Aplikovaná matematika

21. ledna 2019

Faculty of Forestry and Wood Technology

Obsah

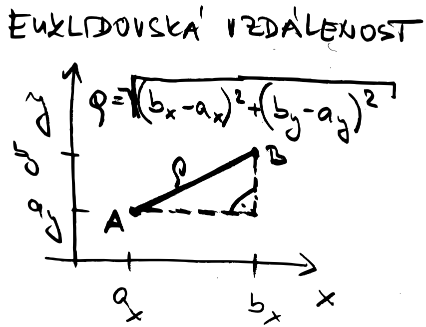
1 Diferenciální počet **4**
1.1 Euklidovský metrický prostor . . . 5
1.2 Zobrazení mezi prostory vyšších dimenzí . . . 8
1.3 Derivace a parciální derivace . . . 9
1.4 Lineární aproximace funkce . . . 16
1.5 Zákon šíření chyb – chyba nepřímo měřené veličiny . . . 18
1.6 Funkce zadaná implicitně . . . 19
1.7 Lokální extrémy funkce více proměnných . . . 21
1.8 Příklad: skalární a vektorový popis gravitačního pole . . . 22
1.9 Divergence . . . 25
1.10 Rotace . . . 26
1.11 Laplaceův operátor . . . 28
1.12 Shrnutí vzorců a postupů . . . 29

2 Integrální počet **30**
2.1 Určitý integrál (opakování) . . . 31
2.2 Lineární a kvadratický moment . . . 33
2.3 Křivkový integrál prvního druhu . . . 34
2.4 Křivkový integrál druhého druhu . . . 36
2.5 Dvojný integrál . . . 38
2.6 Dvojný integrál v polárních souřadnicích . . . 42
2.7 Integrální věty . . . 44
2.8 Trojný integrál . . . 49
2.9 Společné poznámky . . . 50

3 Obyčejné diferenciální rovnice **51**
3.1 Úvod a numerické řešení obyčejných diferenciálních rovnic prvního řádu . . . 52
3.2 Diferenciální rovnice se separovatelnými proměnnými . . . 54
3.3 Lineární operátory . . . 56
3.4 Lineární diferenciální rovnice prvního řádu . . . 59
3.5 Homogenní LDR . . . 61
3.6 Nehomogenní LDR – metoda integračního faktoru . . . 62
3.7 Lineární diferenciální rovnice druhého řádu . . . 63
3.8 Homogenní LDR 2. řádu . . . 65
3.9 Homogenní LDR 2. řádu s konstantními koeficienty . . . 67
3.10 Nehomogenní LDR 2. řádu . . . 69
3.11 Aplikace diferenciálních rovnic . . . 70

4 Rovnice matematické fyziky **71**
4.1 Rovnice kontinuity . . . 72
4.2 Difuzní rovnice (vedení tepla) . . . 74
4.3 Vlnová rovnice . . . 75
4.4 Fourierova metoda (separace proměnných) I . . . 78
4.5 Okrajová úloha, vlastní čísla . . . 79
4.6 Fourierův rozvoj periodické funkce . . . 81
4.7 Transformace do křivočarých souřadnic, sféricky symetrické rovnice . . . 83

1 Diferenciální počet



Obrázek 1: Euklidovská vzdálenost v rovině

1.1 Euklidovský metrický prostor

Definice 1.1 (metrický prostor, metrika)**.** Množina $\mathbb{E}^3$ prvků z $\mathbb{R}^3$ s metrikou ρ definovanou pro $A = (a_x, a_y, a_z) \in \mathbb{R}^3$ a $B = (b_x, b_y, b_z) \in \mathbb{R}^3$ vztahem

$$\rho(A, B) = \sqrt{(a_x - b_x)^2 + (a_y - b_y)^2 + (a_z - b_z)^2} \tag{1.1}$$

se nazývá *Euklidovský metrický prostor*. Prvky prostoru E^3 budeme nazývat *body*. Funkce ρ se nazývá *Euklidovská metrika*. Číslo $\rho(A, B)$ se nazývá *Euklidovská vzdálenost* bodů A, B.

Podobně definujeme dvourozměrný Euklidovský prostor a Euklidovskou vzdálenost mezi body A, B v rovině, pouze vynecháme třetí souřadnici. Zobecnění na n-rozměrný je taktéž okamžité.

Definice 1.2 (okolí, ryzí okolí)**.** Buď $A \in \mathbb{E}^n$ bod z $\mathbb{E}^n$ a $\varepsilon > 0$ kladné reálné číslo. *Epsilonovým okolím bodu* X rozumíme množinu označenou $O_\varepsilon(A)$ skládající se z bodů, jejichž vzdálenost od bodu A je menší než ε, tj.

$$O_\varepsilon(A) = \{X \in \mathbb{E}^n : \rho(A, X) < \varepsilon\}.$$

Ryzím epsilonovým okolím bodu A rozumíme množinu $\overline{O}_\varepsilon(A)$ definovanou

$$\overline{O}_\varepsilon(A) = O_\varepsilon(A) \setminus \{A\},$$

tj. ε-okolí bodu A, s vyloučením bodu A.

V následujících definicích je $X \in \mathbb{E}^n$ bod a $M \subseteq \mathbb{E}^n$ podmnožina v Euklidovském prostoru $\mathbb{E}^n$ ($n = 2$ nebo 3).

Definice 1.3 (ohraničená množina)**.** Množina M se nazývá *ohraničená*, jestliže leží v (dostatečně velkém) okolí nějakého bodu $Y \in \mathbb{E}^n$.

Definice 1.4 (vnitřní bod, vnitřek, otevřená množina)**.** Bod X se nazývá *vnitřním bodem množiny* M, jestliže $X \in M$ a existuje nějaké okolí $O(X)$ bodu X ležící celé v množině M, tj. $O(X) \subseteq M$. Množina všech vnitřních bodů množiny M se nazývá *vnitřek množiny* M a označuje M^o. Je-li množina M totožná se svým vnitřkem, tj. je-li každý bod množiny M vnitřní, říkáme, že množina M je *otevřená*.

Definice 1.5 (hraniční bod, hranice)**.** Bod X se nazývá *hraničním bodem množiny* M, jestliže každé okolí bodu X obsahuje alespoň jeden bod ležící v množině M a současně alespoň jeden bod neležící v množině M. Množina všech hraničních bodů množiny M se nazývá *hranice množiny* M a označuje ∂M.

Definice 1.6 (uzávěr, uzavřená množina). *Uzávěrem množiny* M rozumíme množinu $\overline{M}$ definovanou jako sjednocení vnitřku a hranice množiny M, tj. $\overline{M} = M^o \cup \partial M$. Je-li množina totožná se svým uzávěrem (tj. obsahuje-li všechny své hraniční body), nazývá se *uzavřená*.

Definice 1.7 (souvislá množina). Množina M se nazývá souvislá, jestliže každé dva body, ležící v množině M lze spojit lomenou čarou, ležící v M.

Definice 1.8 (oblast, uzavřená oblast, kompaktní množina). Otevřená souvislá množina se nazývá *oblast*. Uzavřená souvislá množina se nazývá *uzavřená oblast*. Uzavřená ohraničená množina se nazývá *kompaktní*.

1.2 Zobrazení mezi prostory vyšších dimenzí

Narozdíl od základního kurzu matematiky budeme studovat bohatější škálu zobrazení, než pouze zobrazení z $\mathbb{R}$ do $\mathbb{R}$.

- **Funkce jedné proměnné,** $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ např. $y = \sin x$

  vizualizace: graf ve 2D (obvykle křivka)

- **Funkce dvou proměnných,** $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ např. $z = x^2 + y^2$, skalární pole

  vizualizace: graf ve 3D (obvykle plocha), vrstevnice ve 2D, obarvená rovina

- **Vektorová funkce dvou proměnných,** $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ např. $\vec{F}(x, y) = (-y, x)$, vektorové pole

  vizualizace: vektorové pole (systém vektorů v rovině)

- **Parametricky zadané křivky** $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ např. $x = \cos(t), y = \sin(t)$, $t \in [0, \pi]$

  vizualizace: rovinná křivka

- Podobně skalární a vektorové pole v prostoru ($\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$), křivky v prostoru ($\mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$).

1.2.1 Spojitost funkce

Definice 1.9 (spojitost skalární funkce)**.** Nechť $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je skalární funkce n proměnných definovaná v nějakém okolí bodu $A \in \mathbb{R}^n$. Řekneme, že funkce f je v bodě A spojitá, pokud pro každé okolí $O(f(A))$ bodu $f(A)$ existuje okolí $\overline{O}(A)$ bodu A takové, že obrazy všech bodů z tohoto okolí bodu A leží v okolí bodu $O(f(A))$, tj. pro všechna $X \in \overline{O}(A)$ platí $f(X) \in O(f(A))$.

Definice 1.10 (spojitost vektorové funkce)**.** Nechť $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ je vektorová funkce n proměnných definovaná v nějakém okolí bodu $A \in \mathbb{R}^n$. Řekneme, že funkce f je v bodě A spojitá, jestliže je v tomto bodě spojitá každá její komponenta.

Všechny elementární funkce[1] jsou spojité v každém vnitřním bodě svého definičního oboru.

[1] http://cs.wikipedia.org/wiki/Elementární_funkce

1.3 Derivace a parciální derivace

Na funkci $y = f(x)$ uvažujme bod $[x, f(x)]$. Pokud se hodnota x změní na $x + \Delta x$, hodnota y se změní na $f(x + \Delta x)$ a změna veličiny y je $f(x+\Delta x) - f(x)$. Pokud vypočteme podíl $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$, nalezneme průměrnou rychlost růstu funkce f na intervalu mezi x a Δx, pokud použijeme limitní přechod $\Delta x \to 0$, dostaneme okamžitou rychlost růstu funkce f v bodě x, tj. derivaci.

Definice 1.11 (derivace funkce v bodě)**.** Nechť $x \in D(f)$. Řekneme, že funkce f má *v bodě x derivaci* rovnu číslu označenému $f'(x)$, jestliže existuje konečná limita

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}. \tag{1.2}$$

Protože derivace vznikne z podílu $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ limitním přechodem, označujeme ji také $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ nebo $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}y$.

U funkce více proměnných postupujeme podobně, všímáme si pouze jak se funkce mění při změnách jedné z proměnných (ostatní proměnné se nemění).

Definice 1.12 (parciální derivace)**.** Nechť $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ je funkce dvou proměnných. Jestliže existuje konečná limita

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x,y) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x},$$

nazývá se tato limita *parciální derivace funkce $f(x,y)$ podle proměnné x v bodě (x,y).* Řekneme, že funkce má *na otevřené množině M parciální derivaci podle x*, jestliže má v každém bodě množiny M parciální derivaci podle x. Předpisem, který každému bodu takovéto množiny M přiřadí hodnotu parciální derivace podle x v tomto bodě je definována funkce nazývaná *parciální derivace podle x*. Podobně definujeme parciální derivaci podle y pomocí limity

$$\frac{\partial}{\partial y} f(x,y) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x,y)}{\Delta y}.$$

Opětovným derivováním těchto funkcí dostáváme druhé a vyšší derivace (podobně jako v jednorozměrném případě).

Poznámka 1.1. Parciální derivace podle x je derivace křivky, která vznikne na řezu grafu funkce rovinou $y =$ konst. Parciální derivace podle y je derivace křivky, která vznikne na řezu grafu funkce rovinou $x =$ konst, viz obr. 2.

Poznámka 1.2. Derivaci funkce $z = f(x, y)$ podle x označujeme též f'_x, f_x, z'_x, z_x, $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial x}$. Podobně pro derivaci podle y. Druhé derivace označujeme z''_{xx}, f''_{yy}, z''_{xy}, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ a podobně.

Definice 1.13 (hladké funkce). Buď M otevřená množina. Řekneme, že funkce f je *hladká* na M, jestliže má na množině M spojité všechny parciální derivace prvního řádu. Řekneme, že funkce f je na M *hladká řádu* k, jestliže má na množině M spojité všechny parciální derivace do řádu k včetně. Množinu spojitých funkcí na M označujeme $C(M)$, množinu hladkých funkcí $C^1(M)$, množinu hladkých funkcí řádu k označujeme $C^k(M)$.

Poznámka 1.3. Parciální derivace $\frac{\partial f}{\partial x}$ je rychlost změny funkce $f(x, y)$ při změnách veličiny x. Pokud se veličina x změní o Δx, funkční hodnota se změní o přibližně $\frac{\partial f}{\partial x}\Delta x$. Pokud je veličina x známa s chybou Δx, veličina f je vypočítána s chybou $\left|\frac{\partial f}{\partial x}\Delta x\right|$. Jednotkou derivace $\frac{\partial f}{\partial x}$ je jednotka veličiny f dělená jednotkou veličiny x. Analogická tvrzení platí pro veličinu y.

Věta 1.1 (derivace složené funkce). *Buď $f(x, y)$ vnější složka a $x = x(u, v)$ a $y = y(u, v)$ vnitřní složky složené funkce $f(x(u, v), y(u, v))$. Za předpokladu hladkosti uvedených funkcí na otevřených množinách na kterých pracujeme platí*

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}. \tag{1.3}$$

Analogická věta platí i pro jiný počet proměnných ve vnější složce nebo vnitřních složkách. Vnější funkci derivujeme podle každé z vnitřních složek, tyto derivace násobíme derivacemi vnitřních složek a všechny takto obdržené součiny sčítáme. Přitom, pokud se někde vyskytuje funkce jedné proměnné, přechází parciální derivace v derivaci obyčejnou. Například je-li funkce $f(x, y, z)$ funkce tří proměnných x, y,z a každá z těchto proměnných je funkcí proměnné

t, platí pro derivaci složené funkce $f(x(t), y(t), z(t))$ vztah

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}. \tag{1.4}$$

Předchozí rovnost je možno zapsat ve tvaru skalárního součinu

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = \nabla f \cdot \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}, \tag{1.5}$$

kde $\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)$ je *gradient funkce* f a $\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} = \left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right)$ je derivace vektorové funkce $\vec{r}(t) = \Big(x(t), y(t), z(t)\Big)$. Platí, že směr $\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}$ je tečný[2] k trajektorii $\vec{r}(t)$.

Pokud se pohybujeme po vrstevnici, je f konstantní a v (1.5) platí $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = 0$. V tomto případě je tedy skalární součin vektorů $\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}$ a ∇f roven nule. Z nulovosti skalárního součinu a z toho, že vektor $\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}$ je při pohybu po vrstevnici tečný k této vrstevnici plyne, že vektor ∇f je *kolmý k vrstevnicím*. Tento vektor směřuje k vyšším funkčním hodnotám (viz 3).

Formálně je ∇f možno chápat jako součin vektoru $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$ a skalární funkce f.

Výraz

$$\mathrm{d}f = \nabla f \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial f}{\partial z}\mathrm{d}z \tag{1.6}$$

nazýváme *totální diferenciál* funkce f. Naopak, funkce f se nazývá *kmenová funkce* tohoto totálního diferenciálu. Je-li dána funkce $f(x, y, z)$, výpočtem tří derivací můžeme snadno vypočítat její totální diferenciál. Naopak, je-li dán výraz tvaru

$$P(x, y, z)\mathrm{d}x + Q(x, y, z)\mathrm{d}y + R(x, y, z)\mathrm{d}z,$$

může ale nemusí existovat kmenová funkce tohoto totálního diferenciálu.

[2]Fyzikálně se totiž jedná o vektor rychlosti tělesa, které se pohybuje v čase t po trajektorii $\vec{r}(t)$.

Věta 1.2 (Schwarzova věta). *Jsou-li smíšené parciální derivace definované a spojité na otevřené množině M, pak na M platí* $\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x}$.

Následující věta udává nutnou a postačující podmínku pro existenci kmenové funkce totálního diferenciálu pro funkce dvou proměnných. Analogickou podmínku pro funkce tří proměnných si uvedeme později.

Věta 1.3 (charakterizace totálního diferenciálu). *Nechť funkce $P(x,y)$ a $Q(x,y)$ mají spojité parciální derivace na otevřené souvislé množině M. Následující výroky jsou ekvivalentní.*

(i) *Vektorové pole*

$$\vec{F}(x,y) = (P(x,y), Q(x,y))$$

je gradientem nějaké skalární funkce $f(x,y)$.

(ii) *Výraz*

$$P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y$$

je totálním diferenciálem nějaké funkce na množině M.

(iii) *Platí*

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}.$$

Některé funkce dvou proměnných je možno zapsat jako součin dvou funkcí jedné proměnné, například $\varphi(x,y) = \sin(x^2+1)\dfrac{\ln y}{y}$. U některých funkcí toto možné není, například funkce $\varphi(x,y) = x^2 - y^2$. Pomocí parciálních derivací je možno podat jednoduchou charakterizaci všech funkcí, majících výše uvedenou vlastnost.

