Aplikovaná Matematika (2/13) 21.2.2014

①

- OBYČEJNÁ DERIVACE

$$f'(x) = \frac{df}{dx} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Rychlost změny $f(x)$

- PARCIÁLNÍ DERIVACE .. pro funkce více proměnných

$f(x,y) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h,y) - f(x,y)}{h} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x,y+h) - f(x,y)}{h}}$$

- Rychlost změny $f(x,y)$ při změnách x resp. y
- Pokud se x změní o Δx, potom se $f(x,y)$ změní přibližně o $\frac{\partial f}{\partial x}\Delta x$.
- Pokud se y změní o Δy, potom se $f(x,y)$ změní přibližně o $\frac{\partial f}{\partial y}\Delta y$
- Pokud se mění x i y, změny se sčítají.

$$f(x,y) \approx f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0)$$

Parciální derivace = obyčejná derivace funkce, která vzniká na řezu rovinou $x = \text{konst.}$ nebo $y = \text{konst.}$

GRADIENT

$$\text{grad } f = \nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

ve 3D: $$\text{grad } f = \nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)$$

Formálně definujeme nabla operátor $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$

a $$\text{grad } f = \nabla \cdot f = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \cdot f$$

LOKÁLNÍ EXTRÉMY

$f(x,y)$ má v bodě (x_0, y_0) lokální maximum, pokud v nějakém okolí bodu (x_0, y_0) neexistuje bod s větší funkční hodnotou než $f(x_0, y_0)$.

Analogicky definujeme minimum.

Má-li $f(x,y)$ v bodě (x_0, y_0) lokální extrém, mají lokální extrém i funkce na řezu rovinami $x = x_0$ a $y = y_0$ $\Rightarrow$ parciální derivace v (x_0, y_0) nemohou být kladné ani záporné $\Rightarrow$ gradient v lokálním extrému je nula nebo neexistuje

Lineární aproximace v okolí bodu (x_0, y_0)

$$f(x,y) \approx f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\,(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\,(y-y_0)$$

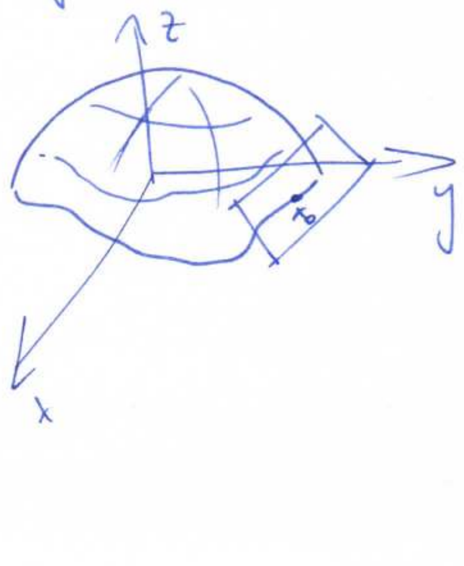
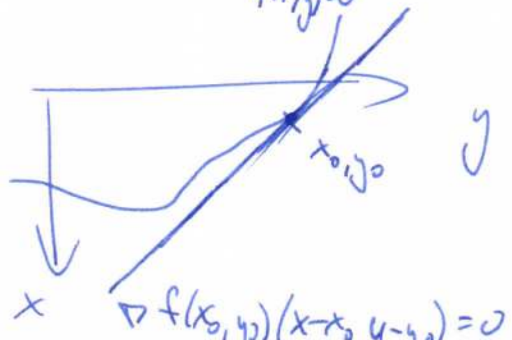
pomocí gradientu:

$$f(x,y) \approx f(x_0,y_0) + \nabla f(x_0,y_0)\cdot(x-x_0,\ y-y_0)$$

tečná rovina ke grafu funkce

$$z = f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0)$$

$$z = f(x_0,y_0) + \nabla f(x_0,y_0)\cdot(x-x_0,\ y-y_0)$$

3D	Řez pro $z=0$
Fce $z = f(x,y)$	Vrstevnice $0 = f(x,y)$ (implicitní funkce)
Tečná rovina $z = f(x_0,y_0) + \nabla f(x_0,y_0)(x-x_0, y-y_0)$ kde $f(x_0,y_0) = 0$  	Tečna $0 = \nabla f(x_0,y_0)(x-x_0, y-y_0)$  $\nabla f(x_0,y_0)(x-x_0,y-y_0)=0$ Směrnice tečny: $k = -\dfrac{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)}{\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)}$

Podobně vrstevnice v bodě $f(x_0, y_0)$:

$$z = f(x_0, y_0) + \nabla f(x_0, y_0)(x - x_0, y - y_0)$$

$\Downarrow$ řez rovinou $z = f(x_0, y_0)$ vede z tečné roviny tečnu k vrstevnici.

$$f(x_0, y_0) = f(x_0, y_0) + \nabla f(x_0, y_0)(x - x_0, y - y_0)$$

$$\boxed{0 = \nabla f(x_0, y_0) \cdot (x - x_0, y - y_0)}$$

(tečna k vrstevnici v bodě (x_0, y_0))

gradient je normálový vektor tečny, proto je kolmý na vrstevnici.

Druhé derivace .. derivace z derivace

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}}$$

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) \\ \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \end{array}\right\}$$

pro hladké funkce platí

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x}}$$ (Schwarzova věta)

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}}$$

Laplaceův operátor

$$\Delta f = \nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \quad \text{resp.} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

Formálně: $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \nabla \cdot \nabla$

$$\Delta f = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) f$$

Využití parciálních derivací

1) Potenciální energie

Je-li $\vec{F}$ síla působící na objekt v silovém poli, ve kterém je možno zavést potenciální energii E, platí

$$\boxed{\vec{F} = -\nabla E}$$

2) Vlnová rovnice

Veškeré vlnění nebo chvění (mechanické i elektrické) je popsáno vlnovou rovnicí

$$\boxed{\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta u}$$

kde Δ je Laplaceův operátor ($\Delta = \nabla^2$) a u výchylka. V odvození je skryta i lineární aproximace pomocí derivací při malých výchylkách.

3) Rovnice vedení tepla

Vedení tepla v prostředí bez zdrojů nebo spotřebičů tepla je popsáno rovnicí

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial t} = D\,\Delta u}$$

kde $\Delta = \nabla^2$ je Laplaceův operátor.

Aplikovaná matematika

přednáška 3

VEKTOROVÁ ANALÝZA

Minule: $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $\quad f(x,y)$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x,y+h)-f(x,y)}{h}$$

$$\nabla f(x,y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right) \quad \ldots \text{ gradient}$$

Nyní: $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ nebo $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

Bodům v $\mathbb{R}^n$ jsou přiřazeny vektory z $\mathbb{R}^n$

$$\vec{F} = (P, Q) = P\,i + Q\,j \quad \text{kde } P, Q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

$$\vec{F} = (P, Q, R) = P\,i + Q\,j + R\,k \quad \text{kde } P, Q, R : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$$

Př: a) homogenní pole $\quad \vec{F}_1 = (0, -1) \quad \ldots$ konstantní

b) radiální pole $\quad \vec{F}_2 = (x, y) \quad \ldots$ vektor směřuje od počátku soust. souř.

c) rotující pole $\quad \vec{F}_3 = (-y, x) \quad \ldots$ kolmé na $\vec{F}_2$, vektor tečný ke kružnici se středem v počátku soust. souř.

d) Skalární násobek vektorového pole je vekt. pole, které má stejný směr jako pole původní

$$\vec{F}_4 = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}(x, y) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\,\vec{i} + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\,\vec{j}$$

$\vec{F}_4$ ... Radiální vektorové pole, každý vektor má jednotkovou délku

e) $$\vec{F}_5 = -\frac{1}{x^2+y^2}\,\vec{F}_4 = -\frac{x}{(x^2+y^2)^{3/2}}\,\vec{i} - \frac{y}{(x^2+y^2)^{3/2}}\,\vec{j}$$

$\vec{F}_5$ .. Radiální vektorové pole mířící do počátku, ubývá s druhou mocninou vzdálenosti od počátku (např. gravitační pole nebo elektrostatické pole generované hmotným nebo nabitým bodem)

Operátor divergence

a) $\vec{F}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\vec{F} = (P, Q)$

$$\boxed{\operatorname{div} \vec{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}}$$

b) $\vec{F}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\vec{F} = (P, Q, R)$

$$\boxed{\operatorname{div} \vec{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}}$$

Formálně

$$\operatorname{div} \vec{F} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right) \cdot (P, Q) = \nabla \cdot (P, Q)$$

Proto metody divergenci označujeme

$$\boxed{\nabla \vec{F}}$$

Př: a) Rovnice kontinuity:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{j} = S$$

b) Je-li $\vec{F} = \nabla f$ (gradient), potom

$$\operatorname{div} \vec{F} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \Delta f \quad \text{(Laplaceův operátor)}$$

Divergence gradientu je Laplaceův operátor

Pozn: je-li $\operatorname{div} \vec{F} = 0$, nazýváme se vektorové pole $\vec{F}$ nezřídlové.

Operátor rotace (angl. curl)

- Pro $\vec{F}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\vec{F} = (P, Q, R)$ definujeme

$$\boxed{\operatorname{rot} \vec{F} := \nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}}$$

- Pro $\vec{F}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ přidáme třetí komponentu (nulovou) a pracujeme jako s funkcí $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$.

- Je-li $\operatorname{rot} \vec{F} = 0$ (nulový vektor) nazýváme vektorové pole $\vec{F}$ <u>nevírové</u>.

Př: Maxwellovy rovnice – plně popisují elmg. pole!

Verze pro vakuum:

1) $\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$ (Gaussův zákon elektrostatiky)

2) $\operatorname{div} \vec{B} = 0$ (neexistují „magnetické náboje")

3) $\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ (Faradayův zákon elmg. indukce)

4) $\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ (Ampérův zákon se započtením posuvným proudem)

Př: Buď $\varphi(x,y,z): \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ skalární funkce a

$\vec{F}(x,y,z) = \nabla \varphi(x,y,z)$. Určete rot $\vec{F}$.

