorec pro y-ovou souřadnici těžiště, má výsledný vztah tvar

$$F = \rho g y_0 S,$$

kde S je obsah hráze. Formálně tento vztah odpovídá vzorci

$$F = p_0 S, \tag{H1}$$

kde $p_0 = \rho g y_0$ je tlak v těžišti. *Proto v praxi stačí znát těžiště hráze a pro výpočet síly na hráz použít celkovou plochu hráze a tlak v těžišti.* Protože jsme pracovali s obecnou množinou M, není tento poznatek nijak vázán na konkrétní tvar hráze. Musí být však splněna podmínka, že všechny body hráze leží v jedné rovině.

V předchozím textu jsme proměnnou veličinu popisující tlak na hráz jako funkci hloubky nahradili konstantní veličinou, udávající tlak v těžišti. Výsledný účinek na hráz se nezměnil. To je přesně smysl střední hodnoty. V matematických pojmech je možno říci, že střední hodnota tlaku na svislou hráz je rovna tlaku v těžišti hráze. (Protože hrází myslíme spíše rovinnou plochu, tak by přesnější terminologie měla používat raději pojem geometrický střed. Budeme se však držet ustálené terminologie.)

Nikde ve výpočtu jsme nepoužili konkrétní meze pro integraci. Výsledek tedy platí nejenom pro hráz dosahující k hladině, ale například i pro poklop výpusti, který je celý pod vodou.

Působiště tlakové síly

Budeme pokračovat v předchozím příkladě a hledat působiště výsledné tlakové síly.

Tlaková síla působící na svislou hráz má celkový nulový moment vzhledem k ose procházející působištěm. Je-li hráz definována množinou M a je-li y_c působiště výsledné tlakové síly, je v hloubce y tlak na plošku o velikosti ΔS roven $y\rho g\Delta S$ a součin $(y_c - y)y\rho g\Delta S$ je příspěvek k otáčivému momentu vzhledem k ose, procházející vodorovně působištěm tlakové síly. Součet všech těchto příspěvků se nuluje, tedy musí platit

$$\iint_M (y_c - y)y\rho g \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0.$$

Odsud po vydělení konstantami ρg dostáváme

$$\iint_M (y_c - y)y \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0$$

a po roznásobení závorky, rozdělení integrálu na dva a vytknutí konstanty

$$y_c \iint_M y \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_M y^2 \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Nyní již snadno dostaneme výsledný vztah

$$y_c = \frac{\iint_M y^2 \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\iint_M y \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y}. \tag{H2}$$

Pokud je množina M obdélník, je možné ji (po vhodné změně jednotek) brát jako jednotkový čtverec. Protože platí

$$\iint_{[0,1]\times[0,1]} y \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{1}{2}, \quad \iint_{[0,1]\times[0,1]} y^2 \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{1}{3},$$

dostáváme $y_c = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$ a působiště na obdélníkovou hráz je v hloubce odpovídající dvěma třetinám celkové hloubky.

Formálně vztah pro y_c odpovídá vztahu pro těžiště množiny s plošnou hustotou y. Na tomto pozorování a na skutečnosti, že u pravidelných množin umíme těžiště najít geometricky, je založena metoda nalezení působiště tlakové síly pomocí zatěžovacího obrazce.

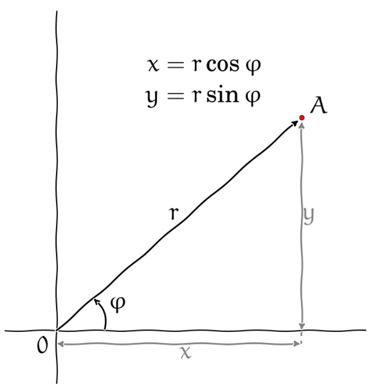
Dvojný integrál v polárních souřadnicích

https://youtu.be/lEObYHpX72w

Polární souřadnice

Dosud jsme používali pouze kartézské souřadnice: dvojici čísel udávající vzdálenost bodu od osy y a od osy x, která jednoznačně určuje polohu bodu v rovině. V praxi je někdy výhodnější použít i jiný způsob jak pomocí dvojice čísel charakterizovat polohu bodu v rovině - takové souřadnice potom nazýváme **křivočaré** souřadnice.