Věta 1.4. *Nechť funkce dvou proměnných $\varphi(x,y)$ je nenulová na konvexní oblasti G a má zde spojité všechny parciální derivace do řádu dva, včetně. Funkci $\varphi(x,y)$ je možno zapsat ve tvaru $\varphi(x,y) = f(x)g(y)$, kde f a g jsou vhodné funkce jedné proměnné právě tehdy, když je na množině G nulový výraz*

$$\varphi(x,y)\frac{\partial^2\varphi(x,y)}{\partial y\partial x} - \frac{\partial\varphi(x,y)}{\partial x}\frac{\partial\varphi(x,y)}{\partial y}.$$

Důkaz. Naznačíme část důkazu. Pokud platí $\varphi(x,y) = f(x)g(y)$, je $\ln\varphi(x,y) = \ln(f(x)) + \ln(g(y))$. Derivací podle x dostáváme

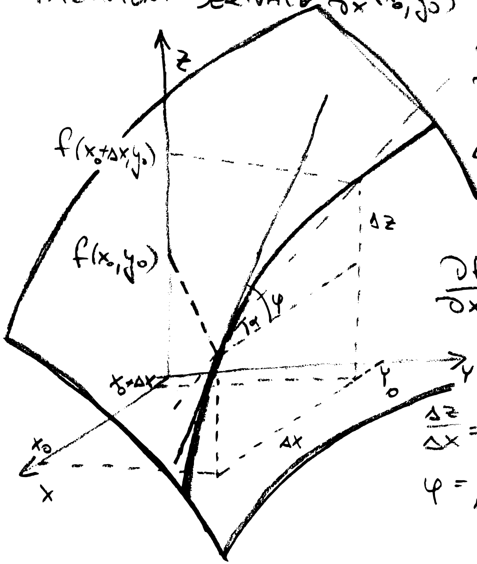
$$\frac{\frac{\partial}{\partial x}\varphi(x,y)}{\varphi(x,y)} = \frac{f'(x)}{f(x)}.$$

Protože pravá strana nezávisí na y, dostáváme derivováním podle y

$$\frac{\left(\frac{\partial^2\varphi(x,y)}{\partial y\partial x}\right)\varphi(x,y) - \left(\frac{\partial\varphi(x,y)}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\varphi(x,y)}{\partial y}\right)}{\varphi^2(x,y)} = 0.$$

Výraz v čitateli je uveden v tvrzení věty. □

PARCIÁLNÍ DERIVACE $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$



$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta x}$$

$$\Delta z = f(x_0+\Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)$$

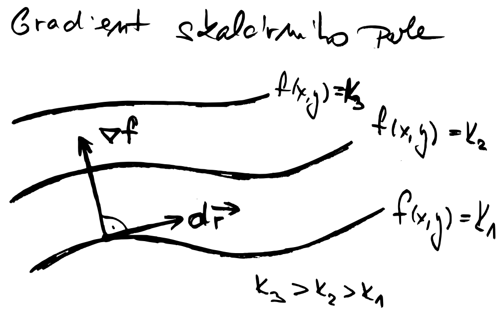
$$\Downarrow$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x_0}$$

$$\frac{\Delta z}{\Delta x} = \alpha$$

$$\varphi = \lim_{\Delta x \to 0} \alpha = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$$

Obrázek 2: Parciální derivace $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$



Obrázek 3: Gradient skalární funkce dvou proměnných

1.4 Lineární aproximace funkce

Protože pro funkci jedné proměnné platí $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$, je možno psát přibližný vzorec $f'(x) \approx \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$, tj.

$$\Delta y \approx f'(x)\Delta x. \tag{1.7}$$

Takto přibližně vyjádřený přírůstek funkce $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ je možno použít k lineární aproximaci funkce

$$f(x + \Delta x) = f(x) + \Delta y \approx f(x) + f'(x)\Delta x.$$

Po přeznačení je možno tento vztah zapsat ve tvaru

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

U funkcí více proměnných postupujeme obdobě. Ve vztahu (1.6) nahradíme $\mathrm{d}f$ změnou Δf a $\mathrm{d}\vec{r}$ změnou $\Delta\vec{r} = (\Delta x, \Delta y, \Delta z)$. Přibližný vzorec má potom tvar

$$f(x, y, z) \approx f(x_0, y_0, z_0) + \nabla f(x_0, y_0, z_0) \cdot (x - x_0, y - y_0, z - z_0).$$

Tyto úvahy je nutno provádět za předpokladu dostatečné hladkosti funkce f. Přesně jsou uvedeny v následující větě (zformulované pro jednoduchost pro funkce dvou proměnných).

Věta 1.5 (dostatečná podmínka spojitosti, lineární aproximace funkce pomocí parciálních derivací). *Nechť funkce f má definované a spojité parciální derivace v okolí bodu (x_0, y_0). Potom platí následující.*

- *Funkce f je v bodě (x_0, y_0) spojitá.*
- *Rovina o rovnici*

$$z = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)$$

  je tečná rovina ke grafu funkce f v bodě $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$
- *Platí přibližný vzorec*

$$f(x, y) \approx f(x_0, y_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}(y - y_0).$$

  V tomto vzorci je přesnost tím větší, čím

  – *je menší vzdálenost bodů (x, y) a (x_0, y_0),*
  – *jsou menší druhé derivace funkce f (pokud existují).*

1.5 Zákon šíření chyb – chyba nepřímo měřené veličiny

V praxi často měříme nepřímo veličinu f tak, že měříme veličiny x_1, x_2, ..., x_n a hodnotu veličiny f určíme pomocí vzorce $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Měření každé z veličin je zatíženo chybou. Je-li chyba veličiny x_i rovna Δx_i, způsobí tato odchylka to, že chyba veličiny f bude (v souladu s (1.7)) přibližně

$$\Delta f \approx \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \Delta x_i \right|.$$

Celkovou chybu veličiny f můžeme určit sečtením chyb způsobených jednotlivými veličinami x_i. Častěji se však používá následující vzorec

$$\Delta f(x_1, x_2, \dots x_n) \approx \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\Delta x_1\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\Delta x_2\right)^2 + \cdots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\Delta x_n\right)^2}$$

označovaný *zákon šíření chyb*.

1.6 Funkce zadaná implicitně

Uvažujme funkci $f(x,y)$ dvou proměnných, splňující v nějakém bodě (x_0,y_0) podmínku $f(x_0,y_0)=0$ a mající v okolí bodu (x_0,y_0) spojité parciální derivace.

- Rovnice $f(x,y)=0$ vrstevnice na úrovni 0 popisuje křivku procházející bodem (x_0,y_0).
- Dosadíme-li $z=0$ v rovnici tečné roviny ke grafu funkce v bodě $(x_0,y_0,f(x_0,y_0)=0)$, obdržíme rovnici přímky v rovině $z=0$ (tj. v rovině obsahující osy x a y)

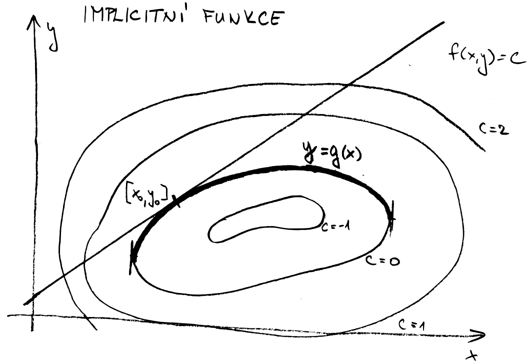
  $$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0)+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0)=0, \tag{1.8}$$

  která je tečnou k uvažované vrstevnici. Provedeme-li totéž s funkcí jedné proměnné $y=g(x)$ přepsanou do implicitního tvaru $y-g(x)=0$, dostáváme

  $$-g'(x_0)(x-x_0)+(y-y_0)=0.$$

  To je vhodné pro porovnání s (1.8).
- Platí-li $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\neq 0$ (tj. není-li tečna (1.8) svislá přímka bez směrnice), je rovnicí $f(x,y)=0$ v okolí bodu (x_0,y_0) implicitně určena *právě jedna spojitá funkce* $y=g(x)$ (tj. vrstevnice je v okolí bodu (x_0,y_0) grafem nějaké spojité funkce g).
- Funkce g z předchozího bodu má v x_0 derivaci, která je rovna je směrnici tečny (1.8), tj. platí

  $$g'(x_0)=-\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)}{\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)}$$



Obrázek 4: Funkce zadaná v okolí bodu (x_0, y_0) implicitně rovnicí $f(x, y) = 0$

1.7 Lokální extrémy funkce více proměnných

Podobně jako pro funkce jedné proměnné definujeme i pro funkce více proměnných *lokální extrémy* následovně: funkce má v daném bodě *lokální minimum*, pokud v nějakém okolí tohoto bodu neexistuje bod s menší funkční hodnotou a podobně, funkce má v bodě *lokální maximum*, pokud v okolí tohoto bodu neexistuje bod s vyšší funkční hodnotou. Z popisu gradientu je zřejmé, že v bodě lokálního extrému funkce nemůže mít gradient, který směřuje nějakým směrem. Musí se tedy jednat o nulový vektor, nebo některá z komponent gradientu nesmí existovat. Platí dokonce následující o něco silnější tvrzení.

Věta 1.6 (Fermatova)**.** *Jestliže funkce více proměnných f má v nějakém bodě svůj lokální extrém, pak každá parciální derivace, která v tomto bodě existuje, je nulová.*

1.8 Příklad: skalární a vektorový popis gravitačního pole

Gravitační pole se projevuje přitahováním hmotných objektů. V daném místě pole je pro všechna tělesa o hmotnosti m konstantní poměr $\dfrac{\vec{F}}{m}$, (zde $\vec{F}$ je gravitační síla). Tento podíl nazýváme intenzitou gravitačního pole[3] $\vec{K}$ a jedná se tedy o sílu působící na těleso o jednotkové hmotnosti.

V gravitačním poli je možné zavést potenciální energii tělesa. Podíl potenciální energie tělesa a hmotnosti je opět konstantní pro dané místo pole a nazývá se potenciál[4] gravitačního pole. Pro přemístění tělesa do místa s vyšším potenciálem je nutno vykonat práci. Pro těleso o jednotkové hmotnosti je velikost této práce rovna rozdílu potenciálů. Podobně, pokud těleso o jednotkové hmotnosti spadne z potenciálové hladiny $100\,\mathrm{J}$ na hladinu $45\,\mathrm{J}$, uvolní se při dopadu energie $75\,\mathrm{J}$. Pokud nejde o dopad na pevnou podložku, dojde například k tomu, že těleso nabere rychlost a jeho kinetická energie $\left(E_k = \dfrac{1}{2}mv^2\right)$ je rovna $75\,\mathrm{J}$.

Plochy, kde je potenciál konstantní se nazývají ekvipotenciální plochy. V rovině, pokud je potenciál funkcí dvou proměnných, odpovídají ekvipotenciální plochy vrstevnicím potenciálu.

- Práce vykonaná při přemístění tělesa v gravitačním poli nezávisí na cestě mezi těmito body, ale pouze na počáteční a koncové poloze.

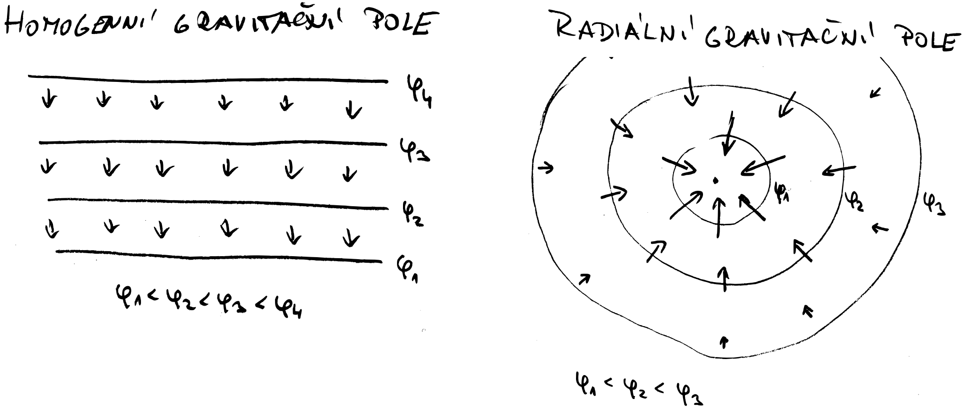
- Intenzita gravitačního pole je záporně vzatým gradientem potenciálu gravitačního pole

$$\vec{K} = -\nabla\varphi.$$

  Je kolmá k ekvipotenciálním plochám a směřuje do míst s nižším potenciálem.

---

[3] http://cs.wikipedia.org/wiki/Intenzita_gravitačního_pole
[4] http://cs.wikipedia.org/wiki/Gravitační_potenciál

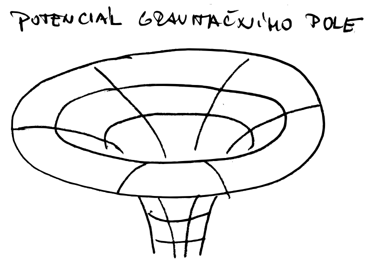


Obrázek 5: Homogenní a radiální gravitační pole.

1.8.1 Homogenní gravitační pole

Homogenní gravitační pole je pole, ve kterém intenzita je konstantní směřuje svisle dolů. Ekvipotenciální plochy jsou vodorovné plochy ve 3D resp. vodorovné přímky ve 2D. Takové pole se nachází například v malých výškách nad zemí, jeho intenzitu označujeme $\vec{g}$ (tíhové zrychlení[5]). Volíme-li nulovou hladinu potenciálu na ose x, je potenciál dán vztahem $\varphi = gy$. Hmotné objekty „padají" do míst s nižším potenciálem, pokud jim v tom nezabrání jiná síla. Například knihy nespadnou, pokud leží na poličce.

[5] `http://cs.wikipedia.org/wiki/Tíhové_zrychlení`



Obrázek 6: Gravitační potenciál v okolí hmotného bodu v rovině jako funkce dvou proměnných

1.8.2 Radiální gravitační pole

Radiální gravitační pole je pole, ve kterém intenzita směřuje do středu a její velikost je nepřímo úměrná kvadrátu vzdálenosti od středu. Ekvipotenciální plochy jsou soustředné kulové plochy ve 3D resp. kružnice ve 2D. Takové pole se nachází například v okolí hmotných bodů nebo kulovitých objektů. Volíme-li nulovou hladinu potenciálu v nekonečnu, je potenciál dán vztahem $\varphi = -\frac{\kappa M}{r}$, kde M je hmotnost tělesa jehož pole studujeme, κ je gravitační konstanta a $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ je vzdálenost od středu. Hmotné objekty „padají“ do míst s nižším potenciálem (tj. do středu pole), pokud jim v tom nezabrání jiná síla, například odstředivá síla pro planety obíhající kolem Slunce po (téměř) kruhových drahách.

1.9 Divergence

Pro vektorovou funkci dvou proměnných $\vec{F}(x,y) = \Big(P(x,y), Q(x,y)\Big) = P(x,y)\vec{i} + Q(x,y)\vec{j}$ definujeme operátor divergence vztahem

$$\operatorname{div} \vec{F}(x,y) = \frac{\partial P(x,y)}{\partial x} + \frac{\partial Q(x,y)}{\partial y}. \tag{1.9}$$

Podobně pro tři proměnné a vektorovou funkci $\vec{F}(x,y,z) = \Big(P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)\Big) = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k}$ definujeme operátor *divergence* vztahem

$$\operatorname{div} \vec{F}(x,y,z) = \frac{\partial P(x,y,z)}{\partial x} + \frac{\partial Q(x,y,z)}{\partial y} + \frac{\partial R(x,y,z)}{\partial z}. \tag{1.10}$$

Symbolicky můžeme psát pomocí skalárního součinu a operátoru nabla

$$\operatorname{div} \vec{F} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \cdot \vec{F} = \nabla \cdot \vec{F}.$$

Vektorové pole, jehož divergence je rovna nule, se nazývá *nezřídlové pole*. Vektorová pole často charakterizujeme pomocí siločar – čar, ke kterým jsou vektory vektorového pole tečné. Siločáry nezřídlového pole nikde nezačínají ani nekončí a jsou to uzavřené křivky. Tuto vlastnost má například magnetické pole.