Řešení: $\vec{F} = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)$

$$\operatorname{rot} \vec{F} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x} & \frac{\partial \varphi}{\partial y} & \frac{\partial \varphi}{\partial z} \end{vmatrix} =$$

$$= i \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial \varphi}{\partial z} + k \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial y} + j \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial \varphi}{\partial x}$$

$$- \left(k \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial \varphi}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial \varphi}{\partial y} + j \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)$$

$$= i \left(\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial \varphi}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) + j \left(\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)$$

$$+ k \left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) = 0$$

Schwarzova věta

$\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial y}$ a analogicky pro další proměnné

$\boxed{\text{Rotace gradientu je nula !}}$

Př: Buď $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ hladké vektorové pole

Vypočtěte $\operatorname{div}(\operatorname{rot} \vec{F})$, tj. $\nabla \cdot (\nabla \times \vec{F})$

Řešení: $\vec{F} = P \cdot i + Q \cdot j + R \cdot k$

$$\operatorname{rot} \vec{F} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} =$$

$$= i \cdot \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) + j \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) + k \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right)$$

$$\operatorname{div}(\operatorname{rot} \vec{F}) = \frac{\partial^2 R}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 P}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 R}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 Q}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 P}{\partial z \partial y} = 0 + 0 + 0 = 0$$

protože podle Schwarzovy věty platí $\frac{\partial^2 R}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 R}{\partial y \partial x}$,

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial z} = \frac{\partial^2 Q}{\partial z \partial x}, \quad \frac{\partial^2 P}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 P}{\partial z \partial y}.$$

$$\boxed{\text{Divergence rotace je nula!}}$$

Př Pro jaká n má vektorové pole

$$\vec{F} = \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^n}(x,y,z) \text{ nulovou divergenci?}$$

Řešení: Použijeme

$$\nabla(f\cdot\vec{G}) = f\cdot\nabla\vec{G} + \vec{G}\,\nabla f$$

$$f = \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^n}, \quad \frac{\partial f}{\partial x} = -n\,(x^2+y^2+z^2)^{-n-1}\cdot 2x = -\frac{2nx}{(x^2+y^2+z^2)^{n+1}}$$

$$\vec{G} = (x,y,z), \quad \nabla\vec{G} = 1+1+1 = 3$$

$$\nabla\vec{F} = \nabla(f\cdot\vec{G}) =$$

$$= \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^n}\cdot 3 + (x,y,z)\left(\frac{-2nx}{(x^2+y^2+z^2)^{n+1}}, \frac{-2ny}{-\shortparallel-}, \frac{-2nz}{-\shortparallel-}\right)$$

$$= \frac{3}{(x^2+y^2+z^2)^n} + \frac{-2nx^2-2ny^2-2nz^2}{(x^2+y^2+z^2)^{n+1}} =$$

$$= \frac{3}{(x^2+y^2+z^2)^n} + \frac{-2n(x^2+y^2+z^2)}{(x^2+y^2+z^2)^{n+1}} = \frac{3-2n}{(x^2+y^2+z^2)^n}$$

Divergence je nulová pro $n = \frac{3}{2}$, v tomto případě máme

$$\vec{F} = \frac{1}{x^2+y^2+z^2}\cdot\frac{(x,y,z)}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

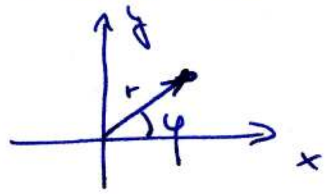
Derivace složené funkce

- $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad \left[f(g(x))\right]' = f'(g(x))\, g'(x)$

jiný zápis: $$\frac{df}{dx} = \frac{df}{dg} \cdot \frac{dg}{dx}$$

- $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

Příklad:



$f(x,y)$

$x = r \cdot \cos\varphi$
$y = r \cdot \sin\varphi$

r, φ -- polární souřadnice

Známe $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$. Kolik je $\frac{\partial f}{\partial r}$?

Vzorec pro derivaci složené fce více proměnných

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial u} &= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial f}{\partial v} &= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} \end{aligned}}$$

je-li $f(x,y)$, $x(u,v)$ a $y(u,v)$.

Analogicky pro jiný počet proměnných.

- Derivace podél vrstevnice

$$f(x,y) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

$f(x,y) = C \Rightarrow$ vrstevnice na úrovni C

$$\left.\begin{array}{l} x = x(t) \\ y = y(t) \end{array}\right\}$$ parametrické rovnice vrstevnice na úrovni C

$f(x(t), y(t))$ ... funkce podél vrstevnice

a) $\frac{df}{dt} = 0$ ... derivace konstanty

b) $\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)\left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right)$

... pomocí derivace složené funkce

a+b) $\Rightarrow$ $$0 = \underbrace{\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)}_{\text{gradient}}\underbrace{\left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right)}_{\text{tečna k vrstevnici}}$$

Skalární součin je nula pro kolmé vektory $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ gradient je kolmý na vrstevnice

- Diferenciální operátory v polárních souřadnicích

$$\operatorname{grad} f = \left(\underset{\substack{\uparrow \\ \text{radiální} \\ \text{komponenta}}}{\frac{\partial f}{\partial r}}, \underset{\substack{\uparrow \\ \text{polární} \\ \text{komponenta}}}{\frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \varphi}}\right)_{\text{pol.}}$$

$$\Delta f = \nabla^2 f = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}$$

Aplikovaná matematika (4/13)

9.3.2017

KŘIVKOVÝ INTEGRÁL

1.
Křivka zadaná parametricky v $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^3$: $C: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$
nebo $C: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$

V praxi je C po částech spojité a diferencovatelné

Př 1.
a) $C: \begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases}, \quad t \in [0, 2\pi]$ Platí $x^2 + y^2 = \cos^2 t + \sin^2 t = 1$
tj. C je jednotková kružnice

b) $C: \begin{cases} x = \cos t^2 \\ y = \sin t^2 \end{cases}, \quad t \in [0, \sqrt{2\pi}]$ — " —

c) $C: \begin{cases} x = \cos(2\pi t) \\ y = \sin(2\pi t) \end{cases}, \quad t \in [0, 1]$ — " —

Tři různé parametrické rovnice pro jednotkovou kružnici.

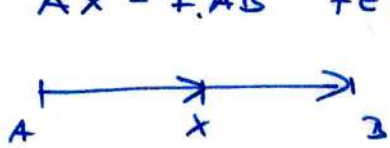
Př 2. křivka grafu funkce $y = f(x)$ pro $x \in [a, b]$

$C: \begin{cases} x = t \\ y = f(t) \end{cases}, \quad t \in [a, b]$

Př 3: Úsečka AB: $X \in AB \iff \vec{AX} = t . \vec{AB} \quad t \in [0, 1]$

$X = A + t \cdot \vec{AB}$

$\vec{AB} = B - A$



Parametrická křivka: $x = x(t)$
$y = y(t)$

Vektorový tvar: $\vec{r} = (x(t), y(t))$

Tečný vektor: $d\vec{r} = (x'(t), y'(t))$

Délka tečného vektoru: $ds = |d\vec{r}| = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}$

Podobně pro prostorová křivka.

2. Křivkový integrál prvního druhu

$$\boxed{\int_C f(x,y)\,ds := \int_a^b f(x(t),y(t))\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}\,dt}$$

kde f je fce dvou proměnných a C křivka v $\mathbb{R}^2$ daná parametrickými rovnicemi $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$, $t \in [a,b]$

Pozn.: Je možné ukázat, že křivkový integrál nezávisí na konkrétní parametrizaci křivky C.

Vlastnosti:

- $\displaystyle\int_C f+g\,ds = \int_C f\,ds + \int_C g\,ds$
- $\displaystyle\int_C k\cdot f\,ds = k\int_C f\,ds \qquad k\in\mathbb{R}$
- $\displaystyle\int_C f\,ds = \int_{C_1} f\,ds + \int_{C_2} f\,ds \qquad C = C_1\cup C_2$

Použití

$f(x,y)$	$\int_C f(x,y)\,ds$
1	délka křivky C
$\tau(x,y)$ .. lineární hustota	hmotnost křivky C, M_c
$[x\cdot\tau(x,y),\ y\cdot\tau(x,y)]\cdot\frac{1}{M_c}$	souřadnice těžiště křivky C
$x^2\,\tau(x,y)$	moment setrvačnosti vzhledem k ose y
$y^2\,\tau(x,y)$	mom. setrvač. k ose x
$\rho^2(x,y)\,\tau(x,y)$	mom. setrvačnosti vzhledem obecné ose. $\rho(x,y)$ je vzdálenost od osy otáčení

Výpočet

Př: $\int_C y\, ds$ C.. čtvrtkružnice o poloměru $r=1$ v 1. kvadrantu

Varianta 1: $C: \vec{r} = (\cos t, \sin t)$ $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$ $f(x,y) = y$

$$d\vec{r} = (-\sin t, \cos t)$$

$$ds = |d\vec{r}| = \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t} = 1$$

$$f(\vec{r}(t)) = \sin t$$

$$\int_C y\, ds = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \cdot 1 \cdot dt = \left[-\cos t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 0(-1) = 1$$

Varianta 2: $C: \vec{r} = (t, \sqrt{1-t^2})$ $t \in [0,1]$

$$d\vec{r} = \left(1, -\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \cdot 2t\right) = \left(1, \frac{-t}{\sqrt{1-t^2}}\right)$$

$$ds = |d\vec{r}| = \sqrt{1 + \frac{t^2}{1-t^2}} = \sqrt{\frac{1}{1-t^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}, \quad f(\vec{r}) = \sqrt{1-t^2}$$

$$\int_C y\, ds = \int_0^1 \sqrt{1-t^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\, dt = \int_0^1 1\, dt = 1$$

Varianta 3: $C: \vec{r} = (\sqrt{t}, \sqrt{1-t})$ $t \in [0,1]$

$$d\vec{r} = \left(\frac{1}{2\sqrt{t}}, \frac{-1}{2\sqrt{1-t}}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{t}}, -\frac{1}{\sqrt{1-t}}\right)$$

$$ds = |d\vec{r}| = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{1}{t} + \frac{1}{1-t}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{t(1-t)}}, \quad f(\vec{r}) = \sqrt{1-t}$$

$$\int_C y\, ds = \int_0^1 \sqrt{1-t}\, \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{t(1-t)}}\, dt = \int_0^1 \frac{1}{2\sqrt{t}}\, dt = \left[\sqrt{t}\right]_0^1 = 1$$

Pro tři různé parametrizace máme obdržet stejný výsledek!

y-ová poloha těžiště čtvrtkružnice:

$$\frac{\int_C y\, ds}{\int_C 1\, ds} = \frac{1}{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi} \approx 0.637$$

(z fyzikálních důvodů očekáváme více než 0.5, což se potvrdilo)

3. Křivkový integrál druhého druhu

$$\boxed{\int_C \vec{F}\, d\vec{r} = \int_C P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy := \int_a^b P(x(t),y(t))\,x'(t)\,dt + Q(x(t),y(t))\,y'(t)\,dt}$$

kde C je křivka s par. rovnicemi $C: \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t), \end{cases} \ t \in [a,b]$,

$\vec{F}(x,y) = (P(x,y), Q(x,y))$ je vektorová funkce

<u>Pozn.</u>: Podobně jako k. int. 1. druhu nezávisí na konkrétní parametrizaci křivky C.