Z křivočarých souřadnic jsou nejdůležitější **polární souřadnice**. Při jejich použití polohu bodu A zadáváme tak, že určíme vzdálenost r bodu od počátku soustavy souřadnic O a úhel φ, který svírá spojnice bodů O a A s kladnou částí osy x.

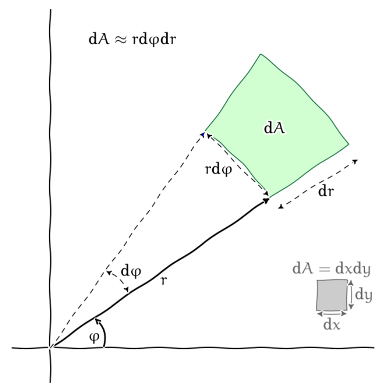


Obrázek 5: *Polární souřadnice.*

Množiny s jednoduchým vyjádřením v polárních souřadnicích

Nejsnáze se při výpočtu dvojného integrálu pracuje s obdélníkovými množinami, tj. s množinami charakterizovanými nerovnostmi pro jednotlivé proměnné a konstantním omezením pro tyto proměnné. Analogicky se bude snadno pracovat v polárních souřadnicích s množinami, které by se staly obdélníky pro překreslení do souřadné soustavy r a φ. Takové množiny jsou zobrazeny na následujících obrázcích.

Převod dvojného integrálu do polárních souřadnic



Obrázek 6: *Element plochy v polárních souřadnicích*

Chceme-li převést dvojný integrál do polárních souřadnic, provádíme v něm vlastně substituci $x = r\cos\varphi$ a $y = r\sin\varphi$. Přitom se transformují i diferenciály $\mathrm{d}x$ a $\mathrm{d}y$. Při změně úhlu o $\mathrm{d}\varphi$ a změně vzdálenosti o $\mathrm{d}r$ má odpovídající část roviny rozměry $\mathrm{d}r$ a $r\mathrm{d}\varphi$ a její obsah je $r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}r$ (viz obrázek). Platí tedy, že obsah elementární oblasti $\mathrm{d}A = \mathrm{d}x\mathrm{d}y$ se transformuje na $\mathrm{d}A = r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}r$. Podíl $\dfrac{\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}r}{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}$ udává, kolikrát se změní obsah elementární oblasti při změně souřadnic a nazývá se **jakobián**. V případě polárních souřadnic je jakobián jak vidíme roven r a platí tedy

$$\iint_\Omega f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_\Omega f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}r.$$

V diferenciálním počtu polární souřadnice používáme především tam, kde má problém radiální symetrii. Například při studiu ochlazování nebo kmitů kruhových desek či válcovitých součástek. V integrálním počtu tyto souřadnice použijeme zejména v případě, kdy integrujeme přes kružnici nebo její část (např. mezikruží či kruhová výseč). V takovém případě mají totiž integrály které vzniknou po transformaci dvojného integrálu na dvojnásobný pevné meze a výpočet druhého integrálu je zpravidla jednodušší.

Z ptačí perspektivy

- Dvojný integrál využijeme tam, kde nás zajímá celková hodnota aditivní veličiny, jejíž příspěvky jsou rozloženy ve dvourozměrné ploše. Například celková tlaková síla na stěnu akvária.
- Dvojný integrál počítáme jako integrál z integrálu aparátem integrálního počtu funkcí jedné proměnné. V řadě případů se však problém dá zjednodušit. Například při integrování funkcí se separovanými proměnnými přes obdélníkové množiny se integrál dá zapsat jako součin integrálů. Podobně, při integrování přes množiny které jsou částmi kruhu se dá v mnoha případech integrál přepsat pomocí polárních souřadnic na integrál přes obdélník (v polárních souřadnicích).