> Wikipedia: *Ve vektorovém počtu je divergence diferenciální operátor udávající zřídlovost vektorového pole. Je-li např. zkoumaným polem gradient teploty (vektory nechť udávají např. rychlost vedení tepla), potom kladná divergence v daném bodě znamená, že v daném bodě vzniká teplo, záporná naopak, že v daném místě teplo zaniká.*

1.10 Rotace

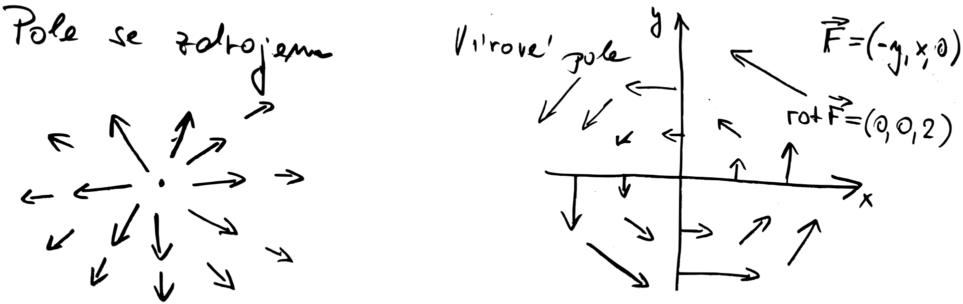
Pro vektorovou funkci tří proměnných a vektorovou funkci $\vec{F}(x,y,z) = \Bigl(P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)\Bigr) = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k}$ definujeme operátor *rotace* symbolicky vztahem

$$\operatorname{rot} \vec{F}(x,y,z) = \nabla \times \vec{F}(x,y,z) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P(x,y,z) & Q(x,y,z) & R(x,y,z) \end{vmatrix}. \tag{1.11}$$

Výsledkem je tedy vektor, jehož komponenty jsou $\operatorname{rot} \vec{F}(x,y,z) = \left(\dfrac{\partial R}{\partial y} - \dfrac{\partial Q}{\partial z}, \dfrac{\partial P}{\partial z} - \dfrac{\partial R}{\partial x}, \dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y}\right)$. Vektorové pole, jehož rotace je rovna nule[6], se nazývá *nevírové pole* a ve fyzice má důležité postavení – je v něm možno zavést potenciál a potenciální energii (Věta 2.5).

Wikipedia: *Rotace je matematický operátor definovaný pro vektorové funkce n proměnných, který v každém bodě udává lokální míru rotace (otáčení) definované tímto polem.*

[6] máme na mysli „vektorovou nulu“, tj. nulový vektor



Obrázek 7: Pole se zdrojem (nenulovou divergencí) a pole vírové (s nenulovou rotací)

1.11 Laplaceův operátor

Laplaceův operátor Δ, je definován jako divergence gradientu skalární funkce

$$\Delta f = \operatorname{div}(\nabla f). \tag{1.12}$$

V kartézských souřadnicích a trojrozměrném prostoru tedy platí

$$\Delta f = \frac{\partial^2}{(\partial x)^2} f + \frac{\partial^2}{(\partial y)^2} f + \frac{\partial^2}{(\partial z)^2} f,$$

přičemž platí následující:

- Laplaceův operátor je možno rozšířit do prostoru libovolné dimenze – vypočteme druhou derivaci podle každé z proměnných a tyto derivace sečteme.
- Laplaceův operátor je možno formálě zapsat pomocí skalárního součinu dvou operátorů ∇

$$\Delta f = \operatorname{div}(\nabla f) = \nabla \cdot (\nabla f) = (\nabla \cdot \nabla) f = \nabla^2 f.$$

- Označení symbolem Δ je stejné jako změna funkce f (viz kapitola věnovaná lineární aproximaci funkce a kapitola věnovaná zákonu šíření chyb) a je nutné tyto dva významy symbolu Δ nezaměňovat. Chceme-li se vyhnout nedorozumění, je možno pro označení Laplaceova operátoru používat ∇^2 namísto Δ.
- Laplaceův operátor vystupuje v problémech týkajících se elektrického nebo gravitačního potenciálu, difuze, nebo kmitů a šíření vln.

1.12 Shrnutí vzorců a postupů

Úloha: Najdi směr kolmý na vrstevnice funkce $f(x, y)$ v bodě (x_0, y_0).
Jak na to: $\nabla f(x_0, y_0)$

Úloha: Najdi tečnu k vrstevnici funkce $f(x, y)$ v bodě (x_0, y_0).
Jak na to: $\nabla f(x_0, y_0) \cdot (x - x_0, y - y_0) = 0$ (Přímka v rovině $z = f(x_0, y_0)$.)

Úloha: Najdi tečnu k funkci dané implicitně rovnicí $f(x, y) = 0$ v bodě (x_0, y_0).
Jak na to: Totéž co předchozí případ. Musí navíc platit $f(x_0, y_0) = 0$.

Úloha: Najdi tečnou rovinu ke grafu funkce $f(x, y)$ v bodě (x_0, y_0).
Jak na to: $z = f(x_0, y_0) + \nabla f(x_0, y_0) \cdot (x - x_0, y - y_0)$

Úloha: Najdi lineární aproximaci funkce $f(x, y)$ v okolí bodu (x_0, y_0).
Jak na to: $f(x, y) \approx f(x_0, y_0) + \nabla f(x_0, y_0) \cdot (x - x_0, y - y_0)$

Úloha: Je $M\mathrm{d}x + N\mathrm{d}y$ totální diferenciál? Existuje funkce φ taková, že $\nabla\varphi = (M, N)$?
Jak na to: Platí následujíci vztah? $\dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{\partial N}{\partial x}$

Úloha: Je možno psát funkci $\varphi(x, y)$ ve tvaru $f(x)g(y)$ pro vhodné funkce f a g?
Jak na to: Platí následujíci vztah? $\varphi\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y} - \dfrac{\partial\varphi}{\partial x}\dfrac{\partial\varphi}{\partial y} = 0$

2 Integrální počet

V následující kapitole se zaměříme na různé druhy integrálů. Protože se budeme snažit klást důraz na pochopení rozdílu mezi jednotlivými integrály, budeme se snažit výklad vést co nejméně formálně. Zejména budeme tiše předpokládat, že všechny funkce se kterými pracujeme jsou hladké[7] nebo po částech hladké[8]. U křivek budeme předpokládat, že jsou *regulární*: po částech hladké, samy sebe nikde neprotínají (s případnou výjimkou uzavřených křivek kdy splývá počáteční a koncový bod) a v jejich parametrickém vyjádření má vždy alespoň jedna funkce nenulovou derivaci. U oblastí v rovině budeme předpokládat, že jsou souvislé, neobsahují žádné otvory a jejich hranice je tvořena po částech hladkou křivkou. Tyto předpoklady je někdy možno podstatně oslabit a odpovídající teorie je podrobně zpracována v literatuře.

Společný princip všech integrálů je, že počítáme nějakou veličinu, která je aditivní.[9] V myšlenkách vždy obor přes který se integruje (interval, křivku, oblast v rovině) rozdělíme na malé kousky, v rámci těchto kousků funkci, která nás zajímá, aproximujeme konstantou a v limitním přechodu velikost dělicích kousků stáhneme k nule.

[7] hladká je funkce, která má spojitou derivaci

[8] po částech hladká funkce je funkce, kterou je možno rozdělit na konečně mnoho hladkých funkcí

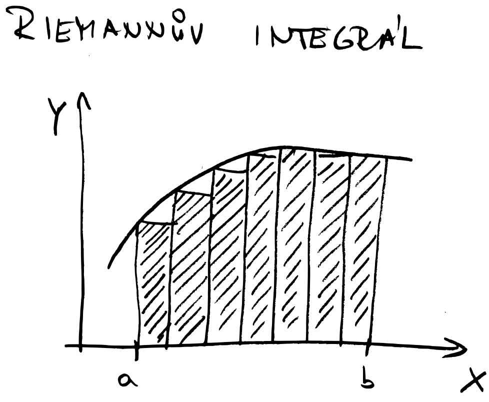
[9] Aditivní veličina je například hmotnost tělesa, protože tu je možno určit tak, že těleso rozbijeme na kousíčky, všechny kousíčky zvážíme a tyto hmotnosti sečteme.

2.1 Určitý integrál (opakování)

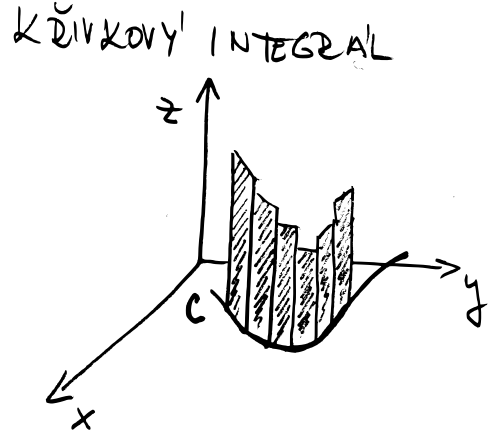
Motivace: Předpokládejme, že fyzikální veličinu s umíme vypočítat jako součin dvou veličin v a t, tj. že $s = vt$. Jako vhodný příklad poslouží dráha pohybu s, rychlost v a čas t. Vzorec $s = vt$ je možno použít pouze pro pohyb konstantní rychlostí. Pokud se rychlost v během pohybu mění, můžeme postupovat takto: časový úsek, ve kterém pohyb probíhá rozdělíme na malé časové úseky Δt, v i-tém časovém úseku Δt_i vybereme libovolnou rychlost v_i se kterou se těleso někdy během tohoto časového úseku pohybovalo a součin $s_i = v_i \Delta t_i$ je přibližně dráha, kterou těleso urazí v tomto časovém úseku. Zde se vědomě dopouštíme nějaké nepřesnosti, protože rychlost v_i není v časovém úseku Δt_i konstantní a nerovnoměrný pohyb nahrazujeme pohybem rovnoměrným. Sečtením všech s_i dostaneme aproximaci celkové dráhy. Pokud v_i v každém úseku vybereme jako minimum funkce v, dostaneme dolní odhad pro celkovou dráhu, pokud jako maximum dostaneme horní odhad. Tyto odhady budou tím přesnější, čím jemnější bude dělení časového intervalu. Pokud existuje limita všech těchto aproximací pro délku časového úseku jdoucí k nule, potom obdržíme veličinu, kterou jsme v základním kurzu matematiky nazývali Riemannův integrál. Geometricky integrál

$$\int_a^b v(t)\,\mathrm{d}t$$

vyjadřuje obsah množiny mezi nezápornou funkcí $v(t)$ a osou x na intervalu $[a, b]$.



Obrázek 8: Konstrukce Riemannova integrálu



Obrázek 9: Konstrukce křivkového integrálu prvního druhu

2.2 Lineární a kvadratický moment

Než pokročíme k dalším typům integrálu, uvedeme si další dvě užitečné aditivní veličiny, používané ve fyzice. Máme-li v rovině xy soustavu n hmotných bodů v rovině, potom výraz

$$U_y = \sum_{i=1}^{n} x_i m_i,$$

kde x_i a m_i jsou x-ová souřadnice a hmotnost i-tého bodu, nazývá lineární moment soustavy vzhledem k ose y. Podíl lineárního momentu soustavy a celkové hmotnosti je roven x-ové poloze těžiště. Podobně je možno vypočítat y-ovou souřadnici těžiště a v prostoru z-ovou souřadnici těžiště.

Analogicky, výraz

$$J_y = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 m_i,$$

se nazývá moment setrvačnosti soustavy bodů vzhledem k ose y. Tato veličina má pro rotační pohyb okolo osy y stejný význam, jako hmotnost pro pohyb translační. Přesněji: kinetická energie rotačního pohybu úhlovou rychlostí ω při rotaci okolo osy y je $\frac{1}{2}J_y\omega^2$ a otáčející se tělesa s velkým momentem setrvačnosti je obtížné uvést do rotačního pohybu nebo zastavit.

Podobný vzorec platí i v prostoru nebo vzhledem k jiným osám. V tomto případě je vždy veličina x^2 nahrazena druhou mocninou vzdálenosti od osy otáčení.

Vyvstává otázka, jak vypočítat předešlé veličiny v případě, že hmotnost není rozložena do konečného počtu bodů, ale spojitě podél křivek (např. problém nalézt těžiště a moment setrvačnosti drátěných konstrukcí), v rovině (znalost těžiště a momentu setrvačnosti průřezu nosníku je důležitá při studiu chování tohoto nosníku při zatížení) nebo v prostoru (těžiště a moment setrvačnosti tělesa). Nástroje umožňující řešit tyhle otázky si uvedeme v následujících odstavcích. Zjednodušeně řečeno, tyto nástroje nám umožní nařezat daný objekt (drátěnou konstrukci, rovinnou desku, těleso) na malé kousky a příspěvky od všech kousíčků sečíst tak, aby tímto řezáním nevznikla žádná nepřesnost.

2.3 Křivkový integrál prvního druhu

Pokud uvažujeme drát o lineární hustotě F a délce s, je hmotnost drátu rovna součinu $m = Fs$. Uvažujme drát, který není homogenní, leží podél rovinné křivky C a jeho specifická hmotnost se mění a bodě (x, y) je dána funkcí $F(x, y)$. Celkovou hmotnost můžeme odhadnout takto: myšlenkově rozdělíme drát na malé kousíčky a každém z nich odhadneme lineární hustotu konstantou. Můžeme například použít minimální hodnotu hustoty v tomto kousíčku. Vynásobením délkou každého kousíčku obdržíme jeho hmotnost a sečtením přes všechny kousky dostaneme dolní odhad pro hmotnost drátu. Tento odhad bude tím přesnější, čím jemnější dělení použijeme. Podobně je možno získat horní odhad, pokud použijeme pro výpočet maxima lineární hustoty. Zjemňováním dělení se tyto odhady zpřesňují a v limitním procesu, kdy se délka všech kousíčků blíží k nule, dostáváme objekt, který se nazývá *křivkový integrál prvního druhu*, označuje

$$\int_C F \, \mathrm{d}s \tag{2.1}$$

a fyzikálně vyjadřuje hmotnost drátu z výše uvažované úlohy. Pokud počáteční a koncový bod křivky C splývají, píšeme též

$$\oint_C F \, \mathrm{d}s$$

a integrál nazýváme integrálem po uzavřené křivce.

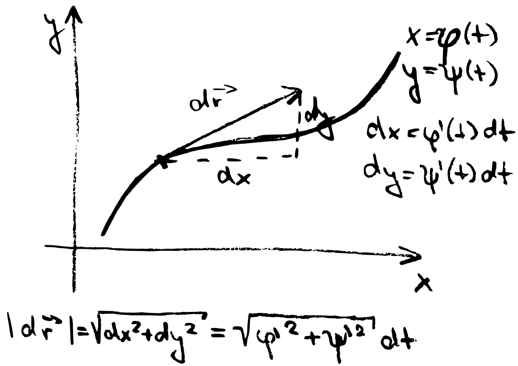
Známe-li parametrické rovnice křivky C,

$$C = \begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t), \quad t \in [\alpha, \beta], \end{cases} \tag{2.2}$$

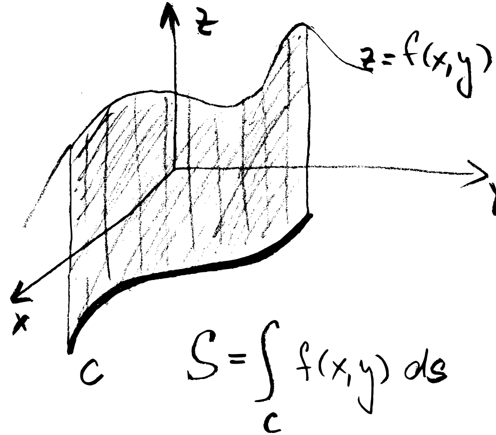
je možno křivkový integrál prvního druhu funkce $F(x, y)$ po křivce dané parametrickými rovnicemi (2.2) zapsat následovně

$$\int_C F \, \mathrm{d}s = \int_\alpha^\beta F(\varphi(t), \psi(t)) \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)} \, \mathrm{d}t. \tag{2.3}$$

Geometricky integrál (2.1) vyjadřuje obsah svislé plochy nad rovinnou křivkou C, shora omezené funkcí $F(x, y)$. Integrál z funkce $F(x, y) = 1$ resp $F(x, y, z) = 1$ podél křivky C udává délku křivky C v rovině nebo v prostoru. Je-li $F(x, y) = \tau(x, y)$, kde $\tau(x, y)$ je lineární hustota materiálu v bodě (x, y), udává (2.1) celkovou hmotnost. Je-li $F(x, y) = x\tau(x, y)$, udává (2.1) lineární moment a



Obrázek 10: Délkový element křivky zadané rovnicemi $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$



Obrázek 11: Křivkový integrál prvního druhu jako obsah válcové plochy

je-li $F(x, y) = x^2\tau(x, y)$ udává (2.1) moment setrvačnosti vzhledem k ose y. Z konstrukce křivkového integrálu i z jeho fyzikální interpretace je snadné nahlédnout, že křivkový integrál nezávisí na orientaci křivky – tj. je jedno, který koncový bod volíme jako počáteční a který jako koncový.