<u>Pozn.</u>: Křivkový integrál 1. druhu nezávisí ani na orientaci křivky. Křivkový integrál 2. druhu mění změnou orientace znaménko, proto musíme zadat který bod je počáteční a který koncový

<u>Použití</u>:

- $\int_C \vec{F}\, d\vec{r} = \int_C P\,dx + Q\,dy$ ... <u>práce</u> vykonaná silovým polem $\vec{F}$ při přemístění tělesa po křivce C
- $\int_C -Q\,dx + P\,dy$ ... <u>tok</u> vektorového pole $\vec{F} = (P,Q)$ křivkou C
- $\left|\oint_{\partial\Omega} x\,dy\right|$, $\left|\oint_{\partial\Omega} y\,dx\right|$ ... <u>obsah</u> množiny Ω s hraniční křivkou $\partial\Omega$

Výpočet

$$\vec{F} = y^2\vec{i} + (x+y)\vec{j} = \boxed{(y^2, x+y)}$$

C_1 .. úsečka z bodu $(0,0)$ do bodu $(1,1)$

C_2 .. parabola x^2 -"-

$\boxed{\int_{C_1} \vec{F}\,d\vec{r}}$

$$C_1 \equiv \vec{r} = (\overset{x}{t}, \overset{y}{t}) \qquad t \in [0,1]$$

$$d\vec{r} = (1, 1)$$

$$\vec{F}(\vec{r}(t)) = (\underbrace{t^2}_{y^2}, \underbrace{t+t}_{x+y}) = (t^2, 2t)$$

$$\vec{F}\,d\vec{r} = 1 \cdot t^2 + 1 \cdot 2t = t^2 + 2t$$

$$\int_{C_1} \vec{F}\,d\vec{r} = \int_0^1 t^2 + 2t \; dt = \left[\frac{1}{3}t^3 + t^2\right]_0^1 = \frac{1}{3} + 1 - 0 = \frac{4}{3}$$

$\boxed{\int_{C_2} \vec{F}\,d\vec{r}}$

$$C_2 \equiv \vec{r} = (\overset{x}{t}, \overset{y}{t^2}) \qquad t \in [0,1] \qquad d\vec{r} = (1, 2t)$$

$$\vec{F}(\vec{r}(t)) = (\underbrace{(t^2)^2}_{y^2}, \underbrace{t+t^2}_{x+y}) = (t^4, t+t^2)$$

$$\vec{F}\,d\vec{r} = (t^4) \cdot 1 + (t+t^2) \cdot 2t = t^4 + 2t^2 + 2t^3$$

$$\int_{C_2} \vec{F}\,d\vec{r} = \int_0^1 t^2 + 2t^3 + 2t^2 \; dt = \left[\frac{1}{5}t^5 + \frac{2}{4}t^4 + \frac{2}{3}t^3\right]_0^1 = \frac{1}{5} + \frac{2}{4} + \frac{2}{3} - 0 =$$

$$= \frac{41}{30}$$

Po různých křivkách vychází integrál různý, přestože počáteční a koncové body křivek splývají. Nemůže se tedy jednat o práci v poli s potenciální energií...

Pozn.: Křivkový integrál druhého druhu má následující vlastnost:

- $$\int_{C_1} \vec{F}\, d\vec{r} + \int_{C_2} \vec{F}\, d\vec{r} = \int_{C} \vec{F}\, d\vec{r} \quad \text{kde } C = C_1 \cup C_2$$

- $$\int_{C} \vec{F}\, d\vec{r} + \int_{C} \vec{G}\, d\vec{r} = \int_{C} \left(\vec{F} + \vec{G}\right) d\vec{r}$$

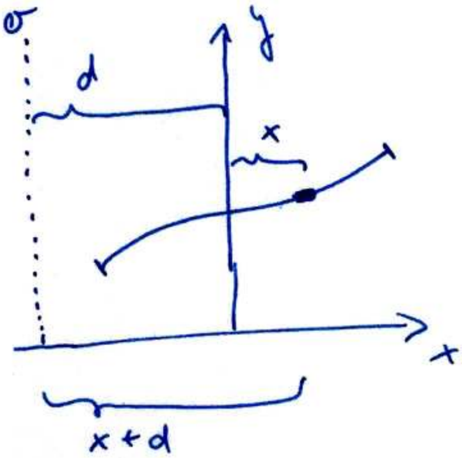
- $$k \cdot \int_{C} \vec{F}\, d\vec{r} = \int_{C} k \cdot \vec{F}\, d\vec{r} \qquad k \in \mathbb{R}$$

Pozn.: a) Maxwellova rce v diferenciální formě: $\mathrm{rot}\, \vec{B} = \mu_0 \cdot \vec{j}$
(stacionární případ)

b) Maxwellova rce v integrální formě: $\oint_C \vec{B}\, d\vec{r} = \mu_0 I$

PE

Nechť křivka C splňuje $\int_C x\,\tau(x,y)\,ds = 0$, tj. osa y prochází těžištěm. Určete moment setrvačnosti vzhledem k ose rovnoběžné s y ve vzdálenosti d od osy y.



$$J_\sigma = \int_C (x+d)^2 \tau \, ds =$$

$$= \int_C \left(x^2 + 2xd + d^2\right) \tau \, ds =$$

$$= \underbrace{\int_C x^2 \tau \, ds}_{J_T} + \underbrace{2d \int x \tau \, ds}_{0} + \underbrace{d^2 \int \tau \, ds}_{d^2 \cdot m_c}$$

$$= J_T + 0 + d^2 \cdot m_c$$

$$J_\sigma = J_T + m_c \, d^2$$

moment vzhledem k ose otočení ve vzdálenosti d od těžiště

moment vzhledem k ose otočení procházející těžištěm

celková hmotnost křivky

vzdálenost os

(Steinerova věta)

Výpočet Alternativní zápis výpočtu ze strany 3

Př $\int_C y\,ds$ C.. čtvrtkružnice o poloměru $r=1$ v 1. kvadrantu.

1) $C = \begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t, \; t\in[0,\frac{\pi}{2}] \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x' = -\sin t \\ y' = \cos t \end{matrix} \Rightarrow ds = \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t} = 1$

$$\int_C y\,ds = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \; 1\,dt = \left[-\cos t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 0-(-1) = 1$$

2) $C = \begin{cases} x = t \\ y = \sqrt{1-t^2}, \; t\in[0,1] \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x' = 1 \\ y' = \frac{-2t}{2\cdot\sqrt{1-t^2}} \end{matrix} \Rightarrow ds = \sqrt{1+\frac{t^2}{1-t^2}} =$

$$= \sqrt{\frac{1}{1-t^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$$

$$\int_C y\,ds = \int_0^1 \sqrt{1-t^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt = \int_0^1 1\,dt = 1$$

3) $C = \begin{cases} x = \sqrt{t} \\ y = \sqrt{1-t} \quad t\in[0,1] \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x' = \frac{1}{2\sqrt{t}} \\ y' = \frac{-1}{2\sqrt{1-t}} \end{matrix} \Rightarrow ds = \sqrt{\frac{1}{4t}+\frac{1}{4(1-t)}} =$

$$= \sqrt{\frac{1}{4}\,\frac{1}{t(1-t)}} = \frac{1}{2}\,\frac{1}{\sqrt{t(1-t)}}$$

$$\int_C y\,ds = \int_0^1 \sqrt{1-t}\,\frac{1}{2\sqrt{t(1-t)}}\,dt = \int_0^1 \frac{1}{2\sqrt{t}}\,dt = \left[\sqrt{t}\right]_0^1 = 1$$

- Pro tři různé parametrizace máme třikrát stejný výsledek!

- $$\frac{\int_C y\,ds}{\int_C 1\,ds} = \frac{1}{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi} \approx 0.637$$ .. y-ová poloha těžiště čtvrtkružnice

Výpočet

Alternativní zápis výpočtu ze strany 5

$$\vec{F} = y^2\,\vec{i} + (x+y)\,\vec{j} = (y^2,\ x+y)$$

C_1 .. úsečka z bodu $(0,0)$ do bodu $(1,1)$

C_2 .. parabola x^2 – " ______

C_1

$$C_1:\quad x = t,\quad y = t,\quad t\in[0,1] \Rightarrow x' = 1,\quad y' = 1$$

$$\int_{C_1} \vec{F}\,d\vec{r} = \int_0^1 \overbrace{t^2}^{y^2}\cdot\overbrace{1}^{x'}\,dt + \overbrace{(t+t)}^{x+y}\,\overbrace{1}^{y'}\cdot dt =$$

$$= \int_0^1 t^2 + 2t\,dt = \left[\frac{t^3}{3} + t^2\right]_0^1 = \frac{1}{3} + 1 - 0 = \frac{4}{3}$$

C_2

$$C_2:\quad x = t,\quad y = t^2 \Rightarrow x' = 1,\quad y' = 2t$$

$$\int_{C_2} \vec{F}\,d\vec{r} = \int_0^1 \overbrace{(t^2)^2}^{y^2}\cdot\overbrace{1}^{x'}\cdot dt + \overbrace{(t+t^2)}^{x+y}\cdot\overbrace{2t}^{y'}\,dt$$

$$= \int_0^1 t^4 + 2t^3 + 2t^2\,dt = \left[\frac{t^5}{5} + \frac{t^4}{2} + \frac{2}{3}t^3\right]_0^1 =$$

$$= \frac{1}{5} + \frac{1}{2} + \frac{2}{3} - 0 = \frac{41}{30}$$

Po jiné křivce je výsledný integrál jiný $\Rightarrow$ nemůže se jednat o práci v poli s potenciální energií

Aplikovaná matematika (V/13) ①

16.3.2017

DVOJNÝ INTEGRÁL

Případ 1: $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\varphi, \psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$, $a, b \in \mathbb{R}$

$$\Omega : \boxed{a \le \underline{x} \le b \quad , \quad \varphi(x) \le \underline{y} \le \psi(x)}$$

$$\boxed{\iint_{\Omega} f(x,y)\,dx\,dy := \int_a^b \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\, \underline{dy} \; \underline{dx}}$$

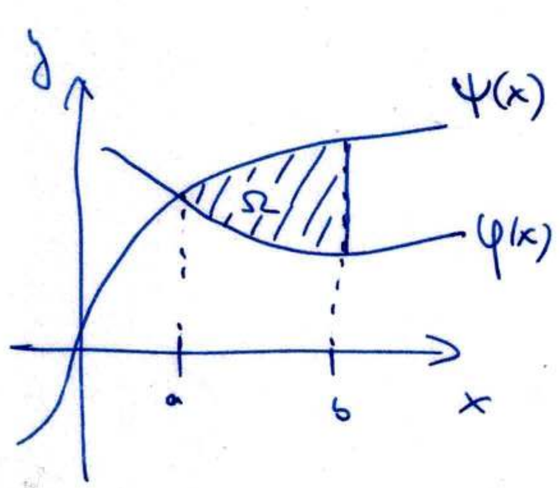
Případ 2:

$$\Omega : \boxed{a \le \underline{y} \le b \quad , \quad \varphi(y) \le \underline{x} \le \psi(y)}$$

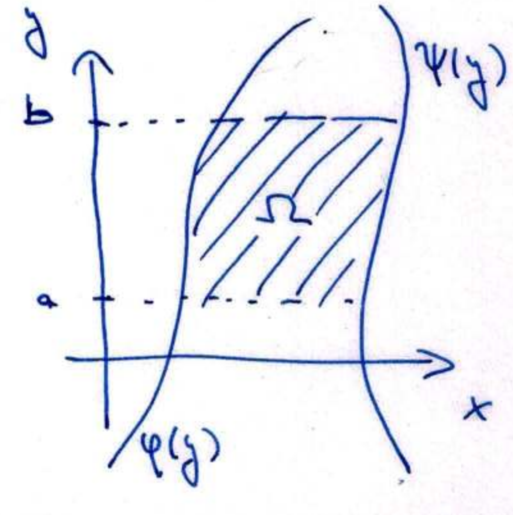
$$\boxed{\iint_{\Omega} f(x,y)\,dx\,dy := \int_a^b \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x,y)\, \underline{dx} \; \underline{dy}}$$