2.4 Křivkový integrál druhého druhu

Pokud po dráze délky s působíme na těleso silou F, konáme práci[10] $W = Fs$. Protože přemísťování nemusí probíhat ve směru působící síly, má-li síla směr $\vec{F}$ a posunutí $\vec{s}$, je práce rovna skalárnímu součinu $\vec{F} \cdot \vec{s}$. Předpokládejme, že na těleso působí síla $\vec{F}$ a těleso se pohybuje podél křivky C určené polohovým vektorem $\vec{r}(t)$. Obecně se podél křivky může měnit velikost nebo směr síly $\vec{F}$ i tečný vektor ke křivce $\Delta\vec{r}$. Pro výpočet práce můžeme použít stejný trik jako výše. Rozdělíme dráhu na malé kousíčky a v rámci těchto kousíčků považujeme $\vec{F}$ i $\Delta\vec{r}$ za konstantu. Tato aproximace bude tím přesnější, čím jemnější dělení použijeme. V limitě dostáváme veličinu, která se nazývá *křivkový integrál druhého druhu* funkce $\vec{F}$ po křivce C a zapisujeme

$$\int_C \vec{F}\,\mathrm{d}\vec{r}. \tag{2.4}$$

Je-li

$$\vec{F}(x,y) = P(x,y)\vec{i} + Q(x,y)\vec{j}, \tag{2.5}$$

zapisujeme někdy křivkový integrál (2.4) ve složkách

$$\int_C P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y.$$

[10] viz http://cs.wikipedia.org/wiki/Mechanická_práce

Známe-li parametrické rovnice křivky C, je možno křivkový integrál druhého druhu funkce (2.5) po křivce dané parametrickými rovnicemi (2.2) zapsat následovně

$$\int_C \vec{F}\,\mathrm{d}\vec{r} = \int_\alpha^\beta \Big[P(\varphi(t),\psi(t))\varphi'(t) + Q(\varphi(t),\psi(t))\psi'(t)\Big]\,\mathrm{d}t. \tag{2.6}$$

Protože při pohybu tělesa po křivce jedním směrem se práce koná a při pohybu opačným směrem spotřebovává, je nutné, aby křivka figurující v křivkovém integrálu druhého druhu byla orientovaná – tj. abychom prohlásili, který bod je počáteční a který koncový. Vždy budeme předpokládat, že křivka je orientovaná v souladu se svým parametrickým vyjádřením, tj. že počáteční bod křivky (2.2) odpovídá hodnotě parametru $t = \alpha$ a koncový bod odpovídá hodnotě parametru $t = \beta$.

Je-li křivka C uzavřená, píšeme

$$\oint_C \vec{F}\,\mathrm{d}\vec{r}.$$

Fyzikálně se jedná o práci kterou vykoná síla $\vec{F}$ při přemístění tělesa po uzavřené křivce. Tato práce se též nazývá *cirkulace vektorového pole po křivce* C. Pokud je možno v poli zavést potenciální energii a pokud tedy práce závisí jenom na počáteční a koncové poloze, musí tato práce být nulová. To je důsledkem věty kterou si uvedeme v kapitole 2.7.

Křivkový integrál má ještě jinou fyzikální interpretaci: při odvození tohoto integrálu jako vykonané práce hraje roli vlastně jenom ta složka silového pole, která je tečná ke křivce. Pokud použijeme naopak normálovou komponentu, dostaneme veličinu vyjadřující *tok vektorového pole křivkou* C. Výsledný vzorec vyjadřující tento tok je

$$\int_C -Q(x,y)\,\mathrm{d}x + P(x,y)\,\mathrm{d}y.$$

2.5 Dvojný integrál

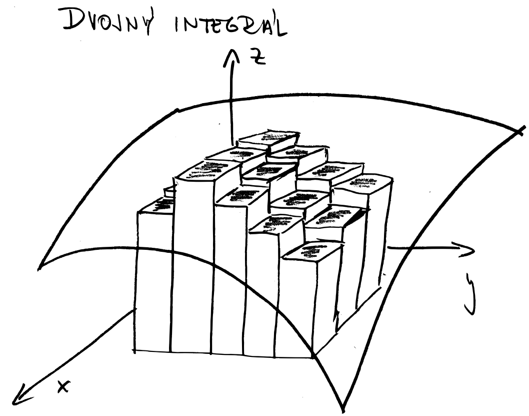
Pro dvojný integrál použijeme podobnou myšlenkovou konstrukci jako u křivkového integrálu prvního druhu, pouze místo drátu s danou lineární hustotou budeme uvažovat rovinnou ohraničenou desku s danou plošnou hustotou. Pokud je hustota desky konstantní, je možno její hmotnost získat jednoduše jako součin plošné hustoty a obsahu. Pokud se hustota desky mění a v obecném bodě (x, y) je dána funkcí $f(x, y)$, můžeme myšlenkově rozdělit desku na malé kousky, v rámci každého malého kousku hustotu aproximovat konstantou, vypočítat hmotnost každého kousku jako součin hustoty a obsahu a všechny hmotnosti sečíst. Získaná veličina je aproximací celkové hmotnosti. V limitním přechodu kdy rozměry všech kousků na než je deska dělena jde k nule dostáváme *dvojný integrál*

$$\iint_\Omega f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

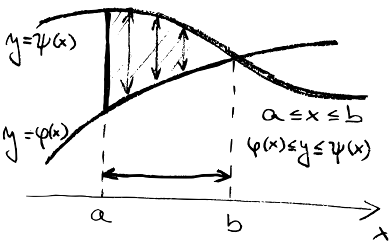
kde Ω je oblast v rovině (x, y) definovaná uvažovanou deskou. Dvojný integál se teké někdy značí

$$\iint_\Omega f(x, y)\mathrm{d}A \qquad \text{nebo} \qquad \iint_\Omega f(x, y)\mathrm{d}S$$

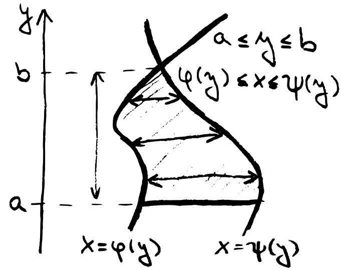
V závislosti na tom, jakými nerovnostmi množinu Ω definujeme, můžeme pro výpočet dvojného integrálu použít následující věty. Tyto věty udávají, jak je možno dvojný integrál přepsat jako dvojnásobný integrál.



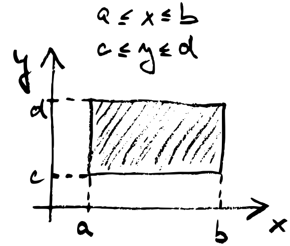
Obrázek 12: Konstrukce dvojného integrálu



Obrázek 13: Oblast integrace ve Větě 2.1



Obrázek 14: Oblast integrace ve Větě 2.2



Obrázek 15: Oblast integrace ve Větách 2.3 a 2.4

Věta 2.1. *Nechť f je funkce spojitá v uzavřené oblasti*

$$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b \text{ a } \varphi(x) \leq y \leq \psi(x)\}$$

(viz obr. 13). Potom

$$\iint_\Omega f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_a^b \Bigl[\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\mathrm{d}y\Bigr]\mathrm{d}x.$$

Věta 2.2. *Nechť f je funkce spojitá v uzavřené oblasti*

$$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq y \leq b \text{ a } \varphi(y) \leq x \leq \psi(y)\}$$

(viz obr. 14). Potom

$$\iint_\Omega f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_a^b \Bigl[\int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x,y)\mathrm{d}x\Bigr]\mathrm{d}y.$$

Věta 2.3. *Nechť $R = [a,b] \times [c,d]$ je uzavřený obdélník v $\mathbb{R}^2$ a f funkce definovaná a spojitá na R (viz obr. 15). Pak platí*

$$\iint_R f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_a^b \Bigl[\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y\Bigr]\mathrm{d}x = \int_c^d \Bigl[\int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x\Bigr]\mathrm{d}y.$$

Věta 2.4. *Platí-li ve větě 2.3 rovnost $f(x,y) = g(x)h(y)$, platí*

$$\iint_R f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_a^b g(x)\mathrm{d}x \int_c^d h(y)\mathrm{d}y.$$

Podobně jako předešlé integrály, dvojný integrál má geometrické a fyzikální aplikace. Z nejdůležitějších vyberme obsah S množiny M, který vypočteme jako integrál $S = \iint_M \mathrm{d}x\mathrm{d}y$. Dále hmotnost množiny M vypočteme jako $m = \iint_M \sigma(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, kde $\sigma(x,y)$ je plošná hustota (hmotnost vztažená na jednotku povrchu). Lineární momenty hmotné množiny M vzhledem k osám y a x jsou rovny $\iint_M x\sigma(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ a $\iint_M y\sigma(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$. Souřadnice těžiště množiny jsou podílem těchto momentů a celkové hmotnosti množiny. Moment setrvačnosti hmotné množiny M vzhledem k ose je $J=\iint_M \rho^2(x,y)\sigma(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, kde $\rho(x,y)$ je vzdálenost bodu (x,y) od osy otáčení. Například pro osu x je $\rho(x,y)=y$ a pro osu y je $\rho(x,y)=x$. Pro osu procházející kolmo počátkem je $\rho(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$.[11]

V dimenzování homogenních nosníků se pracuje s veličinami kvadratický moment průřezu (což je moment setrvačnosti pro $\sigma(x,y)=1$) a modul průřezu, což je veličina, která úzce souvisí s kvadratickým momentem a polohou těžiště. V případě hledání těžiště průřezu také klademe $\sigma(x,y)=1$ a hmotnost se tedy redukuje na obsah. Vzorce pro obsah x-ovou souřadnici těžiště (x_T), y-ovou souřadnici těžiště (y_T), kvadratický moment vzhledem k ose x (I_x) a kvadratický moment vzhledem k ose y (I_y) tedy jsou

$$x_T=\frac{1}{S}\iint_M x\mathrm{d}x\mathrm{d}y, \qquad I_x=\iint_M y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$y_T=\frac{1}{S}\iint_M y\mathrm{d}x\mathrm{d}y, \qquad I_y=\iint_M x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

Pokud máme soubor diskrétních hodnot, je možné najít střední hodnotu pomocí aritmetického průměru. V případě, že hodnoty jsou rozloženy spojitě na intervalu (tj. je jimi na uvažovaném intervalu definována funkce), je možno tuto střední hodnotu najít jako integrální střední hodnotu. Pokud jsou data definována na určité části roviny, tj v množině Ω, můžeme předpokládat, že tato data definují na Ω funkci $f(x,y)$. Za průměrnou hodnotu funkce f na množině Ω bereme

$$\frac{\iint_\Omega f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\mu(\Omega)},$$

kde $\mu(\Omega)=\iint_\Omega \mathrm{d}x\mathrm{d}y$ je obsah množiny Ω.

[11] V praxi počítáme moment setrvačnosti vzhledem k osám, procházejícím těžištěm. Moment setrvačnosti k jiným osám se poté dá odvodit pomocí Steinerovy věty (`http://cs.wikipedia.org/wiki/Steinerova_v%ECta`).

2.6 Dvojný integrál v polárních souřadnicích

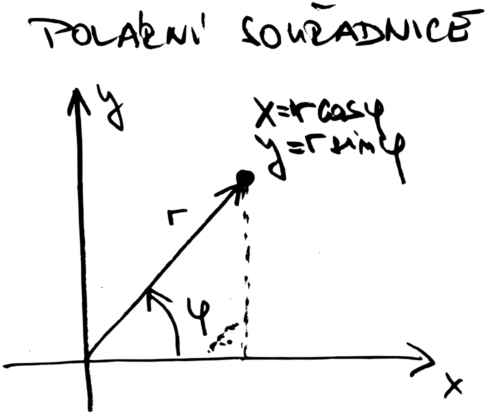
Dosud jsme používali pouze kartézské souřadnice: dvojici čísel udávající vzdálenost bodu od osy y a od osy x, která jednoznačně určuje polohu bodu v rovině. V praxi je někdy výhodnější použít i jiný způsob jak pomocí dvojice čísel charakterizovat polohu bodu v rovině – takové souřadnice potom nazýváme *křivočaré* souřadnice.

Z křivočarých souřadnic jsou nejdůležitější *polární souřadnice*. Při jejich použití polohu bodu A zadáváme tak, že určíme vzdálenost r bodu od počátku soustavy souřadnic O a úhel φ, který svírá spojnice bodů O a A s kladnou částí osy x (viz obrázek 16).

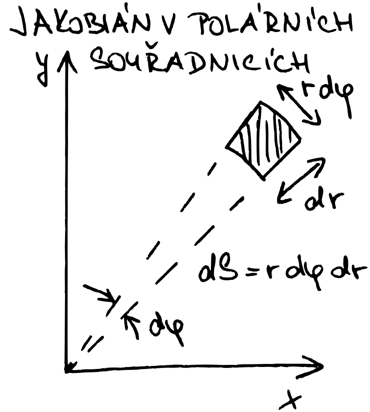
Chceme-li převést dvojný integrál do polárních souřadnic, provádíme v něm vlastně substituci $x = r\cos\varphi$ a $y = r\sin\varphi$. Přitom se transformují i diferenciály $\mathrm{d}x$ a $\mathrm{d}y$. Při změně úhlu o $\mathrm{d}\varphi$ a změně vzdálenosti o $\mathrm{d}r$ má odpovídající část roviny rozměry $\mathrm{d}r$ a $r\mathrm{d}\varphi$ a její obsah je $r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}r$ (viz obrázek 17). Platí tedy, že obsah elementární oblasti $\mathrm{d}S = \mathrm{d}x\mathrm{d}y$ se transformuje na $\mathrm{d}S = r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}r$. Podíl $\dfrac{\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}r}{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}$ udává, kolikrát se změní obsah elementární oblasti při změně souřadnic a nazývá se *jakobián*. V případě polárních souřadnic je jakobián jak vidíme roven r a platí tedy

$$\iint_\Omega f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_\Omega f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}r.$$

V diferenciálním počtu polární souřadnice používáme především tam, kde má problém radiální symetrii. Například při studiu ochlazování nebo kmitů kruhových desek či válcovitých součástek. V integrálním počtu tyto souřadnice použijeme zejména v případě, kdy integrujeme přes kružnici nebo její část (např. mezikruží či kruhová výseč). V takovém případě mají totiž integrály které vzniknou po transformaci dvojného integrálu na dvojnásobný pevné meze a výpočet druhého integrálu je zpravidla jednodušší. O dalších druzích křivočarých souřadnic pojednáme na konci tohoto textu.



Obrázek 16: Definice polárních souřadnic



Obrázek 17: Jakobián v polárních souřadnicích

2.7 Integrální věty

V následujících větách si ukážeme některé souvislosti mezi studovanými pojmy. Tyto souvislosti existují, pokud objekty se kterými pracujeme jsou „dostatečně pěkné“ – funkce jsou dostatečně hladké, oblasti mají dostatečně hladkou hranici a neobsahují díry apod. Pro úplnost uvedeme nebo zopakujeme potřebné pojmy

- Vektorové pole $\vec{F}$ se nazývá *potenciálové*, pokud existuje skalární funkce φ s vlastností $\nabla\varphi = \vec{F}$. Funkce φ se nazývá *kmenová funkce* vektorového pole.
- Pokud platí pro libovolné dvě křivky C a C_1, které leží v Ω a mají stejné počáteční body a stejné koncové body, platí
$$\int_C \vec{F}\mathrm{d}\vec{r} = \int_{C_1} \vec{F}\mathrm{d}\vec{r}, \tag{2.7}$$
říkáme, že integrál v Ω *nezávisí na integrační cestě*. Vektorové pole ve kterém křivkový integrál nezávisí na integrační cestě se nazývá *konzervativní pole*.
- Křivka C se nazývá *uzavřená*, pokud její počáteční a koncový bod splývají.
- Křivka se nazývá *jednoduchá*, pokud sama sebe neprotíná (s případnou výjimkou stejného počátečního a koncového bodu u uzavřených křivek).
- Oblast se nazývá *jednoduše souvislá*, pokud je souvislá a neobsahuje otvory.

Věta 2.5 (o nezávislosti integrálu na integrační cestě). *Uvažujme vektorovou funkci $\vec{F}$, křivku C a oblast Ω v $\mathbb{R}^3$. Následující výroky jsou ekvivalentní za předpokladu hladkosti funkcí, regulárnosti křivek a jednoduše souvislé oblasti Ω.*

(i) *Integrál $\displaystyle\int_C \vec{F}\mathrm{d}\vec{r}$ nezávisí v Ω na integrační cestě.*

(ii) *Křivkový integrál $\displaystyle\oint_C \vec{F}\mathrm{d}\vec{r}$ po libovolné uzavřené křivce C v Ω je roven nule.*

(iii) *Rotace $\operatorname{rot}\vec{F}$ vektorového pole $\vec{F}$ je v Ω rovna nulovému vektoru.*

(iv) *Existuje funkce φ s vlastností $\nabla\varphi = \vec{F}$ na Ω.*

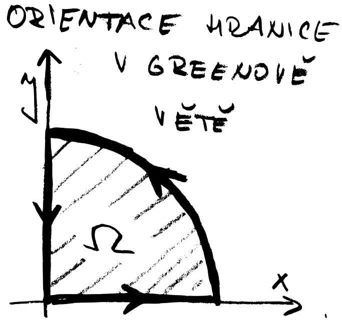
Pokud jsou předchozí podmínky splněny (platnost jedné z nich vynutí platnost i všech ostatních), je možno křivkový integrál vypočítat podle vzorce

$$\int_C \vec{F}\mathrm{d}\vec{r} = \varphi(B) - \varphi(A),$$

kde A a B jsou počáteční a koncový bod křivky C a φ je kmenová funkce vektorového pole $\vec{F}$.

Podle Věty 2.5 je tedy vektorové pole v prostoru konzervativní právě tehdy, když je jeho rotace nulová a to je právě tehdy, když pro toto pole existuje kmenová funkce a je tedy možno zavést potenciál (záporně vzatá kmenová funkce).

Větu 2.5 je možno formálně vyslovit i pro jiný než trojrozměrný prostor. Pokud je pole v předchozí větě pouze v rovině, doplníme třetí komponentu pro výpočet rotace nulou. Potom podmínka $\operatorname{rot}\vec{F} = \vec{0}$ přechází v podmínku z Věty 1.3. Pokud pracujeme v prostoru vyšší dimenze, podmínka na rotaci je nahrazena jinou, komplikovanější podmínkou. Všechny další body však zůstávají v platnosti beze změny.



Obrázek 18: Orientace hranice při aplikaci Greenovy věty.

Podmínka hladkosti funkcí na jednoduše souvislé oblasti je podstatná. Například pole $\vec{v} = -\frac{y}{x^2+y^2}\vec{i} + \frac{x}{x^2+y^2}\vec{j}$ má rotaci rovnu nule ve všech bodech, kde je definované, tj. v celém prostoru kromě osy z. Přímým výpočtem je možno ukázat, že křivkový integrál po jednotkové kružnici v rovině $z = 0$ je roven 2π.

Věta 2.6 (Greenova věta). *Nechť $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ je jednoduše souvislá regulární oblast, jejíž hranicí je po částech regulární křivka $\partial\Omega$ orientovaná tak, že při obíhání podél křivky $\partial\Omega$ je oblast Ω vlevo. Nechť vektorová funkce $\vec{F}(x,y) = P(x,y)\vec{i} + Q(x,y)\vec{j}$ je hladká uvnitř nějaké oblasti, obsahující množinu Ω a její hranici $\partial\Omega$. Platí*

$$\underbrace{\oint_{\partial\Omega} P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y}_{\text{Cirkulace po hranici } \partial\Omega} = \iint_{\Omega} \underbrace{\left(\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x,y)}{\partial y}\right)}_{[\mathrm{rot}(P\vec{i}+Q\vec{j})]_z} \mathrm{d}x\mathrm{d}y. \tag{2.8}$$

Použijeme-li pro funkci $\vec{F}$ vystupující v Greenově větě třídimenzionální rozšíření popsané v odstavci před touto větou, vidíme, že vpravo v dvojném integrálu figuruje třetí komponenta rotace $\mathrm{rot}\,\vec{F}$. Je to současně jediná nenulová komponenta vektoru rotace, zbylé dvě komponenty vektoru rotace jsou rovny nule.

Nahradíme-li formálně vektorové pole $P\vec{i}+Q\vec{j}$ vektorovým polem $-Q\vec{i}+P\vec{j}$, dostáváme následující vztah mezi dvojným integrálem divergence vektorového pole přes oblast Ω a křivkovým integrálem vyjadřujícím tok vektorového pole $P\vec{i} + Q\vec{j}$ protékající přes hranici $\partial\Omega$

$$\underbrace{\oint_{\partial\Omega} -Q(x,y)\mathrm{d}x + P(x,y)\mathrm{d}y}_{\text{Tok přes hranici } \partial\Omega} = \iint_{\Omega} \underbrace{\left(\frac{\partial P(x,y)}{\partial x} + \frac{\partial Q(x,y)}{\partial y}\right)}_{\mathrm{div}(P\vec{i}+Q\vec{j})} \mathrm{d}x\mathrm{d}y. \tag{2.9}$$

Výše popsaně dvě varianty Greenovy věty nám dávají možnost najít fyzikální interpretaci operátorů divergence a rotace. Podíl dvojného integrálu funkce f přes oblast Ω a obsahu této oblasti je roven střední hodnotě funkce f na množině Ω. Při limitním přechodu, kdy rozměry množiny Ω jdou k nule, dostaneme přímo funkční hodnotu funkce f. Toto nám umožňuje dostat se do integrandů na pravých stranách vztahů (2.8) a (2.9).

Rotaci je tedy možno chápat jako limitu podílu cirkulace vektorového pole po uzavřené křivce a obsahu množiny uvnitř této křivky, kdy v limitním procesu stahujeme délku křivky k nule. Zejména pokud je práce po libovolné uzavřené křivce nulová, je nulová i rotace.

Podobně divergenci je možno chápat jako limitu podílu toku uzavřenou křivkou a obsahu množiny ohraničené touto křivkou, když rozměry uvažované oblasti jdou k nule. Zejména pokud pole neobsahuje žádné zdroje ani spotřebiče, pak tok dovnitř křivky je stejný jako tok ven (co do uzavřeného prostoru vteče, to i vyteče ven), je divergence rovna nule.

V literatuře je možno nalézt rozšíření Greenovy věty na případ, kdy množina Ω není jednoduše souvislá. Zhruba řečeno, v těchto případech je nutno integrovat po vnějším obvodu množiny a po obvodu všech děr uvnitř množiny a jednotlivé výsledky vhodně zkombinovat. Na závěr uvedeme jedno z dalších využití Greenovy věty – výpočet obsahu rovinného obrazce.

Poznámka 2.1. Pokud zvolíme funkce $P(x,y)$ a $Q(x,y)$ tak, že platí $\dfrac{\partial Q(x,y)}{\partial x} - \dfrac{\partial P(x,y)}{\partial y} = 1$, potom má dvojný integrál figurující v rovnici (2.8) význam obsahu množiny Ω. Greenova věta v tomto případě nabízí možnost vypočítat obsah množiny pomocí křivkového integrálu druhého druhu $\displaystyle\int_{\partial\Omega} P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y$. Je-li S obsah (míra) množiny Ω, platí například

$$S = \iint_{\Omega} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \oint_{\partial\Omega} x\mathrm{d}y = -\oint_{\partial\Omega} y\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\oint_{\partial\Omega} x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x.$$

2.8 Trojný integrál

Podobně jako jsme zavedli dvojný integrál, je možno zavést i trojný integrál, případně integrál v prostoru libovolné dimenze.

2.9 Společné poznámky

Vzhledem ke způsobu zavedení jsou všechny integrály aditivní vzhledem k oboru integrace. Například křivkový integrál po křivce která je sjednocením na sebe navazujících křivek C_1 a C_2 je roven součtu křivkových integrálů po jednotlivých křivkách. Tento postup nám umožní počítat křivkové integrály po složitějších po částech hladkých křivkách, počítat dvojné integrály přes obecnější množiny než je uvedeno v kapitole věnované dvojnému integrálu apod.

3 Obyčejné diferenciální rovnice

Obyčejná diferenciální rovnice je rovnice, kde vystupuje neznámá funkce a její derivace. Setkáváme se s ní například všude tam, kde rychlost růstu nebo poklesu veličiny souvisí s její velikostí. Například rychlost s jakou se mění teplota horkého tělesa je funkcí teploty samotné. Rychlost tepelné výměny mezi dvěma tělesy je totiž úměrná rozdílu jejich teplot (Newtonův zákon).

Řád diferenciální rovnice je řád nejvyšší derivace, ve které se hledaná funkce vyskytuje. Například rovnice

$$y' + x \ln y = 2$$

je diferenciální rovnice prvního řádu, rovnice

$$y'' + y' - 2y = \sin x$$

je diferenciální rovnice druhého řádu.

Z fyzikálního hlediska diferenciální rovnice popisuje mechanismus vývoje systému. Diferenciální rovnice prvního řádu se vyskytují například v rovnici tepelné výměny

$$y' = -k(y - T),$$

teplota y horkého tělesa se mění (rychlost změny je derivace y') tak, že klesá (znaménko minus) rychlostí úměrnou (konstanta k) teplotnímu rozdílu mezi teplotou tělesa a teplotou okolí (člen $y - T$).

Diferenciální rovnice druhého řádu se vyskytují v mechanice: je-li y poloha, je y' rychlost a y'' zrychlení. Potom je podle Newtonova pohybového zákona pohyb tělesa na které působí v bodě y vnější síla $f(y, y')$ dán rovnicí $my'' = f(y, y')$. Je-li y například rovnovážná poloha při kmitavém pohybu tělesa na pružině, je síla působící na toto těleso složena ze síly způsobené deformací pružiny a odporem prostředí. První složka je v lineárním přiblížení úměrná výchylce y, druhá je úměrná rychlosti y'. Označíme-li konstanty úměrnosti k a b, je tento pohyb popsán rovnicí

$$y'' - \frac{b}{m}y' + \frac{k}{m}y = 0.$$

3.1 Úvod a numerické řešení obyčejných diferenciálních rovnic prvního řádu

Definice 3.1 (obyčejná diferenciální rovnice). *Obyčejnou diferenciální rovnicí prvního řádu rozřešenou vzhledem k derivaci* (stručně - diferenciální rovnicí, DR) s neznámou y rozumíme rovnici tvaru

$$y' = \varphi(x, y), \tag{3.1}$$

kde φ je funkce dvou proměnných.

Diferenciální rovnice udává scénář vývoje systému. K jednoznačnému předpovězení budoucího stavu je ovšem nutno znát nejenom, jaký mechanismus ovlivňuje vývoj systému, ale také stav současný. Viz například diferenciální rovnice ochlazování. Teplota v budoucnu, například za minutu, se pro stejný objekt za stejných podmínek může lišit – stačí nechat objekt jednou ochlazovat z počáteční teploty $100°C$ a jednou z počáteční teploty $50°C$.

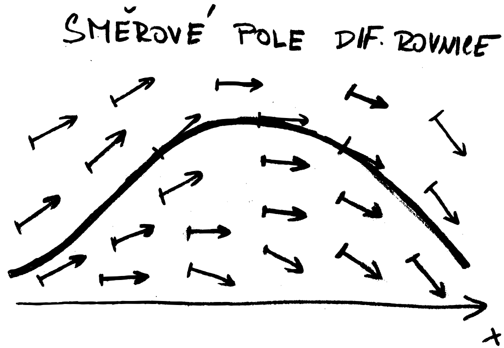
Definice 3.2 (počáteční podmínka). Nechť x_0, y_0 jsou reálná čísla. Úloha najít řešení rovnice (3.1), které splňuje zadanou *počáteční podmínku*

$$y(x_0) = y_0 \tag{3.2}$$

se nazývá *počáteční* (též *Cauchyova*) *úloha*. Jejím řešením rozumíme funkci, která splňuje podmínku (3.2) a je na nějakém intervalu obsahujícím bod x_0 řešením rovnice (3.1).

Řešení Cauchyovy úlohy nazýváme též *partikulárním řešením rovnice* (3.1). Graf libovolného partikulárního řešení se nazývá *integrální křivka*.

Poznámka 3.1 (geometrická interpretace diferenciální rovnice). Protože derivace funkce v bodě udává směrnici tečny ke grafu funkce v tomto bodě, lze rovnici (3.1) chápat jako předpis, který každému bodu v rovině přiřadí směrnici tečny k integrální křivce, která tímto bodem prochází. Sestrojíme-li v dostatečném počtu (například i náhodně zvolených) bodů $[x, y]$ v rovině vektory $(1, \varphi(x, y))$, obdržíme *směrové pole diferenciální rovnice* — systém lineárních elementů, které jsou tečné k integrálním křivkám.



Obrázek 19: Směrové pole diferenciální rovnice

Počáteční podmínka (3.2) geometricky vyjadřuje skutečnost, že graf příslušného řešení prochází v rovině bodem $[x_0, y_0]$. Má-li tato počáteční úloha jediné řešení, neprochází bodem $[x_0, y_0]$ žádná další křivka. Má-li každá počáteční úloha jediné řešení (což bude pro nás velice častý případ), znamená to, že integrální křivky se *nikde neprotínají*.

Poznámka 3.2 (numerické řešení počáteční úlohy)**.** Řešení počáteční úlohy lze numericky aproximovat poměrně snadno: začneme v bodě zadaném počáteční podmínkou a v okolí tohoto bodu nahradíme integrální křivku její tečnou. Tím se dostaneme do dalšího bodu, odkud opět integrální křivku aproximujeme tečnou. Směrnici tečny zjistíme z diferenciální rovnice, buď přímo z derivace (Eulerova metoda), nebo poněkud rafinovaněji, kdy bereme v úvahu i konvexnost či konkávnost a fakt, že se derivace mění s měnícím se x i y (metoda Runge–Kutta). Stačí tedy mít zvolen *krok* numerické metody (délku intervalu, na kterém aproximaci tečnou použijeme) a výstupem metody bude aproximace integrální křivky pomocí lomené čáry.

3.2 Diferenciální rovnice se separovatelnými proměnnými

Definice 3.3 (DR se separovanými proměnnými)**.** Diferenciální rovnice tvaru

$$y' = f(x)g(y), \tag{3.3}$$

kde f a g jsou funkce spojité na (nějakých) otevřených intervalech se nazývá *obyčejná diferenciální rovnice se separovanými proměnnými.*

Řešení DR se separovanými proměnnými

(i) Má-li algebraická rovnice $g(y) = 0$ řešení k_1, k_2, ..., k_n, jsou konstantní funkce $y \equiv k_1$, $y \equiv k_2$, ..., $y \equiv k_n$ řešeními rovnice.

(ii) Pracujme na intervalech, kde $g(y) \neq 0$. Formálně nahradíme derivaci y' podílem diferenciálů $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x)g(y). \tag{3.4}$$

(iii) Odseparujeme proměnné

$$\frac{\mathrm{d}y}{g(y)} = f(x)\mathrm{d}x. \tag{3.5}$$

(iv) Získanou rovnost (3.5) integrujeme

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{g(y)} = \int f(x)\mathrm{d}x + C. \tag{3.6}$$

(v) Pokud je zadána počáteční podmínka, je možné ji na tomto místě dosadit do obecného řešení a určit hodnotu konstanty C. Tuto hodnotu poté dosadíme zpět do obecného řešení a obdržíme řešení *partikulární*.

(vi) Pokud je to možné, převedeme řešení (obecné nebo partikulární) do explicitního tvaru („vyjádříme“ odsud y).

Poznámka 3.3 (řešitelnost a jednoznačnost)**.** Je-li $g(y_0) \neq 0$, je řešení počáteční úlohy (3.3), (3.2), které obdržíme pomocí předchozího postupu, definované a jednoznačně určené v nějakém okolí bodu x_0.

Poznámka 3.4 (využití určitého integrálu namísto neurčitého)**.** Partikulární řešení počáteční úlohy (3.3)–(3.2) lze místo (3.6) psát též přímo ve tvaru určitého integrálu

$$\int_{y_0}^{y} \frac{\mathrm{d}t}{g(t)} = \int_{x_0}^{x} f(t)\mathrm{d}t. \tag{3.7}$$

Ve většině případů dokážeme identifikovat, zda diferenciální rovnice je rovnice se separovanými proměnnými tak, že z rovnice vyjádříme derivaci a pravou stranu rovnice se snažíme rozložit na součin dvou funkcí jedné proměnné podle vzoru (3.3). Věta 1.4 udává jednoduše použitelné kritérium, které umožní poznat, zda vůbec lze tento rozklad na součin provést.

3.3 Lineární operátory

Operátorem rozmíme zobrazení, které má na vstupu i na výstupu funkci. Například pro funkce jedné proměnné mohou být operátory derivace, druhá derivace, vynásobení funkce funkcí $\ln x$ anebo vnoření zadané funkce do funkce $\ln x$. Tj. pro $y = y(x)$ můžeme uvažovat operátory

$$F_1[y] = \frac{dy}{dx}, \quad F_2[y] = \frac{d^2y}{dx^2}, \quad F_3[y](x) = y(x)\ln(x), \quad F_4[y](x) = \ln(y(x)).$$

Lineárním operátorem rozumíme zobrazení, které zachovává součet funkcí a násobek konstantou, tj. platí

$$L[y_1 + y_2] = L[y_1] + L[y_2]$$

a

$$L[Cy_1] = CL[y_1]$$

pro libovolné reálné číslo C a libovolné funkce y_1 a y_2 z definičního oboru operátoru L.