Grafiky

Případ 1

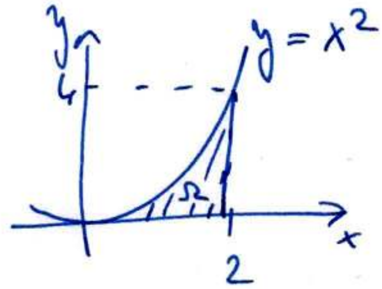


Případ 2



Případ 1a 2 současně: Pokud se nejedná o obdélník, je nutno přepočítat meze!

$$\boxed{\begin{aligned}0 &\le x \le 2\\ 0 &\le y \le x^2\end{aligned}} \Longrightarrow$$



$$\Longleftarrow \boxed{\begin{aligned}0 &\le y \le 4\\ \sqrt{y} &\le x \le 2\end{aligned}}$$

Příklad 1 $\iint_\Omega f(x,y)\,dx\,dy$, Ω viz výše, $f(x,y) = x^2 y$

$$\iint_\Omega f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^2 \int_0^{x^2} x^2 y \,dy\,dx = \int_0^2 \left[x^2 \frac{y^2}{2}\right]_0^{x^2} dx =$$

$$= \int_0^2 x^2 \frac{x^4}{2} - 0 \,dx = \frac{1}{2}\int_0^2 x^6 = \frac{1}{2}\left[\frac{x^7}{7}\right]_0^2 = \frac{1}{2}\frac{2^7}{7} = \frac{2^6}{7} = \frac{64}{7}$$

ANEBO

$$\iint_\Omega f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^4 \int_{\sqrt{y}}^2 x^2 y \,dx\,dy = \int_0^4 \left[y \frac{x^3}{3}\right]_{\sqrt{y}}^2 dy =$$

$$= \int_0^4 \left[\frac{8}{3} y - \frac{1}{3} y^{\frac{5}{2}}\right] dy = \left[\frac{4}{3} y^2 - \frac{1}{3}\frac{2}{7} y^{\frac{7}{2}}\right]_0^4 =$$

$$= \frac{4^3}{3} - \frac{2^8}{3.7} = \frac{4^3}{3}\left(1 - \frac{4}{7}\right) = \frac{4^3}{3} \cdot \frac{3}{7} = \frac{64}{7}$$

Stejné výsledky, v průběhu se počítají jinak obtížné integrály. (Vyzkoušet jednu cestu, pokud selže, tak zkusit druhou.)

Dvojný integrál má typické vlastnosti integrálu jako <u>linearita</u> vzhledem k funkci a <u>aditivita</u> vzhledem k oboru integrace. $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{R}$

- $$\iint_\Omega f + g \, dx\, dy = \iint_\Omega f \, dx\, dy + \iint_\Omega g \, dx\, dy$$
- $$\iint_\Omega k \cdot f \, dx\, dy = k \cdot \iint_\Omega f \, dx\, dy$$
- $$\iint_\Omega f \, dx\, dy = \iint_{\Omega_1} f \, dx\, dy + \iint_{\Omega_2} f \, dx\, dy$$

  pokud $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ a Ω_1, Ω_2 mají společnou nanejvýš hranici.

<u>Jednoduchý případ</u>: $f(x,y) = g(x) \cdot h(y)$

Ω obdélník $\quad a \le x \le b$, $\quad c \le y \le d$

$$\boxed{\iint_\Omega f(x,y)\, dx\, dy = \int_a^b g(x)\, dx \cdot \int_c^d h(y)\, dy}$$

$\Uparrow$ (ODVOZENÍ)

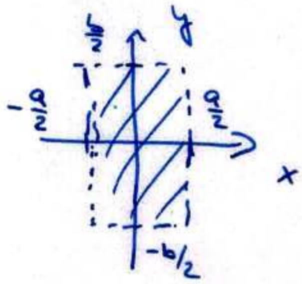
$$\ldots = \int_a^b \int_c^d \boxed{g(x)}\, h(y)\, dy\, dx = \int_a^b g(x) \boxed{\int_c^d h(y)\, dy}\, dx = \ldots$$

konstanta (vzhledem k y) $\qquad$ konstanta

POUŽITÍ $\iint dx\,dy$

$f(x,y)$	$\iint_\Omega f(x,y)\,dx\,dy$
1	obsah Ω
$\delta(x,y)$ .. plošná hustota	hmotnost Ω, m
$\frac{1}{m}\left[x\,\delta(x,y),\ y\,\delta(x,y)\right]$	poloha těžiště $[x_T, y_T]$
$\rho^2\cdot\delta(x,y)$	kvadratický moment ρ.. vzdálenost od osy často: $\rho=x$, $\rho=y$, $\rho=\sqrt{x^2+y^2}$

<u>Příklad 2</u> Ω .. obdélník o stranách a, b. Osa prochází těžištěm. Určujeme kvadratický moment vzhledem k x. $\delta(x,y)=1$.



$$I_x=\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}}\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} y^2\,dx\,dy=\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} y^2\,dy\cdot\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} dx=$$

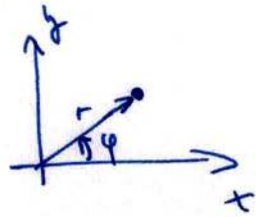
$$=\left[\frac{y^3}{3}\right]_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}}\cdot a=\left(\frac{b^3}{8.3}+\frac{b^3}{8.3}\right).a=\frac{b^3}{4.3}.a=\frac{1}{12}ab^3$$

$I_x=\frac{1}{12}a.b^3$ .. závisí více na výšce než na šířce

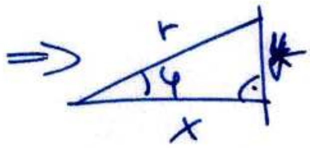
Je-li Ω průřez nosníku, souvisí I_x s tuhostí nosníku. Příklad ukazuje, že je lepší obdélníkový nosník postavený „nastojato", než čtvercový nebo obdélníkový naplocho a také ukazuje <u>kalibrát</u> je lepší.

Dvojný integrál v polárních souřadnicích

$$\boxed{\begin{aligned} x &= r\cdot\cos\varphi \\ y &= r\cdot\sin\varphi \end{aligned}}$$



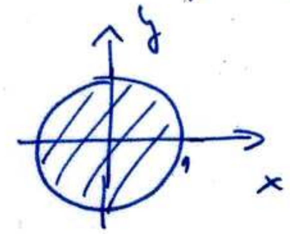
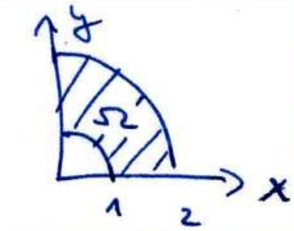
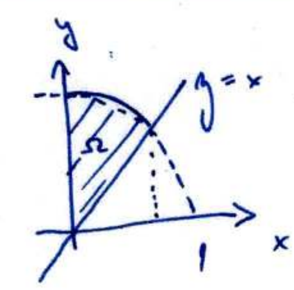
$\Longrightarrow$



$r > 0$

$\varphi \in [0, 2\pi]$ nebo $[-\pi, \pi]$ nebo analogicky

$[x,y]$ .. kartézské souřadnice, $[r,\varphi]$ polární souřadnice

1)	$-1 \le x \le 1$ $-\sqrt{1-x^2} \le y \le \sqrt{1-x^2}$		$0 \le r \le 1$ $0 \le \varphi \le 2\pi$
2)	Nelze zapsat pomocí jediné dvojice nerovností.		$1 \le r \le 2$ $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$
3)	$0 \le x \le \frac{\sqrt{2}}{2}$ $x \le y \le \sqrt{1-x^2}$		$0 \le r \le 1$ $\frac{\pi}{4} \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$

$\Uparrow$ „škaredé" meze

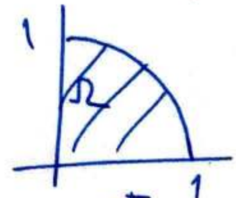
$\Uparrow$ „obdélníky" (v prostoru r,φ)

$$\boxed{\iint\limits_{\Omega_{kart.}} f(x,y)\,dx\,dy = \iint\limits_{\Omega_{pol.}} f(r\cdot\cos\varphi,\, r\cdot\sin\varphi)\cdot \underline{r}\cdot dr\,d\varphi}$$

Jakobián pro polární souř.

Příklad 3. Těžiště $\frac{1}{4}$ kruhu

$\delta(x,y) = 1$



$0 \le r \le 1$
$0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$

$$m = \iint_{\Omega} dx\,dy = \int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} r\,d\varphi\,dr = \int_0^1 r\,dr \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi =$$

$$= \left[\frac{r^2}{2}\right]_0^1 \cdot \frac{\pi}{2} = \left(\frac{1}{2} - 0\right)\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}$$

$$m \cdot x_T = \iint_{\Omega} x\,\delta(x,y)\,dx\,dy = \iint_{\Omega} x\,dx\,dy = \int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} r \cdot \cos\varphi \cdot r \cdot d\varphi\,dr$$

$$= \int_0^1 r^2\,dr \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi\,d\varphi = \left[\frac{r^3}{3}\right]_0^1 \left[\sin\varphi\right]_0^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= \left(\frac{1}{3} - 0\right)\left(1 - 0\right) = \frac{1}{3}$$

$$x_T = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{\pi}{4}} = \frac{4}{3 \cdot \pi} \approx 0.424$$

$y_T = \frac{4}{3\pi}$ (ze symetrie)

Příklad 4 (kardioida do polárních souřadnic)

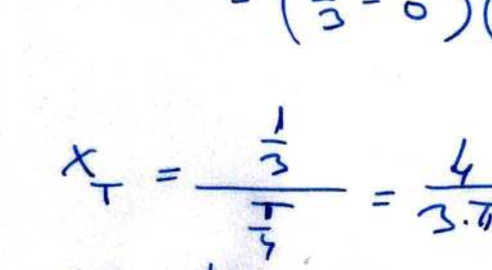
$r = 4 + 4 \cdot \sin\varphi$ Průsečík α: $y = 2$

$r \cdot \sin\alpha = 2$

$(4 + 4 \cdot \sin\alpha) \cdot \sin\alpha = 2$

$\Downarrow$ numericky

$\alpha = \alpha_0$



Přímka $y = 2 \Rightarrow r \cdot \sin\varphi = 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow r \ge \frac{2}{\sin\varphi}$

Ω: $\alpha_0 \le \varphi \le \pi - \alpha_0$, $\frac{2}{\sin\varphi} \le r \le 4 + 4\sin\varphi$

Aplikovaná matematika (6/13) 23.3.2017

INTEGRÁLNÍ VĚTY VEKTOROVÉ ANALÝZY

<u>Def</u>: $\vec{F}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ se nazývá <u>potenciálové vektorové pole</u>, pokud existuje skalární funkce $\varphi: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ taková, že $\boxed{\vec{F} = \nabla \varphi}$. V tomto případě se φ nazývá <u>kmenová funkce</u> vektorového pole.

- Je každé pole potenciálové?
- Umíme najít kmenovou funkci?

<u>Def</u>: Buď $C: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ křivka

- <u>uzavřená křivka</u>: splývá počáteční a koncový bod
- <u>jednoduchá křivka</u>: neprotíná samo sebe
- <u>regulární křivka</u>: funkce z parametrických rovnic jsou hladké a jejich derivace nemají společný nulový bod

<u>Def</u>: <u>Jednoduše souvislá</u> oblast je souvislá oblast která neobsahuje otvory.