Poznámka 3.5 (Příklady lineárních operátorů).

(i) Operátor derivace, tj. operátor definovaný vztahem $L[y] = \dfrac{dy}{dx}$ je lineární.

(ii) Buď dána funkce $a(x)$. Operátor násobení funkcí $a(x)$, tj. $L[y](x) = a(x)y(x)$ je lineární.

(iii) Složení (postupná aplikace) lineárních operátorů je lineární operátor. Například tedy $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ je lineární operátor.

(iv) Součet lineárních operátorů je lineární operátor.

(v) Buď pevně dána funkce $a(x)$. Lineární operátor $L[y] = \dfrac{dy}{dx} + a(x)y$ se nazývá *lineární diferenciální operátor prvního řádu*.

(vi) Buďte pevně dány funkce $p(x)$ a $q(x)$. Lineární operátor $L[y]=\frac{d^2y}{dx^2}+p(x)\frac{dy}{dx}+q(x)y$ se nazývá *lineární diferenciální operátor druhého řádu*.

Věta 3.1 (princip superpozice, lineární operátor zachovává lineární kombinaci)**.** *Každý lineární operátor zachovává lineární kombinaci funkcí, tj. platí*

$$L[C_1y_1+C_2y_2]=C_1L[y_1]+C_2L[y_2]$$

vždy, když $C_{1,2}\in\mathbb{R}$ a $y_{1,2}$ jsou funkce z definičního oboru operátoru L.

Tvrzení předchozí věty plyne přímo rozepsáním

$$\begin{aligned}L[C_1y_1+C_2y_2]&=L[C_1y_1]+L[C_2y_2]\\&=C_1L[y_1]+C_2L[y_2].\end{aligned}$$

Operátorovou rovnicí budeme rozumět rovnici

$$L[y]=b(x),$$

kde $b(x)$ je funkce, L operátor a y neznámá funkce.

Věta 3.2 (důsledek linearity). *Jsou-li funkce $y_1(x)$ a $y_2(x)$ po řadě řešeními rovnic*

$$L[y] = b_1(x), \quad L[y] = b_2(x),$$

je funkce

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$$

řešením rovnice

$$L[y] = C_1 b_1(x) + C_2 b_2(x).$$

Například pro $L[y] = y'' - y$ a $b_1(x) = b_2(x) = 0$ všechny tři rovnice z předchozí věty splynou v $y'' - y = 0$. Protože $y_1(x) = e^x$ je řešením této rovnice a $y_2(x) = e^{-x}$ je také řešením této rovnice, je řešením této rovnice i každá funkce tvaru $y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$, kde $C_{1,2} \in \mathbb{R}$. Později uvidíme, že tento vzorec je vyčerpávající a žádné další řešení nexistuje.

3.4 Lineární diferenciální rovnice prvního řádu

Definice 3.4 (lineární DR)**.** Nechť funkce a, b jsou spojité na intervalu I. Rovnice

$$y' + a(x)y = b(x) \tag{3.8}$$

se nazývá *obyčejná lineární diferenciální rovnice prvního řádu* (zkráceně píšeme LDR). Je-li navíc $b(x) \equiv 0$ na I, nazývá se rovnice (3.8) *homogenní*, v opačném případě *nehomogenní*.

Poznámka 3.6 (řešitelnost a jednoznačnost)**.** Jsou-li funkce a, b spojité na intervalu I, $x_0 \in I$ a $y_0 \in \mathbb{R}$ libovolné, má každá počáteční úloha (3.8)–(3.2) právě jedno řešení definované na celém intervalu I.

Definice 3.5 (homogenní rovnice)**.** Buď dána rovnice (3.8). Homogenní rovnice, která vznikne z rovnice (3.8) nahrazením pravé strany nulovou funkcí, tj. rovnice

$$y' + a(x)y = 0 \tag{3.9}$$

se nazývá *homogenní rovnice, asociovaná s nehomogenní rovnicí* (3.8).

Poznámka 3.7 (triviální řešení)**.** Homogenní lineární diferenciální rovnice má vždy (bez ohledu na konkrétní tvar funkce $a(x)$) konstantní řešení $y = 0$, jak lze ověřit přímým dosazením. Toto řešení se nazývá *triviální řešení* a v praktických úlohách zpravidla nemívá žádný význam.

Poznámka 3.8 (operátorová symbolika)**.** Definujeme-li na množině všech funkcí diferencovatelných na intervalu I lineární operátor L vztahem

$$L[y](x) = y'(x) + a(x)y(x)$$

pro každé $x \in I$, je možno diferenciální rovnici (3.8) a s ní asociovanou homogenní rovnici zapsat v krátkém tvaru $L[y] = b(x)$ a $L[y] = 0$.

Věta 3.3 (princip superpozice). *Pro libovolné diferencovatelné funkce y, y_1 a y_2 a libovolné reálné číslo C platí*

$$\begin{aligned}
L[y_1] = 0 \quad & \Rightarrow \quad L[C \cdot y_1] = C \cdot 0 = 0, \\
L[y_1] = 0 \text{ a } L[y_2] = f(x) \quad & \Rightarrow \quad L[C \cdot y_1 + y_2] = C \cdot 0 + f(x) = f(x), \\
L[y_1] = L[y_2] = f(x) \quad & \Rightarrow \quad L[y_1 - y_2] = f(x) - f(x) = 0,
\end{aligned}$$

Věta 3.4 (obecné řešení nehomogenní LDR). *Uvažujme lineární diferenciální rovnici* (3.8) *a s ní asociovanou homogenní rovnici* (3.9).

Je-li $y_p(x)$ libovolné partikulární řešení nehomogenní LDR a $y_{p0}(x)$ nenulové partikulární řešení asociované homogenní LDR, je funkce

$$y(x, C) = y_p(x) + C y_{p0}(x) \tag{3.10}$$

obecným řešením nehomogenní LDR.

Slovně:

- Všechna řešení homogenní lineární rovnice jsou násobky jednoho libovolného nenulového řešení této rovnice.
- Součet jednoho libovolného řešení zadané nehomogenní a obecného řešení asociované homogenní lineární rovnice je obecným řešením dané nehomogenní rovnice.

Stačí tedy najít dvě (do jisté míry speciální) řešení a z nich snadno sestavíme obecné řešení zadané rovnice. Tímto se bude zabývat v následujících odstavcích.

3.5 Homogenní LDR

Podle definice je homogenní LDR rovnice tvaru (3.9)

$$y' + a(x)y = 0.$$

Tato rovnice je rovnice se separovanými proměnnými. Její nenulové řešení však můžeme snadno uhodnout. Vskutku: rovnici je možno přepsat na tvar

$$y' = -a(x)y$$

a slovně lze problém řešení lineární homogenní rovnice formulovat následovně: nalezněte funkci y takovou, že její derivace je rovna funkci samotné, vynásobené navíc faktorem $(-a(x))$. Uvědomíme-li si, že funkce, která je rovna svojí derivaci je (mimo jiné) exponenciální funkce e^x, můžeme řešení problému hledat ve tvaru exponenciální funkce, kde se po derivaci faktor $(-a(x))$ objeví jako derivace vnitřní složky. V exponentu tedy musí figurovat výraz, jehož derivace je $(-a(x))$. Řešením homogenní rovnice je tedy funkce $y = e^{-\int a(x)\mathrm{d}x}$ a (jak plyne z linearity) i její libovolný násobek. Vidíme, že pro obecné řešení rovnice (3.9) dostáváme vzorec

$$y(x, C) = Ce^{-\int a(x)\mathrm{d}x}, \qquad C \in \mathbb{R}. \tag{3.11}$$

Homogenní rovnici lze tedy se znalostí obecné teorie vyřešit překvapivě snadno.

3.6 Nehomogenní LDR – metoda integračního faktoru

Zůstává otázka, jak najít partikulární řešení nehomogenní rovnice (3.8). Protože platí

$$\left(ye^{\int a(x)\mathrm{d}x}\right)' = y'e^{\int a(x)\mathrm{d}x} + ya(x)e^{\int a(x)\mathrm{d}x},$$

je možno rovinci (3.8)

$$y' + a(x)y = b(x)$$

přepsat do tvaru

$$y'e^{\int a(x)\mathrm{d}x} + a(x)ye^{\int a(x)\mathrm{d}x} = b(x)e^{\int a(x)\mathrm{d}x}$$

a odsud pomocí vzorce pro derivaci součinu

$$\left(ye^{\int a(x)\mathrm{d}x}\right)' = b(x)e^{\int a(x)\mathrm{d}x}.$$

Integrací dostáváme

$$ye^{\int a(x)\mathrm{d}x} = \int b(x)e^{\int a(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x + C$$

a explicitní tvar řešení rovnice (3.8) je

$$y = Ce^{-\int a(x)\mathrm{d}x} + e^{-\int a(x)\mathrm{d}x}\int b(x)e^{\int a(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x$$

Poznámka 3.9. Partikulární řešení nehomogenní rovnice je

$$y_p(x) = e^{-\int a(x)\mathrm{d}x}\int b(x)e^{\int a(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x.$$

3.7 Lineární diferenciální rovnice druhého řádu

Definice 3.6 (lineární diferenciální rovnice druhého řádu)**.** Buďte p, q a f funkce definované a spojité na intervalu I. Diferenciální rovnice

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x) \tag{3.12}$$

se nazývá *lineární diferenciální rovnice druhého řádu* (zkráceně LDR druhého řádu). *Řešením rovnice* (nebo též *integrálem rovnice*) na intervalu I rozumíme funkci, která má spojité derivace do řádu 2 na intervalu I a po dosazení identicky splňuje rovnost (3.12) na I. Úloha nalézt řešení rovnice, které splňuje v bodě $x_0 \in I$ *počáteční podmínky*

$$\begin{cases} y(x_0) = y_0, \\ y'(x_0) = y_0', \end{cases} \tag{3.13}$$

kde y_0 a y_0' jsou reálná čísla, se nazývá *počáteční úloha* (*Cauchyova úloha*). Řešení počáteční úlohy se nazývá *partikulární řešení rovnice* (3.12).

Poznámka 3.10 (existence a jednoznačnost)**.** Každá počáteční úloha pro rovnici (3.12) má řešení, které je určeno jednoznačně a toto řešení je definované na celém intervalu I.

Definice 3.7 (obecné řešení)**.** Všechna řešení LDR druhého řádu (3.12) lze vyjádřit ve tvaru obsahujícím dvě nezávislé konstanty C_1, $C_2 \in \mathbb{R}$. Takovýto předpis se nazývá *obecné řešení rovnice* (3.12).

Poznámka 3.11 (operátorová symbolika)**.** Podobně jako lineární diferenciální rovnice prvního řádu, i zde často pravou stranu rovnice často zkracujeme do tvaru $L[y](x)$. Definujeme-li tedy

$$L[y](x) = y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x), \tag{3.14}$$

je tímto předpisem definován lineární operátor, který každé dvakrát diferencovatelné funkci přiřazuje levou stranu rovnice (3.12). Rovnici (3.12) je potom možno zapsat ve tvaru $L[y] = f(x)$.

Definice 3.8 (speciální typy LDR druhého řádu)**.** Platí-li v rovnici (3.12) $f(x) = 0$ pro všechna $x \in I$, nazývá se rovnice (3.12) *homogenní*, v opačném případě *nehomogenní*. Jsou-li koeficienty $p(x)$ a $q(x)$ na intervalu I konstantní funkce, nazývá se (3.12) *rovnice s konstantními koeficienty*.

Poznámka 3.12 (triviální řešení). Funkce $y(x) \equiv 0$ je řešením homogenní LDR 2. řádu vždy, bez ohledu na tvar koeficientů p, q. (Ověřte sami dosazením.) Toto řešení nazýváme *triviální řešení rovnice* (3.12).

Definice 3.9 (asociovaná homogenní rovnice). Nahradíme-li v nehomogenní LDR (3.12) pravou stranu (tj. funkci f) nulovou funkcí obdržíme rovnici

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0. \tag{3.15}$$

Tato rovnice se nazývá *asociovaná homogenní rovnice k rovnici* (3.12).

Věta 3.5 (linearita a princip superpozice). *Operátor* (3.14) *zachovává lineární kombinaci funkcí, tj. pro libovolné dvě funkce y_1 a y_2 a libovolné reálné konstanty C_1 a C_2 platí*

$$L[C_1y_1 + C_2y_2] = C_1L[y_1] + C_2L[y_2]. \tag{3.16}$$

Jako speciální případ vztahu (3.16) *dostáváme implikace*

$$L[y_2] = 0 \text{ a } L[y_1] = f(x) \;\Rightarrow\; L[y_1 + y_2] = f(x),$$
$$L[y_1] = L[y_2] = f(x) \;\Rightarrow\; L[y_1 - y_2] = 0,$$
$$L[y_1] = L[y_2] = 0 \;\Rightarrow\; L[C_1y_1 + C_2y_2] = 0,$$

- Součet řešení zadané nehomogenní a asociované homogenní LDR je řešením dané nehomogenní rovnice.
- Rozdíl dvou řešení nehomogenní LDR je řešením asociované homogenní rovnice.
- Každá lineární kombinace dvou řešení homogenní LDR je opět řešením této rovnice.

3.8 Homogenní LDR 2. řádu

V této podkapitole budeme studovat homogenní LDR druhého řádu, tj. rovnici (3.15)

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0,$$

kterou můžeme zkráceně zapsat jako $L[y] = 0$, kde operátor L je lineární diferenciální operátor druhého řádu definovaný vztahem (3.14).

Motivace. Budeme předpokládat že funkce $y_1(x)$ a $y_2(x)$ jsou obě řešeními a budeme hledat podmínky, za kterých je funkce

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$$

obecným řešením. Derivováním tohoto vztahu získáváme

$$y'(x) = C_1 y_1'(x) + C_2 y_2'(x)$$

a dosazení počátečních podmínek $y(\alpha) = \beta$, $y'(\alpha) = \gamma$ vede k následující soustavě lineárních rovnic s neznámými C_1, C_2

$$\begin{aligned} \beta &= C_1 y_1(\alpha) + C_2 y_2(\alpha), \\ \gamma &= C_1 y_1'(\alpha) + C_2 y_2'(\alpha). \end{aligned} \tag{3.17}$$

Jak je známo z lineární algebry, tato soustava má právě jedno řešení pro libovolnou volbu čísel β, γ právě tehdy, když matice soustavy, tj. matice $\begin{pmatrix} y_1(\alpha) & y_2(\alpha) \\ y_1'(\alpha) & y_2'(\alpha) \end{pmatrix}$, je regulární. Tato matice je regulární právě tehdy, když její determinant je nenulový a to nastane právě tehdy když jeden sloupec není násobkem druhého. Tímto motivujeme následující definice.

Definice 3.10 (lineární (ne-)závislost funkcí)**.** Buďte y_1 a y_2 funkce definované na intervalu I. Řekneme, že funkce y_1 a y_2 jsou na intervalu I *lineárně závislé*, jestliže jedna z nich je na intervalu I násobkem druhé, tj. jestliže existuje reálné číslo $k \in \mathbb{R}$ s vlastností

$$y_1(x) = ky_2(x) \qquad \text{pro všechna } x \in I,$$

nebo

$$y_2(x) = ky_1(x) \qquad \text{pro všechna } x \in I.$$

V opačném případě říkáme, že funkce y_1, y_2 jsou na intervalu I *lineárně nezávislé*.

Definice 3.11 (Wronskián)**.** Buďte $y_1(x)$ a $y_2(x)$ dvě libovolná řešení homogenní rovnice (3.15). *Wronskiánem* funkcí $y_1(x)$, $y_2(x)$ rozumíme determinant

$$W[y_1, y_2](x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x). \tag{3.18}$$

Věta 3.6 (lineární (ne)závislost)**.** *Buďte $y_1(x)$ a $y_2(x)$ dvě řešení rovnice* (3.15) *na intervalu I. Tato řešení jsou lineárně nezávislá právě tehdy když je jejich Wronskián různý od nuly na intervalu I.*

Tuto větu je snadné dokázat: stačí derivovat podíl funkcí y_2/y_1. Derivací podílu dostaneme zlomek, který v čitateli obsahuje právě wronskián a pokud je podíl konstantní, musí tato derivace (a tedy i wronskián) být rovna nule.

Věta 3.7 (obecné řešení homogenní LDR)**.** *Jsou-li y_1 a y_2 dvě netriviální lineárně nezávislá řešení rovnice* (3.15) *na intervalu I, pak funkce y definovaná vztahem*

$$y(x, C_1, C_2) = C_1y_1(x) + C_2y_2(x), \tag{3.19}$$

kde $C_{1,2} \in \mathbb{R}$, je obecným řešením rovnice (3.15) *na intervalu I.*

Definice 3.12 (fundamentální systém řešení)**.** Dvojici funkcí y_1 a y_2 z předchozí věty nazýváme *fundamentální systém řešení rovnice (3.15)*.

3.9 Homogenní LDR 2. řádu s konstantními koeficienty

Budeme studovat rovnici tvaru

$$y'' + py' + qy = 0, \tag{3.20}$$

kde $p, q \in \mathbb{R}$. Všimněme si nejprve následujícího faktu: Dosadíme-li do levé strany rovnice $y = e^{zx}$, kde z je reálné číslo, po výpočtu derivací a po vytknutí faktoru e^{zx} získáváme

$$y'' + py' + qy = e^{zx}(z^2 + pz + q).$$

Protože exponenciální faktor na pravé straně je vždy nenulový, bude výraz na pravé straně roven nule pokud bude splněna podmínka

$$z^2 + pz + q = 0. \tag{3.21}$$

Pouze v tomto případě bude uvažovaná funkce řešením rovnice (3.20).

Definice 3.13 (charakteristická rovnice)**.** Kvadratická rovnice (3.21) s neznámou z se nazývá *charakteristická rovnice pro rovnici* (3.20).

Věta 3.8 (fundamentální systém řešení LDR s konstantními koeficienty). *Uvažujme DR* (3.20) *a její charakteristickou rovnici* (3.21)*.*

- *Jsou-li* $z_1, z_2 \in \mathbb{R}$ *dva různé reálné kořeny charakteristické rovnice* (3.21)*, definujme* $\boxed{y_1 = e^{z_1 x}}$ *a* $\boxed{y_2 = e^{z_2 x}}$.
- *Je-li* $z_1 \in \mathbb{R}$ *dvojnásobným kořenem charakteristické rovnice* (3.21)*, definujme* $\boxed{y_1 = e^{z_1 x}}$ *a* $\boxed{y_2 = x e^{z_1 x}}$.
- *Jsou-li* $z_{1,2} = \alpha \pm i\beta \notin \mathbb{R}$ *dva komplexně sdružené kořeny charakteristické rovnice* (3.21)*, definujme* $\boxed{y_1(x) = e^{\alpha x}\cos(\beta x)}$ *a* $\boxed{y_2(x) = e^{\alpha x}\sin(\beta x)}$.

Potom obecné řešení rovnice (3.20) *je*

$$y(x, C_1, C_2) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x), \qquad C_1 \in \mathbb{R},\ C_2 \in \mathbb{R}.$$

Poznámka 3.13. Ze střední školy víme, že je-li nějaký pohyb popsán goniometrickými funkcemi $y = \sin(\omega t)$ a $y = \cos(\omega t)$, jedná se o *kmitavý pohyb* a veličina ω se nazývá *úhlová rychlost*. Vydělením faktorem 2π dostáváme z úhlové rychlosti veličinu nazývanou *frekvence*. Je-li tedy x čas a pohyb je popsán rovnicí s komplexně sdruženými kořeny $\alpha \pm i\beta$, jedná se o kmitavý pohyb s úhlovou rychlostí β a frekvencí $\dfrac{\beta}{2\pi}$. Veličina α, je-li nenulová, omezuje amplitudu tohoto pohybu: v praktických aplikacích vychází záporná a má význam exponenciálního tlumení.

3.10 Nehomogenní LDR 2. řádu

Nyní se budeme věnovat řešení nehomogenní diferenciální rovnice.

Věta 3.9 (důsledek principu superpozice)**.** *Součet libovolného partikulárního řešení nehomogenní lineární diferenciální rovnice a obecného řešení asociované homogenní rovnice je obecným řešením původní nehomogenní rovnice*

Podle předchozí věty tedy k vyřešení lineární nehomogenní rovnice stačí nalézt jedno (partikulární) řešení této rovnice a obecné řešení asociované homogenní rovnice.

Jedním z řešení rovnice

$$y'' + y = 6 \tag{3.22}$$

je zcela jistě funkce $y(x) = 6$. (Vidíme přímo po dosazení.) Fundamentálním systémem řešení asociované homogenní rovnice $y'' + y = 0$ jsou funkce $y_1 = \sin x$ a $y_2 = \cos x$. Obecné řešení (3.22) je tedy

$$y(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x + 6.$$

Následující věta udává jednu z metod nalezení partikulárního řešení, pokud je diferenciální rovnice do jisté míry speciální: má konstantní koeficienty a polynomiální pravou stranu.

Věta 3.10 (metoda neurčitých koeficientů)**.** *Uvažujme lineární diferenciální rovnici druhého řádu*

$$y'' + py' + qy = P_n(x),$$

kde $p \in \mathbb{R}$ je konstanta, $q \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ je nenulová konstanta a $P_n(x)$ je polynom stupně n. Existuje polynom stupně n, který je partikulárním řešením této diferenciální rovnice.

V praxi polynom který má být řešením napíšeme s neurčitými koeficienty a dosazením do rovnice určíme potřebné hodnoty těchto koeficientů.

3.11 Aplikace diferenciálních rovnic

(i) Označuje-li y míru znečištění jezera o objemu V, do kterého se již dále další nečistoty nedostávají a přitéká pouze čistá voda rychlostí c a odplavuje nečistoty, je tento proces modelován rovnicí samočištění jezer $y' = -\frac{c}{V}y$.

(ii) Označuje-li K nosnou kapacitu prostředí pro živočišný druh o velikosti y a mírou rychlosti rozmnožování (tzv. specifickou mírou růstu) r, je vývoj velikosti populace y popsán logistickou rovnicí $y' = ry\left(1 - \frac{y}{K}\right)$. V praxi velikost populace kolísá vlivem různých nepředvídatelných příčin. Vyspělejší organismy se s kolísáním životních podmínek vyrovnávají relativně dobře a proto se velikost jejich populace pohybuje trvale v okolí nosné kapacity K. Méně vyspělé organismy se se změnami prostředí nedokáží vyrovnat a populace může být zdecimována na malou úroveň, jakmile však nepříznivé podmínky pominou, dokáže se populace rychle zotavit, pokud projevuje vysokou specifickou míru růstu. Tyto dva způsoby reakce na změny životního prostředí se v ekologii nazývají K-strategie a r-strategie[12].

(iii) Kmity tělesa o hmotnosti m pružně připevněného k nehybné podložce spojem tuhosti k jsou popsány diferenciální rovnicí $\ddot{y} + \frac{k}{m}y = 0$. Kmity matematického kyvadla[13] jsou popsány diferenciální rovnicí $\ddot{\varphi} + \frac{l}{g}\varphi = 0$. Zde navíc používáme fyzikální úzus označovat derivace podle času pomocí tečky a ne čárky. Symbol $\ddot{y}$ tedy značí druhou derivaci funkce y, kde y bereme jako funkci času.

Více viz skriptum R. Mařík, Diferenciální rovnice a autonomní systémy, http://user.mendelu.cz/marik/aplikace/aplikace_diferencialnich_rovnic.pdf a další literatura.

[12] http://cs.wikipedia.org/wiki/Životní_strategie
[13] http://cs.wikipedia.org/wiki/Matematické_kyvadlo

4 Rovnice matematické fyziky

V této podkapitole se seznámíme se základními diferenciálními rovnicemi používanými v matematické fyzice. Jedná se o rovnice zachycující matematicky děje okolo nás. Protože se bude jednat o rovnice, kde neznámé jsou funkce více proměnných a v rovnicích vystupují i derivace těchto funkcí, patří tyto rovnice do kategorie parciálních diferenciálních rovnic. Naprostá většina fyzikálních zákonů a procesů je matematicky formulována právě pomocí parciálních diferenciálních rovnic nebo jejich integrálních ekvivalentů a vztahy, které známe například ze střední školy, jsou aproximacemi řešení těchto rovnic. Tyto rovnice můžeme uvažovat v jedné dimenzi (například šíření tepla nebo kmitů v tyči), ve dvou dimenzích (šíření tepla v desce, kmity membrány) nebo ve třech dimenzích (šíření tepla nebo kmitů v tělese).

Úmluva: Abychom se vyhnuli nedorozuměním v používání symbolu Δ, budeme tímto symbolem v následující kapitole vždy rozumět konečnou změnu. Laplaceův operátor budeme označovat symbolem ∇^2.

Pozorování 1: Všechny rovnice, se kterými se setkáme v této kapitole jsou lineární. Jsou tedy zachovány všechny principy, které plynou přímo z linearity. Zejména tedy libovolná lineární kombinace libovolného počtu řešení homogenní rovnice je opět řešením.

Pozorování 2: V rovnicích uvedených v následujících podkapitolách figurují vždy parciální derivace a jisté materiálové konstanty, dané povahou problému. Tyto konstanty jsou důležité z fyzikálního hlediska, při matematickém studiu je však budeme pro větší přehlednost v některých podkapitolách vynechávat (položíme je rovny jedné). Toto není na úkor obecnosti, protože číselné velikosti konstant lze měnit vhodnou volbou fyzikálních jednotek. Můžeme například délku měřit v tak obrovských jednotkách, že rychlost světla ve vakuu bude rovna jedné. Že je taková jednotka velmi nepraktická při měření prováděná v běžném životě není pro matematické studium povahy problému nijak podstatné.

4.1 Rovnice kontinuity

Odvodíme rovnici kontinuity pro dvě proměnné, pro tři proměnné nebo jednu proměnnou je postup analogický. Nechť x, y jsou prostorové proměnné a t čas. Uvažujme skalární stavovou funkci $u(x,y,t)$ charakterizující stav studovaného objektu v daném bodě a čase. Například hustotu plynu v oblasti mezi dvěma rovnými deskami. Pro jednoduchost předpokládejme, že všechny veličiny jsou dostatečně hladké a použijeme poněkud neformální postup bez podrobných důkazů.

Nechť M je jednoduše souvislá oblast v rovině. Rovnice kontinuity vyjadřuje, že ke změně celkového množství veličiny u v oblasti M za jednotku času přispívá tok veličiny přes hranici ∂M (dovnitř nebo ven) a případné zdroje nebo spotřebiče uvnitř množiny M. Je-li $\vec{\Phi}(x,y,t)$ vektorová funkce popisující tok prostředí popsaného veličinou u, $\sigma(x,y,t)$ je hustota zdrojů (je-li σ kladné) a spotřebičů (je-li σ záporné), docházíme k následující bilanci pro rychlost změny celkového množství veličiny v množině M:

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial t}\overbrace{\iint_M u(x,y,t)\mathrm{d}x\mathrm{d}y}^{\text{množství veličiny v množině } M}}_{\text{velikost změny za jednotku času}} = \underbrace{\iint_M \sigma(x,y,t)\mathrm{d}x\mathrm{d}y}_{\substack{\text{celková vydatnost zdrojů}\\ \text{uvnitř množiny } M}} - \underbrace{\oint_{\partial M} -\Phi_2(x,y,t)\mathrm{d}x + \Phi_1(x,y,t)\mathrm{d}y}_{\text{tok přes hranici množiny } M},$$

kde $\Phi_{1,2}(x,y,t)$ jsou jednotlivé komponenty vektoru $\vec{\Phi}(x,y,z)$. Použijeme-li Greenovu větu (2.9), dostáváme

$$\frac{\partial}{\partial t}\iint_M u(x,y,t)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_M \sigma(x,y,t)\mathrm{d}x\mathrm{d}y - \iint_M \operatorname{div}\vec{\Phi}(x,y,t)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

Pokud se oblast M nemění v čase, je možné na levé straně přesunout časovou derivaci dovnitř integrálu a dostáváme dále rovnici zvanou *rovnice kontinuity v integrálním tvaru*

$$\iint_M \frac{\partial}{\partial t}u(x,y,t)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_M \Bigl(-\operatorname{div}\vec{\Phi}(x,y,t) + \sigma(x,y,t)\Bigr)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

a odsud (protože rovnost musí platit pro každou množinu M) nutně

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\operatorname{div}\vec{\Phi} + \sigma,$$

neboli

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \operatorname{div}\vec{\Phi} = \sigma, \tag{4.1}$$

což je *diferenciální tvar rovnice kontinuity*, ve kterém jsme pro stručnost vynechali explicitní vypisování nezávislých proměnných. Ve stejném tvaru rovnice platí i v lineárním případě a trojdimenzionálním případě. Z integrálního tvaru a z odvození ihned vidíme, že se vlastně jedná o rovnici vyjadřující zákon zachování veličiny u, kde člen $\frac{\partial u}{\partial t}$ vyjadřuje časovou změnu veličiny u, $\vec{\Phi}$ vyjadřuje hustotu toku veličiny u, $\operatorname{div}\vec{\Phi}$ je divergence této hustoty toku a σ je člen související s přítomností zdrojů nebo spotřebičů. Speciálními případy rovnice kontinuity jsou *rovnice kontinuity bez zdrojů*

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \operatorname{div}\vec{\Phi} = 0,$$

stacionární rovnice kontinuity pro popis stacionárních jevů

$$\operatorname{div}\vec{\Phi} = \sigma$$

a *stacionární bezzdrojová rovnice kontinuity*

$$\operatorname{div}\vec{\Phi} = 0,$$

kterou známe ze střední školy v integrálním tvaru pro ustálené proudění nestlačitelné tekutiny trubicí s proměnným průřezem:

$$Sv = \text{konst}$$

a která říká, že objem nestlačitelné tekutiny, který do trubice na jedné straně vteče je stejný jako objem, který z ní vyteče.

4.2 Difuzní rovnice (vedení tepla)

Odvození difuzní rovnice je kombinací rovnice kontinuity a Fickova zákona, který říká, že v označení z předchozí kapitoly je směřuje vektor $\vec{\Phi}$ (difuzní tok, tj. množství veličiny u které projde elementární oblastí za jednotku času) z oblastí s vyšší koncentrací do oblastí s nižší koncentrací a velikost je úměrná gradientu veličiny u. Platí tedy

$$\vec{\Phi} = -D\nabla u, \tag{4.2}$$

kde D je tzv. difuzní koeficient. Je-li tento koeficient konstantní (nezávislý na prostorových souřadnicích a na čase), potom má difuzní rovnice vhledem k identitě

$$\operatorname{div}\vec{\Phi} = -\nabla(D\nabla u) = -D\nabla(\nabla u) = -D\nabla^2 u$$

konečný tvar

$$\frac{\partial u}{\partial t} - D\nabla^2 u = \sigma, \tag{4.3}$$

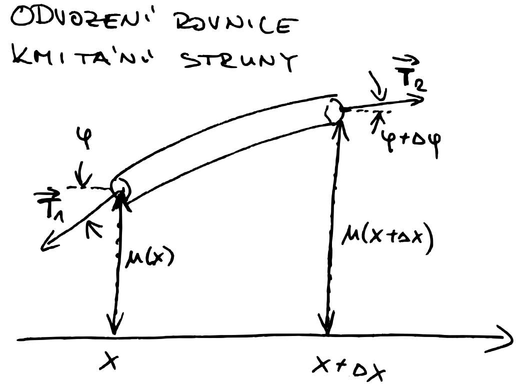
kde ∇^2 je Laplaceův operátor definovaný na straně 28. Tuto rovnici je možno najít v literatuře pod názvem *rovnice vedení tepla*, protože popisuje šíření tepla v prostředí s teplotním součinitelem vodivosti D a hustotou tepelných zdrojů σ.

Odhadnout některé aspekty chování je možné i bez znalosti řešení této rovnice, kterou je možno vyřešit pouze v některých speciálních případech. Například z toho, že členy $\dfrac{\partial u}{\partial t}$ a $D\nabla^2 u$ musí mít stejné jednotky vidíme, že jednotka difuzního koeficientu D je $m^2 s^{-1}$. Proto je přirozené očekávat, že

- průměrná vzdálenost na kterou dodifunduje látka za čas t je úměrná výrazu $\sqrt{Dt}$;
- průměrný čas za který látka dodifunduje na vzdálenost d je úměrný výrazu $\dfrac{d^2}{D}$.