<u>Def</u>: Integrál $\int_C \vec{F} d\vec{r}$ <u>nezávisí</u> v Ω <u>na integrační cestě</u>, pokud je jeho hodnota stejná pro všechny křivky ležící v Ω a mající shodné počáteční a koncové body.

KMENOVÁ FUNKCE V $\mathbb{R}^2$.

Věta: Buď $\vec{F} = (M, N)$ kde $M, N : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.
$\vec{F}$ je potenciálové právě když platí $\boxed{\dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{\partial N}{\partial x}}$.

[Náznak důkazu $\Rightarrow$:
Je-li $\vec{F}$ potenciálové a φ kmenová funkce F, platí:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial x} = M &\Rightarrow \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} M \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} = N &\Rightarrow \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} N \end{aligned}\right\} \text{Stejné, podle Schwarzovy věty}$$
].

Př.: $\vec{F}(x,y) = (6xy+5)\vec{i} + (3x^2+14y)\vec{j}$.

Řeš.: $\frac{\partial}{\partial y}(6xy+5) = 6x$ a $\frac{\partial}{\partial x}(3x^2+14y) = 6x \Rightarrow$ je potenciálové!

Nalezení kmenové funkce φ:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 6xy+5 \Rightarrow \varphi = \int 6xy+5 \, dx = 3x^2y + 5x + C(y)$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial y} &= 3x^2+14y \\ \frac{\partial}{\partial y}\left(3x^2y+5x+C(y)\right) &= 3x^2+C'(y) \end{aligned}\right\} \Rightarrow C'(y) = 14y$$

$$C(y) = \int 14y \, dy = 7y^2 + \bar{C}$$

$$\varphi(x,y) = 3x^2y + 5x + 7y^2 + C. \qquad C \in \mathbb{R}$$

<u>Terminologie</u>: Pokud $\vec{F} = (M, N)$ je vektorové pole s kmenovou funkcí φ, nazývá se výraz

$$\boxed{d\varphi = M\,dx + N\,dy}$$

<u>totálním diferenciálem</u> funkce φ.

Předchozí úlohu je možno chápat takto: Určete, zda je výraz $(6xy + 5)\,dx + (3x^2 + 14y)\,dy$ totálním diferenciálem a určete kmenovou funkci tohoto totálního diferenciálu.

Vektorový zápis: $\boxed{d\varphi = \nabla\varphi \cdot (dx, dy)}$

význam: dx, dy a $d\varphi$ jsou změny nebo rychlosti změn proměnných x, y a funkce φ.

Analogicky ve 3D

Věta (Nezávislost integrálu na integrační cestě)

Následující výroky jsou ekvivalentní, předpokládáme-li hladké funkce a regulární křivky v oblasti Ω:

(1) $\int_C \vec{F} d\vec{r}$ nezávisí na integrační cestě v Ω

(2) $\oint_C \vec{F} d\vec{r} = 0$ pro každou uzavřenou křivku v Ω

(3) $\vec{F}$ je konzervativní, tj. $\operatorname{rot} \vec{F} = 0$

(4) $\vec{F}$ má kmenovou funkci φ.

V tomto případě platí

$$\int_C \vec{F} d\vec{r} = \varphi(B) - \varphi(A)$$

kde A, B jsou počáteční a koncové body křivky C.

Pozn.: Je-li $\vec{F} = (M, N, 0)$, platí

$$\operatorname{rot} \vec{F} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ M & N & 0 \end{vmatrix} = 0\,i + 0\,j + \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) k$$

Př.: $\vec{F}(x,y) = (6xy + 5)\vec{i} + (3x^2 + 14y)\vec{j}$

C.. parabola $y = x^2$ z bodu $(0,0)$ do bodu $(1,1)$.

$$\int_C \vec{F} d\vec{r} = \varphi(1,1) - \varphi(0,0) = 3 \cdot 1^2 \cdot 1 + 5 \cdot 1 + 7 \cdot 1^2 - (3 \cdot 0^2 \cdot 0 + 5 \cdot 0 + 7 \cdot 0^2) = 15$$

protože jsme dříve našli $\varphi(x,y) = 3x^2y + 5x + 7y^2$.

Greenova věta v rovině

$\vec{F}(x,y) = P(x,y)\,\vec{i} + Q(x,y)\,\vec{j}$ ... hladká vektorová funkce

Ω ... jednoduše souvislá oblast s hranicí $\partial\Omega$

$\partial\Omega$ ... hranice, po částech regulární křivka.

orientovaná tak, že při obíhání okolo $\partial\Omega$ je Ω vlevo. tj

Greenova věta: $$\oint_{\partial\Omega} \vec{F}\,d\vec{r} = \iint_{\Omega} \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy$$

Různé tvary:

1) $$\oint_{\partial\Omega} \vec{F}\,d\vec{r} = \iint_{\Omega} \operatorname{rot}\vec{F}\,dx\,dy$$ ... s rotací

2) $$\oint_{\partial\Omega} P\,dx + Q\,dy = \iint_{\Omega} \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy$$ ... s rozepsaným vektorovým polem do složek

3) $$\oint_{\partial\Omega} -Q\,dx + P\,dy = \iint_{\Omega} \frac{\partial P}{dx} + \frac{\partial Q}{dy}\,dx\,dy = \iint_{\Omega} \operatorname{div}\vec{F}\,dx\,dy$$ pro tok ... vektorového pole $\vec{F}$ přes hranici množiny Ω

Důsledek: $\oint_{\Omega} \vec{F}\,d\vec{r} = \operatorname{meas}(\Omega)$ vždy, když platí $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 1$.

Využití Greenovy věty

1) Pro výpočet křivkového integrálu (dvojný se většinou lépe počítá). Platí i pro polární souřadnice.

2) Integrální tvar fyzikálních zákonů

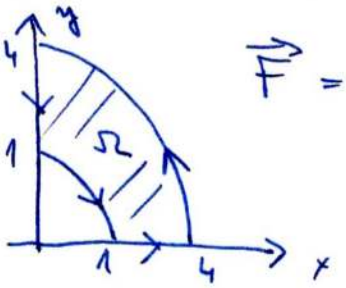
Maxwellova rovnice $\quad \operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} \quad$ (stac. stav)

$$\iint_\Omega \ldots dxdy \Downarrow \quad \iint_\Omega \vec{j}\, dxdy = I, \quad \iint_\Omega \operatorname{rot} \vec{B}\, dxdy = \oint_{\partial\Omega} \vec{B}\, d\vec{r}$$

Ampérův zákon $\quad \oint_C \vec{B}\, d\vec{r} = \mu_0 I$

Dává fyzikální interpretaci operátoru rotace

Příklad: $\Omega \ldots$ mezikruží



$$\vec{F} = \left[-y^3 + \ln(x+1)\right]\vec{i} + \left[y^2 + x^3\right]\vec{j}$$

$$\oint_{\partial\Omega} \vec{F}\, d\vec{r} = ?$$

$$\boxed{\begin{aligned} x &= r\cdot\cos\varphi \\ y &= r\cdot\sin\varphi \\ x^2+y^2 &= r^2 \\ dx\,dy &= r\,dr\,d\varphi \end{aligned}}$$

$$\oint_{\partial\Omega} \vec{F}\, d\vec{r} = \oint_{\partial\Omega} \left(-y^3 + \ln(x+1)\right) dx + \left(y^2 + x^3\right) dy =$$

$$= \iint_\Omega \frac{\partial}{\partial x}\left(y^2 + x^3\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(-y^3 + \ln(x+1)\right) dx\,dy =$$

$$= \iint_\Omega 3x^2 - (-3y^2)\, dx\,dy = \iint_\Omega 3(x^2+y^2)\, dx\,dy =$$

$$= \int_1^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} 3 \cdot r^2\, r\, d\varphi\, dr = \int_1^4 3r^3 dr \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi = \left[\frac{3r^4}{4}\right]_1^4 \cdot \frac{\pi}{2} =$$

$$= \left[3\cdot 4^3 - \frac{3}{4}\right]\frac{\pi}{2} = \ldots = \frac{765}{8}\pi$$

Integrální střední hodnota (zobecnění průměru do spojitého nespočetného světa)

1) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, střední hodnota na intervalu $[a,b] = I$

$$\boxed{\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\, dx}, \quad b-a = meas(I)$$
(délka intervalu)

2) $f: C \to \mathbb{R}$ $\quad C$ .. křivka v $\mathbb{R}^2$ nebo $\mathbb{R}^3$

$$\boxed{\frac{1}{meas(C)} \int_C f \, ds}$$
střední hodnota na křivce C

$$meas(C) = \int_C 1 \, ds \ \dots \text{ délka křivky}$$

3) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $\quad \Omega$ .. množina v $\mathbb{R}^2$

$$\boxed{\frac{1}{meas(\Omega)} \iint_\Omega f \, dx\, dy}$$
střední hodnota na množině Ω

$$meas(\Omega) = \iint_\Omega 1 \, dx\, dy \ \dots \text{ obsah množiny } \Omega$$

Pořád stejné schéma:

$$\boxed{\text{střední hodnota} = \frac{\text{integrál funkce}}{\text{míra oboru integrace}}}$$

Závěrečné poznámky (k větě o nezávislosti na integrační cestě) (8)

1) Ověření, zda integrál závisí na integrační cestě.
Nepočítá se integrál, ale rotace vektorového pole!

Př: Pro jakou hodnotu parametru a nezávisí integrál

$$\int_C (2x+3y^2)\,dx + axy\,dy$$

na integrační cestě.

$$\operatorname{rot}\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2x+3y^2 & axy & 0 \end{vmatrix} = \vec{k}\cdot\left(\frac{\partial}{\partial x}(axy) - \frac{\partial}{\partial y}(2x+3y^2)\right) =$$

$$= \vec{k}\cdot(ay-6y) = \vec{k}\cdot(a-6)\cdot y$$

Nezávisí na integrační cestě právě když platí $a = 6$.