4.3 Vlnová rovnice

Vlnová rovnice je rovnice popisující kmity strun (v jednorozměrném případě), membrán (ve dvourozměrném případě) nebo těles (v trojrozměrném případě). Odvodíme rovnici kmitání strun. Na kmitající struně uvažujme v bodě x element o délce Δx. Výchylku z rovnovážného stavu označme u. Dále označme $\vec{\mathcal{T}}$ sílu, která v tomto bodě napíná strunu - vnitřní napětí ve struně. Tento vektor má podél struny konstantní velikost a směr se mění podle zakřivení struny. Označíme-li φ úhel mezi vektorem $\vec{\mathcal{T}}$ a vodorovným směrem, je $\tan\varphi = \dfrac{\partial u}{\partial x}$ (derivace je směrnice tečny). Na levý konec působí síla $\vec{\mathcal{T}}_1$, kterou pro další počítání rozložíme do vodorovného a svislého směru. Doleva působí síla o velikosti $\mathcal{T}\cos\varphi$ a dolů síla $\mathcal{T}\sin\varphi$. Podobně, na pravý konec, kde je směrnice tečny $\varphi+\Delta\varphi$ působí doprava síla $\mathcal{T}\cos(\varphi+\Delta\varphi)$ a nahoru síla $\mathcal{T}\sin(\varphi+\Delta\varphi)$. Protože se element pohybuje ve svislém směru, podle Newtonova pohybového zákona platí



Obrázek 20: Odvození vlnové rovnice v jedné dimenzi

$$m\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \mathcal{T}\sin(\varphi+\Delta\varphi) - \mathcal{T}\sin\varphi,$$

kde m je hmotnost uvažovaného elementu. Je-li lineární specifická hmotnost struny ρ a délka elementu v rovnovážné poloze (bez deformace) je přibližně Δx, je možno vyjádřit hmotnost jako $m = \rho\Delta x$ a dostáváme po úpravě vztah

$$\frac{\rho}{\mathcal{T}}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\sin(\varphi+\Delta\varphi) - \sin\varphi}{\Delta x},$$

Pokud pravou stranu přepíšeme do tvaru

$$\frac{\sin(\varphi + \Delta\varphi) - \sin\varphi}{\Delta\varphi}\frac{\Delta\varphi}{\Delta x}$$

a v limitě stáhneme velikost uvažovaného elementu k nule, dostáváme napravo výraz známý z definice derivace

$$\frac{\partial \sin(\varphi)}{\partial\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial x} \quad \text{tj.} \quad \cos(\varphi)\frac{\partial\varphi}{\partial x}.$$

Potřebujeme nyní vyjádřit výraz $\frac{\partial\varphi}{\partial x}$. Ze vztahu $\tan\varphi = \frac{\partial u}{\partial x}$ derivováním podle x dostáváme

$$\frac{1}{\cos^2\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

a za předpokladu malých výchylek nahradíme v předchozích dvou vzorcích funkci kosinus její lineární aproximací v okolí nuly:

$$\begin{aligned}\cos(\varphi) &\approx \cos(0) + (\cos(\varphi))'\Big|_{\varphi=0}(\varphi - 0)\\ &= 1 + \sin(\varphi)\Big|_{\varphi=0}\varphi = 1.\end{aligned}$$

Tím se pravá strana rovnice zjednoduší na $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ a získáváme rovnici

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\mathcal{T}}{\rho}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Toto je rovnice popisující kmitavý pohyb struny. Ve vícerozměrném případě je situace obdobná, pouze na pravé straně dostaneme Laplaceův operátor a výsledná rovnice

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\mathcal{T}}{\rho}\nabla^2 u. \tag{4.4}$$

se nazývá *vlnová rovnice*.

Po přeznačení je možno vlnovou rovnici zapsat ve tvaru

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\nabla^2 u, \tag{4.5}$$

kde c je kladná konstanta. Nechť f je libovolná dvakrát diferencovatelná funkce jedné proměnné a uvažujme jednorozměrnou vlnovou rovnici

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{4.6}$$

a funkci dvou proměnných $u(x,t) = f(x - ct)$. Potom platí

$$\frac{\partial u}{\partial x} = f'(x - ct), \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f''(x - ct),$$
$$\frac{\partial u}{\partial t} = -cf'(x - ct), \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 f''(x - ct),$$

odkud snadno vidíme, že funkce u je řešením rovnice (4.6). Vrstevnice funkce $u(x,t)$ jsou dány rovnicí $x - ct =$ konst, což odpovídá tomu, že bod o dané výchylce se za čas Δt posune o $\Delta x = c\Delta t$. Jedná se tedy o postupnou vlnu, která se šíří rychlostí c doprava. Podobně, funkce $v(x,c) = f(x+ct)$ je řešením rovnice (4.6), které odpovídá postupné vlně, která postupuje rychlostí c doleva.

Rovnice popisující podélné kmity kmity tyče modulu pružnosti E a hustotě ρ má tvar (4.6), kde $c = \sqrt{E\rho}$ je rychlost šíření kmitů. Trojrozměrná analogie této rovnice je vhodná pro popis elastických kmitů (chvění) v tělese.

4.4 Fourierova metoda (separace proměnných) I

Jedna z nejjednodušších metod řešení parciálních diferenciálních rovnic spočívá v tom, že se řešení rovnic snažíme najít v nějakém konkrétním tvaru, který nám umožní rovnici redukovat na několik rovnic jednodušších.

Uvažujme šíření tepla v tyči jednotkové délky bez vnitřních zdrojů tepelné energie, popsané diferenciální rovnicí

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \tag{4.7}$$

Pro jednoznačný popis děje je nutno zadat počáteční teplotu $\varphi(x)$ ve všech bodech tyče a podmínky, které udávají, v jakém prostředí se tyč nachází – například teplotu konců tyče. Máme tedy podmínky

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad u(0,t) = u_0(t), \quad u(1,t) = u_1(t). \tag{4.8}$$

Pro jednoduchost uvažujme homogenní okrajové podmínky $u(0,t) = 0 = u(1,t)$. Řešení u budeme hledat ve tvaru funkce

$$u(x,t) = X(x)T(t),$$

kde X a T jsou funkce jedné proměnné. V tomto označení platí $\dfrac{\partial u}{\partial t} = X(x)T'(t)$ a $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = X''(x)T(t)$ a po dosazení do (4.7) a po vydělení faktorem $X(x)T(t)$ dostaneme

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}.$$

Protože levá strana závisí pouze na t a pravá strana pouze na x, musí být obě strany rovny stejné konstantě. Tuto konstantu zapíšeme z důvodů které budou patrné později jako $-\lambda^2$. Z počátečních a okrajových podmínek naložených na funkce u plyne, že funkce X a T musí splňovat

$$X(0) = 0 = X(1). \tag{4.9}$$

Funkce X a T tedy musí splňovat rovnice

$$T' = -\lambda^2 T, \quad X'' + \lambda^2 X = 0$$

a podmínku (4.9). Rovnice

$$T' = -\lambda^2 T$$

je lineární a její obecné řešení je libovolný násobek funkce $T(t) = e^{-\lambda^2 t}$. Úloha najít funkci vyhovující rovnici

$$X'' + \lambda^2 X = 0$$

a podmínce (4.9) bude hlavním objektem následující podkapitoly.

4.5 Okrajová úloha, vlastní čísla

Pro parametr λ řešme rovnici

$$X'' + \lambda^2 X = 0 \tag{4.10}$$

s okrajovými podmínkami

$$X(0) = 0 = X(1). \tag{4.11}$$

Úloha najít řešení diferenciální rovnice, které splňuje podmínky typu (4.11) se nazývá *okrajová úloha*. Jedno z řešení úlohy (4.10)–(4.11) je triviální řešení $X(x) = 0$. Ukazuje se, že netriviální řešení existuje jen pro některé hodnoty parametru λ. Hodnota λ^2, pro kterou existuje netriviální řešení úlohy (4.10)–(4.11) se nazývá *vlastní hodnota okrajové úlohy* a příslušné řešení se nazývá *vlastní funkce okrajové úlohy*.

Rovnice (4.10) je homogenní lineární diferenciální rovnice druhého řádu a má (podle toho jaké je řešení charakteristické rovnice) řešení buď exponenciální funkce nebo goniometrické funkce. Podrobným rozborem lze ukázat, že v případě lineární kombinace exponenciálních funkcí se nepodaří splnit podmínky (4.11) a charakteristická rovnice tedy nesmí mít reálné kořeny. Proto jsme volili konstantu v separaci proměnných ve tvaru $-\lambda^2$. Nyní jsou totiž řešeními charakteristické rovnice čísla $\pm i\lambda$ a řešením rovnice (4.10) je tvaru

$$X(x) = C_1 \sin(\lambda x) + C_2 \cos(\lambda x).$$

Z podmínky $X(0) = 0$ dostáváme $C_2 = 0$. Tedy

$$X(x) = C_1 \sin(\lambda x).$$

Z podmínky $X(1) = 0$ dostáváme $0 = C_1 \sin(\lambda)$. Zajímá nás pouze netriviální řešení a proto nemůžeme připustit $C_1 = 0$. Platí tedy $\sin(\lambda) = 0$, neboli $\lambda = k\pi$, kde k je přirozené číslo[14]. Vlastní hodnoty jsou tedy tvaru

$$\lambda^2 = k^2\pi^2$$

a uvažovaná okrajová úloha pro libovolné přirozené číslo k řešení

$$X(x) = C \sin(k\pi x),$$

kde C je reálná konstanta.

[14] Nemusíme uvažovat všechna celá čísla, protože případné znaménko minus je možno vzhledem k lichosti funkce sinus zahrnout do konstanty C_1

4.5.1 Fourierova metoda (separace proměnných) II

Protože řešení rovnice (4.7) hledáme ve tvaru $u(x,t) = X(x)T(t)$, můžeme výsledky předchozích odstavců shrnout do poznatku, že pro libovolnou konstantu C_k a libovolné přirozené číslo k je funkce

$$C_k \sin(k\pi x)e^{-\lambda^2 t}.$$

Protože rovnice (4.7) je lineární, je řešením i libovolná lineární kombinace těchto funkcí. Použijeme-li všechny funkce tohoto tvaru, dostáváme řešení

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k \sin(k\pi x)e^{-\lambda^2 t},$$

Protože máme zadánu počáteční podmínku (4.8) ve tvaru $u(x,0) = \varphi(x)$, potřebujeme najít konstanty C_k takové, že platí

$$\sum_{k=1}^{\infty} C_k \sin(k\ \pi x) = \varphi(x).$$

Tuto úlohu budeme řešit v následující podkapitole.

4.6 Fourierův rozvoj periodické funkce

Nekonečná řada goniometrických funkcí tvaru

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(k\ x) + b_k \sin(k\ x))$$

může pro konkrétní hodnoty koeficientů a_i, b_i konvergovat k nějaké funkci $f(x)$ a za jistých podmínek[15] je tato funkce dostatečně pěkná: je spojitá, je možno ji derivovat člen po členu apod.

Při řešení rovnic matematické fyziky řešíme opačný problém: pro zadanou funkci $f(x)$ na intervalu $[-\pi, \pi]$ chceme nalézt koeficienty a_i, b_i tak, aby na tomto intervalu platilo

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)) \,.$$

Ukazuje se, že tento zápis funkce f pomocí goniometrických funkcí je možný, pokud použijeme následující volbu koeficientů

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \mathrm{d}x$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx) \mathrm{d}x$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(kx) \mathrm{d}x.$$

Tyto vztahy je možno zobecnit i na jiné intervaly než $[-\pi, \pi]$ a také pro jiné funkce než goniometrické – je možné použít například systém všech vlastních funkcí okrajové úlohy. V našem případě je možné ukázat, že pokud platí

$$C_k = 2 \int_0^1 \varphi(x) \sin(k\pi x) \mathrm{d}x,$$

potom na intervalu $[0, 1]$ platí

$$\sum_{k=1}^{\infty} C_k \sin(k\pi x) = \varphi(x).$$

Máme tedy koeficienty C_k, které je možno použít pro konečný zápis řešení naší úlohy.

[15] stejnoměrná konvergence, viz http://cs.wikipedia.org/wiki/Stejnoměrná_konvergence

4.6.1 Fourierova metoda (separace proměnných) III

Řešení rovnice (4.7), které splňuje podmínky (4.8) je

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k \sin(k\pi x) e^{-\lambda^2 t},$$

kde

$$C_k = 2\int_0^1 \varphi(x)\sin(k\pi x)\mathrm{d}x.$$

Podobně, kmity struny jednotkové délky, popsané vlnovou rovnicí

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

s okrajovými podmínkami

$$u(0,t) = 0 = u(1,t)$$

(struna upevněná na koncích) a počátečními podmínkami

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \psi(x).$$

(počáteční poloha a rychlost všech bodů struny) jsou dány vztahem

$$u(x,t) \\ = \sum_{k=1}^{\infty} (a_n \cos(k\pi t) + b_n \sin(k\pi t)) \sin(k\pi x),$$

kde

$$a_k = 2\int_0^1 \varphi(x)\sin(k\pi x)\mathrm{d}x$$

a

$$b_k = 2\int_0^1 \psi(x)\cos(k\pi x)\mathrm{d}x.$$

4.7 Transformace do křivočarých souřadnic, sféricky symetrické rovnice

4.7.1 Polární, cylindrické a sférické souřadnice

Polární souřadnice v rovině jsme zavedli v kapitole o dvojném integrálu na straně 42.

Cylindrické souřadnice[16] jsou souřadnice v prostoru, kde proměnné x a y vyjádříme stejně jako v polárních souřadnicích a proměnnou z necháme stejnou jako v souřadnicích kartézských.

Sférické souřadnice[17] jsou jakási analogie dobře známých zeměpisných souřadnic[18], používaných Rozdíl je pouze v tom, že úhel udávající „zeměpisnou délku“ měříme v intervalu $[0, 2\pi)$ (tj. nemáme analogii pro východní a západní délku) a úhel udávající „zeměpisnou šířku“ měříme v intervalu $[0, \pi]$, kde „severní pól“ má souřadnici 0 a „jižní pól“ souřadnici π („rovník“ má souřadnici $\frac{\pi}{2}$ a nemáme analogii pro „severní šířku“ a „jižní šířku“).

[16] http://cs.wikipedia.org/wiki/Válcová_soustava_souřadnic
[17] http://cs.wikipedia.org/wiki/Sférické_souřadnice
[18] http://cs.wikipedia.org/wiki/Zeměpisné_souřadnice

4.7.2 Odvození difuzní rovnice v polárních souřadnicích

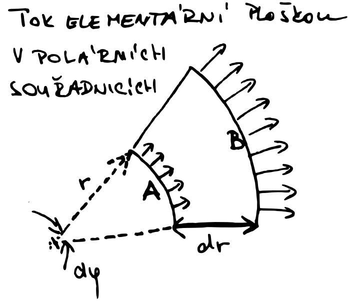
Zkusíme odvodit difuzní rovnici pro případ polárních souřadnic. Pro jednoduchost uvažujme, že problém je radiálně symetrický – tj. že všechny hodnoty závisí jenom na vzdálenosti od počátku. Zejména tedy, počítáme-li tok elementární ploškou na obrázku 21, je nenulový tok pouze na stranách A a B. Tok oběma bočními stranami je nulový. Pro zjednodušení, nebudeme při odvození rovnice postupovat opatrně jako na straně 72, ale napíšeme bilanci přímo pro elementární plošku na obrázku.

- Obsah plošky je $r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}r$, množství veličiny popsané hustotou $u(r)$ je $ur\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}r$ a rychlost změny tohoto množství je $r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}r\dfrac{\partial u}{\partial t}$.
- Je-li vydatnost zdrojů dána hustotou $\sigma(r)$, je celkové množství veličiny které vznikne v oblasti rovna $\sigma r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}r$.
- Tok stranou A je součinem délky strany $r\mathrm{d}\varphi$ a intenzity toku $\Phi(r)$, tj. $\Phi(r)r\mathrm{d}\varphi$. Strana B je ve vzdálenosti $r+\mathrm{d}r$ od počátku a je-li intenzita toku v tomto bodě $\Phi(r+\mathrm{d}r)$, je tok stranou B roven $\Phi(r+\mathrm{d}r)(r+\mathrm{d}r)\mathrm{d}\varphi$. Pro vyjádření celkového toku přes hranici musíme tok přes stranu A odečíst od toku přes stranu B a využitím definice parciální derivace dostáváme

$$\underbrace{\Phi(r+\mathrm{d}r)(r+\mathrm{d}r)\mathrm{d}\varphi}_{\text{tok přes } B}-\underbrace{\Phi(r)r\mathrm{d}\varphi}_{\text{tok přes } A}=\frac{\Phi(r+\mathrm{d}r)(r+\mathrm{d}r)-\Phi(r)r}{\mathrm{d}r}\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}r=\frac{\partial}{\partial r}\Big(r\Phi(r)\Big)\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}r$$

Rovnice kontinuity (4.1) a difuzní rovnice (4.3) mají v polárních souřadnicích tvar, který nalezneme z celkové bilance pro elementární oblast vydělením členem $r\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi$ a použitím Fickova zákona $\Phi=k\dfrac{\partial u}{\partial r}$, tj.

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\Big(r\Phi(r)\Big)=\sigma \qquad \text{a} \qquad \frac{\partial u}{\partial t}+k\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\Big(r\frac{\partial u}{\partial r}\Big)=\sigma.$$



Obrázek 21: Polární souřadnice – tok elementární ploškou

4.7.3 Diferenciální operátory v křivočarých souřadnicích

4.7.4 Kmity kruhové membrány