2) Alternativní cesta k výpočtu kmenové funkce

$\varphi(x,y) = \int_C \vec{F}\,d\vec{r}$, C… křivka z pevně zvoleného bodu do bodu $[x,y]$

Př: $\vec{F}(x,y) = (6xy+5)\vec{i} + (3x^2+14y)\vec{j}$ … příklad ze str. 2

C… $\vec{r} = (x\cdot t, y\cdot t)$, $t\in[0,1]$, $\frac{d\vec{r}}{dt} = (x,y)$ … úsečka $[0,0] \Rightarrow [x,y]$

$$\vec{F}(C) = (6xyt^2+5)\vec{i} + (3x^2t^2+14yt)\vec{j}$$

$$\vec{F}\cdot\frac{d\vec{r}}{dt} = 6x^2yt^2+5x+3x^2t^2y+14y^2t = 9x^2yt^2+14y^2t+5x$$

$$\int_C \vec{F}\,d\vec{r} = \int_0^1 9x^2yt^2+14y^2t+5x\,dt = \left[3x^2yt^3+7y^2t^2\right]_0^1 + 5x\cdot 1$$

$$= 3x^2y+7y^2+5x$$

$$\varphi(x,y) = 3x^2y+7y^2+5x+C$$

Aplikovaná matematika (7/13) 30.1.2017

DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE

Def

$\varphi(x,y): \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \varphi(x,y)}$$ ... Diferenciální rovnice (DR), (ODR), (ODE)

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \varphi(x,y), \quad y(x_0) = y_0}$$ ... Počáteční úloha (IVP)

↑ ODR ↑ počáteční podmínka

Př: a) Najděte všechny funkce splňující $y' = x \cdot y$
b) Najděte všechny funkce splňující $y' = x \cdot y$ a $y(0) = 7$

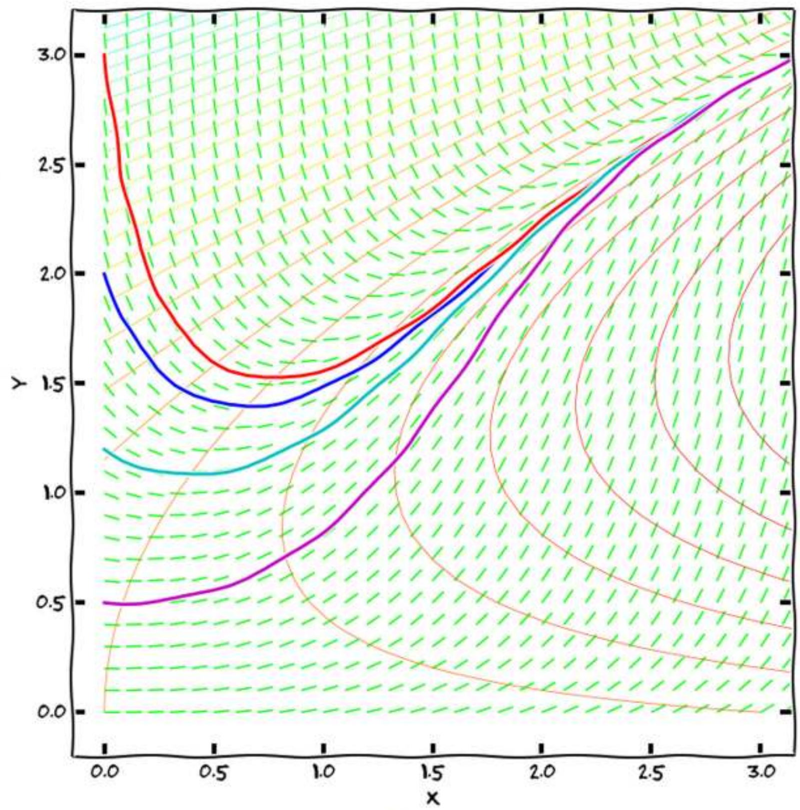
Otázky:
- Existuje pro danou IVP řešení?
- Pokud ano, je dáno jednoznačně?
- Pokud existuje, na jaký maximální interval lze prodloužit?

Věta (o jednoznačnosti)
Má-li $\varphi(x,y)$ ohraničenou parciální derivaci $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$ v okolí počáteční podmínky, potom řešení IVP existuje a je dáno jednoznačně.

• Geometrická interpretace ODE

• Řešení rovnice (integrální křivky) jsou tečné k vektorovému poli $\vec{F} = (1, \varphi(x,y))$.

Toto pole se nazývá směrové pole diferenciální rovnice



• Numerické řešení IVP

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \varphi(x,y),\quad y(x_0)=y_0} \quad \overset{\approx}{\Longleftrightarrow} \quad \boxed{\frac{\Delta y}{\Delta x} = \varphi(x_0,y_0),\quad y(x_0)=y_0}$$

odsud: $\Delta y = \varphi(x_0,y_0)\Delta x$, $\boxed{y(x_0+\Delta x) = y_0 + \varphi(x_0,y_0)\Delta x}$ ... pro Δx malé

Opakováním dostáváme Eulerovu metodu řešení IVP

$$\boxed{\begin{aligned} y(x_0) &= y_0 \\ x_{n+1} &= x_n + \Delta x \\ y_{n+1} &= y_n + \varphi(x_n, y_n)\,\Delta x \end{aligned}}$$

... Iterační vzorec pro numerické řešení IVP s krokem Δx

Diferenciální rovnice se separovanými proměnnými

(3)

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = f(x) \cdot g(y)} \qquad f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

Postup řešení: a) $\frac{dy}{g(y)} = f(x)\, dx$

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)\, dx + C$$

b) $y = y_0$ kde y_0 je číslo splňující

$$g(y_0) = 0$$

Obecné řešení: vzorec, obsahující (skoro) všechna řešení a integrační konstantu C

Partikulární řešení: striktně: řešení IVP
obecněji: jedno pevné řešení (bez int. konstanty)

• Příklad $\frac{dy}{dx} = \frac{y^2-1}{x^2 y} = \frac{y^2-1}{y} \cdot \frac{1}{x^2}$

1) $\frac{y^2-1}{y} = 0$ pro $y = 1$ a $y = -1$

2) $\frac{dy}{dx} = \frac{y^2-1}{y} \frac{1}{x^2}$

$$\frac{y}{y^2-1}\, dy = \frac{1}{x^2}\, dx$$

$$\frac{1}{2} \ln (y^2-1) = -\frac{1}{x} + C_1$$

Řešení: $\begin{cases} \ln(y^2-1) = -\frac{2}{x} + C \\ y = \pm 1 \end{cases}$

kde $C = 2C_1 \in \mathbb{R}$

Věta: Buď $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Existují funkce $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takové, že $\varphi(x,y) = f(x) \cdot g(y)$ právě tehdy, když platí ④

$$\begin{vmatrix} \varphi & \frac{\partial \varphi}{\partial x} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} & \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \end{vmatrix} = 0 .$$

[Dk: „$\Rightarrow$" Buď $\varphi(x,y) = f(x) \cdot g(y)$. Odtud dostáváme $\ln(\varphi(x,y)) = \ln(f(x)) + \ln(g(y))$.

a) $\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \ln(\varphi(x,y)) = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial y}}{\varphi} = \frac{\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \cdot \varphi - \frac{\partial \varphi}{\partial y} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x}}{\varphi^2}$

b) $\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \left(\ln(f(x)) + \ln(g(y)) \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(0 + \frac{g'(y)}{g(y)} \right) = 0$

Porovnáním dostáváme $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \cdot \varphi - \frac{\partial \varphi}{\partial y} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0$

což je právě podmínka z věty].

Př: a) $\varphi(x,y) = e^{x^2+y} = e^{x^2} \cdot e^{y}$

b) $\varphi(x,y) = x+y$, $\begin{vmatrix} x+y & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$

$x+y$ není možné zapsat jako součin funkcí jedné proměnné!

Lineární operátory

Operátor : zobrazení, které má na vstupu a výstupu funkce.

Př: Buď y funkce proměnné x. Operátory mohou být např.

$$\frac{dy}{dx}, \quad \frac{d^2y}{dx^2}, \quad \ln(x)\cdot y, \quad \ln(y)$$

Ozn: $L[y]$, $F[y]$

Lineární operátor : zachovává součet funkcí a násobek konstantou

$$\boxed{\begin{aligned} L[y_1+y_2] &= L[y_1]+L[y_2] \qquad (1) \\ L[C\cdot y_1] &= C\cdot L[y_1] \qquad (2) \end{aligned}}$$

$y_{1,2}$ ... funkce, $C\in\mathbb{R}$, L ... operátor

Př: L ... operátor derivace, tj. $L[y] = y' = \frac{dy}{dx}$

Důkaz:

$$L[y_1+y_2] \underset{\substack{\text{definice}\\ L}}{=} (y_1+y_2)' \underset{\substack{(u+v)'=\dots\\ \text{vzorec}}}{=} y_1'+y_2' \underset{\substack{\text{definice}\\ L}}{=} L[y_1]+L[y_2] \quad \checkmark(1)$$

$$L[C\cdot y_1] = (C\cdot y_1)' \underset{\substack{(k.u)'=\dots\\ \text{vzorec}}}{=} C\cdot y_1' = C\cdot L[y_1] \quad \checkmark(2)$$

Příklady lineárních operátorů (na fci $y=y(x)$)

- $\frac{dy}{dx}$, $a(x)\cdot y$ ... derivace a násobení funkcí proměnné x
- Součet nebo složení lineárních operátorů, tj. např.

$$\frac{d^2y}{dx^2}, \quad \frac{dy}{dx}+a(x)\cdot y, \quad \frac{d^2y}{dx^2}+p(x)\frac{dy}{dx}+q(x)\,y$$

a, p, q ... funkce proměnné x

Princip superpozice

$$\boxed{L[c_1 y_1 + c_2 y_2] = c_1 L[y_1] + c_2 L[y_2]}$$

pro lineární operátor L, funkce y_1, y_2 a čísla c_1, c_2.

Slovy: Lineární operátor zachovává lineární kombinace funkcí.

Operátorové rovnice

Je dán operátor L a funkce $b(x)$. Najdi funkce $y(x)$ takové, že platí

$$L[y] = b(x) .$$

Př: $L[y] := y' - y$, $b = 0$ $\Rightarrow$ $y' - y = 0$ tj. $y' = y$

Věta: Jsou-li $y_1(x)$ a $y_2(x)$ řešení rovnic

$$\boxed{L[y] = b_1(x)} \quad \text{a} \quad \boxed{L[y] = b_2(x)},$$

je funkce $y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$ řešení rovnice

$$\boxed{L[y] = c_1 b_1(x) + c_2 b_2(x) .}$$

$b_{1,2}$ .. funkce, $c_{1,2}$ .. konstanty

Př: $L[y] = y'' - y$, $b_1(x) = b_2(x) = 0$

Protože $y = e^x$ a $y = e^{-x}$ jsou řešení rovnice $y'' - y = 0$ (ověřit dosazením), je řešením této rovnice i každá funkce tvaru $y = c_1 e^x + c_2 e^{-x}$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

LINEÁRNÍ DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE

OBECNĚ: $L[y] = b(x)$ kde $L[x]$ je lineární operátor

LDR 1. řádu: $y' + a(x)y = b(x)$ $a(x)$ a $b(x)$ spojité na I

LDR 2. řádu: $y'' + p(x) \cdot y' + q(x)\,y = f(x)$ $p(x), q(x), f(x)$ spojité na I

I ... otevřený interval

LDR 1. ŘÁDU

$$\boxed{L[y] = y' + a(x)\,y = b(x)} \qquad (*)$$

Věta:
Každá počáteční úloha pro rovnici $(*)$ má právě jedno řešení!

a) Homogenní LDR 1. řádu: $b(x) = 0$

$$y' + a(x)\,y = 0 \qquad (*)_0$$

Alternativní zápis: $y' = -a(x) \cdot y$

Jedno z řešení uhodneme: $y = e^{-\int a(x)\,dx} =: y_{po}(x)$

Další řešení vygenerujeme z linearity $y = C \cdot y_{po}(x)$
kde $C \in \mathbb{R}$. Jsou to všechna řešení?

ANO. Mame-li libovolnou počáteční podmínku

$$y(x_0) = y_0 \qquad x_0, y_0 \in \mathbb{R} \qquad (**)$$

Stačí volit C takové, aby platilo

$$y_0 = C \cdot y_{p0}(x_0).$$

Závěr: Obecným řešením rovnice (*)$_0$ je

$$y = C \cdot e^{-\int a(x)\,dx}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

b) Nehomogenní LDR 1. řádu: $b(x) \neq 0$

Je-li $L[y_p] = b(x)$ a $L[y_{p0}] = 0$, platí

$$L[y_p + C \cdot y_{p0}] = b(x) + C \cdot 0 = b(x)$$

tj. $y_p + C \cdot y_{p0}$ je řešením rovnice $L[y] = b(x)$.

Dostaneme tak všechna řešení? ANO. pro libovolnou počáteční podmínku (**) stačí najít takové C, které splňuje $y_0 = y_p(x_0) + C \cdot y_{p0}(x_0)$.

Závěr: Je-li $y_p(x)$ řešením rovnice (*), jsou všechna řešení tvaru

$$y = y_p(x) + C \cdot y_{p0}(x) = y_p(x) + C \cdot e^{-\int a(x)\,dx}$$

Jak najít partikulární řešení?

(i) uhodnout

(ii) metoda integračního faktoru

$$y' + a(x) \cdot y = b(x)$$

$$y' \cdot e^{\int a(x)\,dx} + a(x) y e^{\int a(x)\,dx} = e^{\int a(x)\,dx} \cdot b(x)$$

$$\left(y \cdot e^{\int a(x)\,dx}\right)' = e^{\int a(x)\,dx} b(x)$$

$$y \cdot e^{\int a(x)\,dx} = \int e^{\int a(x)\,dx} b(x) + C$$

$$y = e^{-\int a(x)\,dx} \cdot \int e^{\int a(x)\,dx} b(x)\,dx + C \cdot e^{-\int a(x)\,dx}$$

Příklad: $y' + \frac{2}{x} y = 1$

$$a(x) = \frac{2}{x} \Rightarrow \int a(x)\,dx = 2 \cdot \ln x \Rightarrow e^{\int a(x)\,dx} = e^{2 \cdot \ln x} = \left(e^{\ln x}\right)^2 = x^2$$

$$x^2 y' + 2xy = x^2$$

$$(x^2 y)' = x^2$$

$$x^2 y = \frac{1}{3} x^3 + C$$

$$y = \frac{1}{3} x + \frac{C}{x^2} \qquad C \in \mathbb{R}$$

LDR 2. řádu

$$\boxed{L[y] = y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)} \qquad (*_2)$$

počáteční podmínka (poloha a rychlost)

$$y(x_0) = y_0 \qquad\qquad x_0, y_0, y_1 \in \mathbb{R} \qquad (**_2)$$
$$y'(x_0) = y_1$$

Platí vše co bylo uvedeno výše a plyne z linearity (kromě pasáže o integračním faktoru), ale nestačí mám jedno y_{po}, protože by se nepodařilo splnit každou počáteční podmínku.

a) Homogenní LDR 2. řádu: $f(x) = 0$

$$L[y] = 0 \quad \text{resp.} \quad y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

Jsou-li y_1 a y_2 řešením, je i $C_1y_1 + C_2y_2$ řešení. (plyne z linearity)

Pokud platí $y_1(x_0) = 1$, $y_1'(x_0) = 0$, $C_1 = y_0$,
$y_2(x_0) = 0$, $y_2'(x_0) = 1$, $C_2 = y_1$,

splňuje $C_1y_1 + C_2y_2$ počáteční podmínku $(**_2)$. Měli bychom tedy všechna řešení!

Podobně lze ukázat, že stačí mít lineárně nezávislá řešení y_1 a y_2. Kde je ale najít?

obecný případ – nemožné

konstantní koeficienty – snadné

Věta Buďte $p(x) = p$, $q(x) = q$ konstantní funkce.

Buď $$\lambda^2 + p\lambda + q = 0$$

<u>charakteristická rovnice</u> pro LDR druhého řádu

$$y'' + py' + q\cdot y = 0. \qquad (\Delta)$$

Buďte λ_1 a λ_2 řešení charakteristické rovnice v oboru komplexních čísel.

- Je-li $\lambda_1 \in \mathbb{R}$, $\lambda_2 \in \mathbb{R}$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$, definujme $y_1 = e^{\lambda_1 x}$, $y_2 = e^{\lambda_2 x}$
- Je-li $\lambda_1 = \lambda_2 \in \mathbb{R}$, definujme $y_1 = e^{\lambda_1 x}$, $y_2 = x e^{\lambda_1 x}$
- Je-li $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta \notin \mathbb{R}$, definujme $y_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x$, $y_2 = e^{\alpha x}\sin\beta x$.

<u>Obecným řešením</u> rovnice (Δ) je funkce

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) \qquad C_{1,2} \in \mathbb{R}$$

Příklad: $y'' + 5y' + 6y = 0$

$$\lambda^2 + 5\lambda + 6 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 4.6}}{2} = \frac{-5 \pm 1}{2} = \begin{cases} -3 \\ -2 \end{cases}$$

$$y = C_1 . e^{-3x} + C_2 e^{-2x}$$

Příklad: $y'' + 5y' + 10y = 0$

$$\lambda^2 + 5\lambda + 10 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 4 \cdot 10}}{2} = \frac{-5 \pm \sqrt{-15}}{2} = -\frac{5}{2} \pm \frac{\sqrt{15}}{2} i$$

$$y_1 = C_1 e^{-\frac{5}{2}x} \cdot \cos\left(\frac{\sqrt{15}}{2} x\right) + C_2 e^{-\frac{5}{2}x} \sin\left(\frac{\sqrt{15}}{2} x\right)$$

5) Nehomogenní LDR 2. řádu $\quad f(x) \neq 0$

Podobně jako u LDR 1. řádu stačí najít jedno řešení a sečíst s řešením homogenní DR.

Jak najít? (i) uhodnout ... v jednoduchých případech

(ii) metoda variace konstant .. obecně, nebudeme dělat

Jak hádat?

Věta: Je-li v LDR druhého řádu s konst. koeficienty

$$y'' + p y' + q y = f(x)$$

funkce f polynom a platí-li $q \neq 0$, potom existuje partikulární řešení, které je polynomem stejného stupně jako $f(x)$

Příklad: Najděte řešení rce $y'' + 2y' - 3y = 2x - 1$

a) Homogenní DR $y'' + 2y' - 3y = 0$

$\lambda^2 + 2\lambda - 3 = 0$

$\lambda_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 3\cdot 4}}{2} = \begin{cases} -3 \\ 1 \end{cases}$

b) Nehomogenní DR: $y_p = ax + b$

$y_p' = a$

$y_p'' = 0$

$y'' + 2y' - 3y = 2x - 1$

$0 + 2a - 3(ax + b) = 2x - 1$

$-3ax + 2a - 3b = 2x - 1$

$-3a = 2 \Rightarrow a = -\frac{2}{3}$

$2a - 3b = -1 \Rightarrow b = \frac{1}{3}(2a + 1) = -\frac{1}{9}$

a)+b) $\Rightarrow y = -\frac{2}{3}x - \frac{1}{9} + C_1 e^{-3x} + C_2 e^{x}$

Příklad: $y'' + 2y' + y = x^2$

a) $y'' + 2y' + y = 0 \Rightarrow \lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0 \Rightarrow (\lambda + 1)^2 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = -1$

b) $y_p = ax^2 + bx + c$

$y_p' = 2ax + b$

$y_p'' = 2a$

$$y'' + 2y' + y = x^2$$

$$2a + 2(2ax + b) + (ax^2 + bx + c) = x^2$$

$$x^2 \cdot a + x(4a + b) + 2a + 2b + c = 1 \cdot x^2 + 0 \cdot x + 0$$

x^2: $a = 1$

x: $4a + b = 0 \Rightarrow b = -4$

x^0: $2a + 2b + c = 0 \Rightarrow c = -2a - 2b = 6$

$$y = x^2 - 4x + 6 + C_1 e^{-x} + C_2 \cdot x \cdot e^{-x}$$

Lineární diferenciální rce 2. řádu

$$y'' + p(x)y' + q(x)\,y = f(x)$$

Budeme studovat speciální případ $p(x) = 0 = f(x)$

$$y'' + q(x)y = 0 \qquad (*)$$

Věta: Je-li $y_{1,2}$ řešení rovnice $(*)$, je výraz

$$y_1'\, y_2 - y_2'\, y_1$$

konstantní.

DK: Derivace konstanty je nula.

$$(y_1' y_2 - y_2' y_1)' = y_1'' y_2 + y_1' y_2' - (y_2'' y_1 + y_2' y_1') =$$

$$= y_1'' y_2 - y_2'' y_1 = (-q(x) y_1) y_2 - (-q(x) y_2) y_1$$

$$= -q(x)\, y_1\, y_2 + q(x)\, y_2\, y_1 = 0$$

protože podle předpokladu platí

$$y_1'' = -q(x)\, y_1 \quad \text{a} \quad y_2'' = -q(x)\, y_2$$

Věta: Je-li y_2 řešení rovnice (*) a y_1 splňuje
$$y_1 = y_2 \cdot \int \frac{1}{y_2^2}\, dx ,$$
je obecným řešením rovnice (*) funkce
$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 .$$

Dk:
$$\left(\frac{y_1}{y_2}\right)' = \frac{y_1' \cdot y_2 - y_1 y_2'}{y_2^2} = \frac{k}{y_2^2}$$

podle předchozí věty

$$\frac{y_1}{y_2} = \int \frac{k}{y_2^2}\, dx$$

$$y_1 = y_2 \cdot \int \frac{k}{y_2^2}\, dx$$

Bez újmy na obecnosti vezměme $k = 1$.

y_1 a y_2 jsou lineárně nezávislá řešení $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $C_1 y_1 + C_2 y_2$ je obecné řešení.

Počáteční a okrajové úlohy

Počáteční úloha: rovnice a počáteční podmínky (funkční hodnota a derivace v témže bodě)

Okrajová úloha: (Dirichletova) rovnice a okrajové podmínky (funkční hodnoty ve dvou různých bodech)

Úloha 1 (počáteční)

$$y'' + \pi^2 y = 0 \quad , \; y(0) = 0 \quad , \; y'(0) = 1$$

Řeš: $\lambda^2 + \pi^2 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \sqrt{-\pi^2} = \pm i\pi$

$$\left.\begin{aligned} y &= C_1 \cos(\pi x) + C_2 \sin(\pi x) \\ y' &= -C_1 \cdot \pi \cdot \sin(\pi x) + C_2 \pi \cos(\pi x) \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} 0 &= C_1 1 + C_2 \cdot 0 \\ 1 &= -C_1 . 0 + \pi . C_2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} C_1 &= 0 \\ C_2 &= \frac{1}{\pi} \end{aligned}$$

Výsledek:
$$y = \frac{1}{\pi} \sin(\pi x)$$

Úloha 2 (okrajová)

$$y'' + \pi^2 y = 0 \quad , \; y(0) = 0 \quad , \; y(1) = 1$$

$$y = C_1 \cos(\pi x) + C_2 \sin(\pi x)$$

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} 0 &= C_1 \cdot 1 + C_2 \cdot 0 \\ 1 &= C_1 \cdot (-1) + C_2 \cdot 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \text{nemá řešení}$$

Úloha 3: $y'' + \pi^2 y = 0 \quad , y(0) = 0 , \ y(1) = 0$

$$y = C_1 \cos(\pi x) + C_2 \sin(\pi x)$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} 0 = C_1 \cdot 1 + C_2 \cdot 0 \\ 0 = C_1 \cdot (-1) + C_2 \cdot 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} C_1 = 0 \\ C_2 \in \mathbb{R} \end{array}$$

nekonečně mnoho řešení $\quad y = C \cdot \sin(\pi x) , \ C \in \mathbb{R}.$

Úloha na vlastní čísla

Úloha 4: pro která λ má okrajová úloha

$$y'' + \lambda y = 0 \quad , \ y(0) = 0 , \ y(1) = 0$$

netriviální řešení? Předpokládejme $\lambda > 0$.

Char. rce (v proměnné z)

$$z^2 + \lambda = 0 \Rightarrow z_{1,2} = \sqrt{-\lambda} = \pm i \sqrt{\lambda}$$

$$y = C_1 \cos(\sqrt{\lambda}\, x) + C_2 \sin(\sqrt{\lambda}\, x)$$

$\Rightarrow \quad 0 = C_1 \cdot 1 + C_2 \cdot 0$ ... pro $x = 0$

$\quad 0 = C_1 \cdot \cos(\sqrt{\lambda}) + C_2 \sin(\sqrt{\lambda})$ ... pro $x = 1$

$\Rightarrow C_1 = 0$ a $\sin(\sqrt{\lambda}) = 0 \Rightarrow \sqrt{\lambda} = k \cdot \pi \Rightarrow \lambda = k^2 \pi^2$

Pro $\lambda = k^2 \pi^2$, $k \in \mathbb{Z}$ je řešením $y = C \cdot \sin(k\pi \cdot x)$

Hodnoty λ pro které má okrajová úloha

$$y'' + \lambda y = 0 \quad , \quad y(0) = 0 = y(1)$$

netriviální řešení se nazývají

vlastní hodnoty (vlastní čísla) a příslušná

řešení se nazývají vlastní funkce.

Lze zobecnit i na další okrajové úlohy.
Vyskytuje se u kmitání, vedení tepla, ...

Typy okrajových úloh

1) Dirichletova $\quad y(0) = a \quad , \quad y(1) = b$

např.: kmitající struna

2) Neumannova $\quad y'(0) = a \quad , \quad y'(1) = b$

např.: vedení tepla

3) Smíšené $\quad y(0) = a \quad , \quad y'(1) = b$

např.: kmitající tyč upevněná na jednom konci.

Aplikovaná matematika (11/13) 27.4.2017

Rovnice matematické fyziky (pokr.)

Rovnice kontinuity

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{\varphi} = \sigma \qquad (1)$$

φ .. hustota toku stavové veličiny u

σ .. hustota zdrojů —"—

Rovnice vedení tepla (= (1) + Fickův zákon)

$$\frac{\partial u}{\partial t} - D \nabla^2 u = \sigma \qquad (2)$$

Vlnová rovnice

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \nabla^2 u \qquad (3)$$

Separace proměnných pro vlnovou rovnici
(Fourierova metoda)

$$\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}, \quad c \in \mathbb{R} \quad \text{... vlnová rovnice v 1D}$$

$u(x,t)$ ... řešení rovnice

$$\left.\begin{aligned} u(0,t) &= 0 \\ u(1,t) &= 0 \end{aligned}\right\} \text{struna délky 1, nulová výchylka na krajích}$$

$u(x,0) = f(x)$ ... počáteční tvar struny

$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x)$ ... počáteční rychlost struny

Myšlenka: Řešení hledáme ve tvaru

$$\boxed{u(x,t) = F(x) \cdot G(t)}$$

kde $F(0) = 0$, $F(1) = 0$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = F'(x) \cdot G(t) \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = F''(x)\, G(t)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = F(x)\, G'(t) \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = F(x)\, G''(t)$$

Dosazením: $F(x)\, G''(t) = c^2 F''(x)\, G(t)$

$$\frac{G''(t)}{G(t)} = c^2 \frac{F''(x)}{F(x)}$$

Protože levá strana a pravá strana jsou funkce nezávislých proměnných (nalevo t, napravo x), musí být obě rovny stejné konstantě.

Pro jednoduchost uvažujme $c = 1$.
(lze dosáhnout vhodnou volbou jednotek)
Musí existovat konstanta λ takovou, že

$$\underbrace{\frac{G''(t)}{G(t)} = -\lambda}_{(*)}, \quad \underbrace{\frac{F''(x)}{F(x)} = -\lambda, \quad F(0) = 0 = F(1)}_{(**)}$$

Rovnice $(*)$: $\boxed{G''(t) = -\lambda . G(t)}$ ... LDR 2. řádu.

Pro $\lambda > 0$ je řešení

$$G(t) = C_1 \cos(\sqrt{\lambda}\, t) + C_2 \sin(\sqrt{\lambda}\, t) =$$

$$= A . \cos(\sqrt{\lambda}\, t + \varphi)$$

Pro $\lambda \leq 0$ nejsou řešení ohraničená $\Rightarrow$ nemá pro nás význam

Rovnice $(**)$: $\boxed{F''(x) = -\lambda F(x)}$ $\quad F(0) = 0 = F(1)$

... úloha na vlastní čísla (Před. 9)

Řešení $y = C_k \sin(k\pi x)$ pokud $\lambda = k^2\pi^2$, $k \in \mathbb{Z}$

a $y = 0$ jinak.

Celkem : $\boxed{u_k(x,t) = B_k \sin(k\pi x) . \cos(k\pi t + \varphi)}$ $(***)$

$B_k \in \mathbb{R}$ $\quad (B_k = A . C_k)$

pohyb (zvuk struny) na frekvenci dané vztahem
$2\pi f = k\pi \Rightarrow f = \frac{k}{2}$

ALE: $u_k(x,0) = B_k \sin(k\pi x) \cos(\varphi) = f(x)$

$\frac{\partial u_k}{\partial t}(x,0) = \ldots = g(x)$

počáteční podmínky

Aby se povedlo splnit libovolné počáteční podmínky, musíme řešení obohatit. Využijeme linearitu: jsou-li funkce $u_1, u_2, \ldots$ řešením rovnice, je jejich libovolná lineární kombinace také řešením rovnice.

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k(x,t) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} B_k \sin(k\pi x) \cos(k\pi t + \varphi)$$

Kmity struny jsou složeny z kmitů na různých frekvencích, které jsou vždy násobky základní frekvence.

Úloha: Pomocí identity

$$\text{rot}\,\text{rot}\,\vec{F} = \text{grad}\,(\text{div}\,\vec{F}) - \nabla^2 \vec{F} \qquad (**)$$

a Maxwellových rovnic pro vakuum

$$(1)\quad \text{div}\,\vec{E} = 0 \qquad\qquad (2)\quad \text{div}\,\vec{B} = 0$$

$$(3)\quad \text{rot}\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad\qquad (3)\quad \text{rot}\,\vec{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

odvoďte rovnici pro elmg. vlnění.

Řešení: $\text{rot}\,\vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

PROČ? (3) PROČ? (Schw. věta)

$$\text{A)}\quad \text{rot}\,\text{rot}\,\vec{E} = \text{rot}\left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right) = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\text{rot}\,\vec{B}\right) =$$

$$= -\frac{\partial}{\partial t}\left(\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right) = -\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

PROČ? (3) PROČ? (derivace násobku)

PROČ? (**) PROČ? (1)

$$\text{B)}\quad \text{rot}\,\text{rot}\,\vec{E} = \text{grad}\,(\text{div}\,\vec{E}) - \nabla^2 \vec{E} = -\nabla^2 \vec{E}$$

SPOJENÍM A) + B): $\quad -\mu_0 \varepsilon_0 \dfrac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = -\nabla^2 \vec{E}$

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \frac{1}{\mu_0 \varepsilon_0} \nabla^2 \vec{E}$$

Definujme $c := \dfrac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}}$. Potom má rovnice tvar

$$\boxed{\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = c^2 \nabla^2 \vec{E}}$$ … vlnová rovnice pro $\vec{E}$

Analogicky pro $\vec{B}$.

Aplikovaná matematika 3.5.2017

(12/13) 1

Rovnice matematické fyziky (úvod)

Př: Jaké pole je současně nevírové a nezřídlové?

Řešení: $\operatorname{rot} \vec{F} = 0 \implies \exists \varphi : \vec{F} = \nabla \varphi$

PROČ?

$$\operatorname{div} \vec{F} = 0 \implies \operatorname{div}(\nabla \varphi) = 0$$

$$\Delta \varphi = 0$$

Laplaceův operátor

Odpověď: Takové pole, jehož skalární potenciál existuje a splňuje rovnici

$$\Delta \varphi = 0 .$$

Př: Dokažte (z definice) že Laplaceův operátor je lineární. Pracujte v $\mathbb{R}^2$.

Postup: Musíme ukázat, že platí

$$(A) \quad \Delta(u_1 + u_2) = \Delta u_1 + \Delta u_2$$

$$(B) \quad \Delta(c \cdot u_1) = c \cdot \Delta u_1$$

Pro libovolné funkce u_1, u_2 a reálné číslo c.

Řešení:

$$(A) \quad \Delta(u_1 + u_2) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}(u_1 + u_2) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}(u_1 + u_2) =$$

$$\underset{\text{PROČ?}}{=} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} =$$

$$\underset{\text{PROČ?}}{=} \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} \right) + \left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} \right) =$$

$$= \Delta u_1 + \Delta u_2$$

$$(B) \quad \Delta(c \cdot u_1) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}(c \cdot u_1) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}(c \cdot u_1) =$$

$$\underset{\text{PROČ?}}{=} c \cdot \frac{\partial^2}{\partial x^2}(u_1) + c \cdot \frac{\partial^2}{\partial y^2}(u_1) =$$

$$= c \cdot \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} \right) = c \cdot \Delta u_1$$

Př: Uvažujme Laplaceovu rovnici.

$$\Delta f = 0$$

v případě, kdy funkce f závisí pouze na vzdálenosti od počátku (úloha je radiálně symetrická). Vyřešte.

Návod: v polárních souřadnicích platí

$$\Delta f = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial f}{\partial r}\right)\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}.$$

Řešení: $f = f(r) \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} = 0$ a $\frac{\partial f}{\partial r} = f'(r) = \frac{df}{dr}$

$$\Delta f = 0$$

$$\frac{1}{r}\left(\frac{d}{dr}\left(r\frac{df}{dr}\right)\right) = 0 \qquad \Big|\cdot r$$

$$\frac{d}{dr}\left(r\frac{df}{dr}\right) = 0 \qquad \Big| \int \sqcup \, dr$$

$$r\frac{df}{dr} = k_1,\ k \in \mathbb{R} \qquad \Big|\cdot \frac{1}{r}$$

$$\frac{df}{dr} = \frac{k_1}{r} \qquad \Big| \int \sqcup \, dr$$

$$f = k_1 \ln r + k_2$$

$$f(r) = k_1 \cdot \ln r + k_2 \qquad k_1, k_2 \in \mathbb{R}$$