Hlavní myšlenky diferenciálního počtu

Robert Mařík

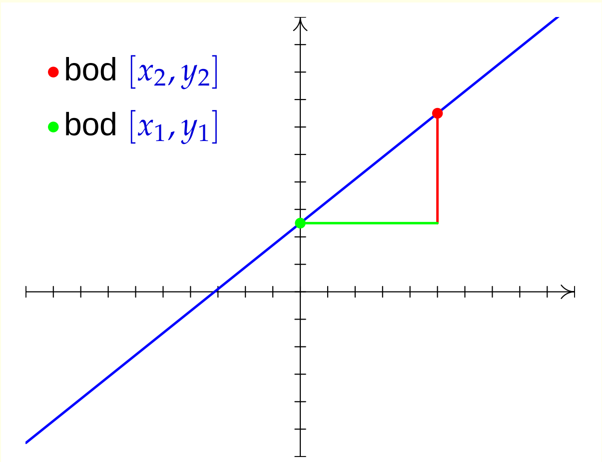
21. září 2008

Isaac Newton

Gottfried Wilhelm Leibniz

1. Rychlost růstu poprvé

Směrnice k přímky je číslo, udávající, jak rychle přímka roste či klesá. Definujeme ji jako podíl svislé a odpovídající vodorovné změny. Z trigonometrie pravoúhlého trojúhelníka plyne, že směrnice odpovídá tangentě úhlu, který svírá přímka s kladnou vodorovnou poloosou.



$$k = \frac{\text{délka červeného}}{\text{délka zeleného}} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = 0.8$$

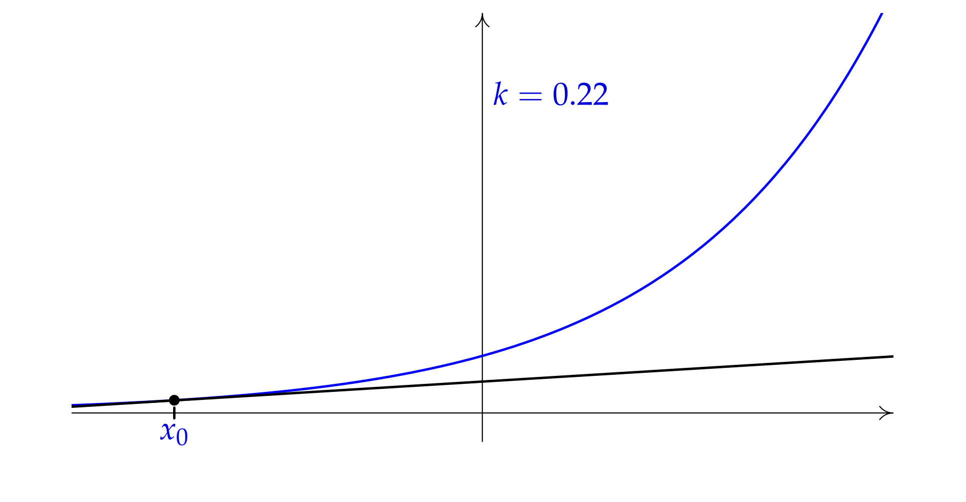
|< < Play > >|

Robert Mařík

Home Page
Print
Title Page
Page 2 of 21
Go Back
Full Screen
Close
Quit

2. Rychlost růstu podruhé

Rychlost růstu nelineární funkce definujeme jako rychlost růstu její tečny. Tato rychlost se podél nelineární křivky mění.

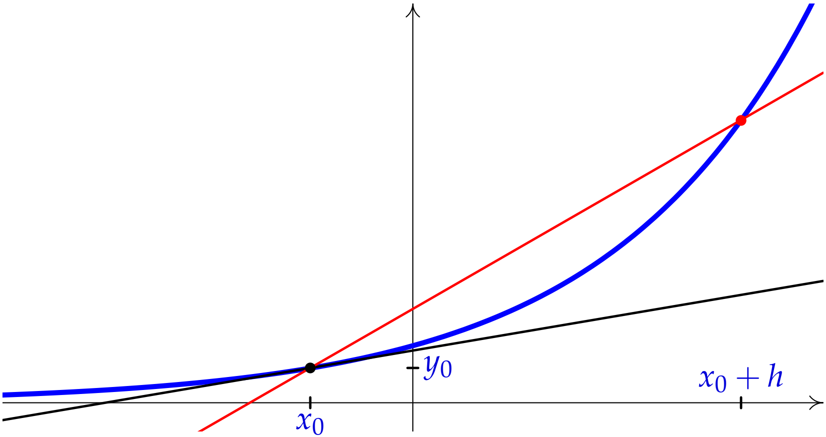


|< < Play > >|

Musíme tedy umět najít tečnu ke grafu funkce v daném bodě. Předpokládejme, že z funkce f známe jenom její analytický tvar, tj. předpis $y = f(x)$. Pomocí tohoto předpisu a pojmů, s kterými umíme pracovat, chceme nalézt rovnici tečny.

3. Rovnice tečny

Směrnici sečny najdeme snadno, protože máme dva její body. Tečnu můžeme potom najít jako limitní polohu sečen.



Směrnice sečny je $k = \dfrac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = 2.07$.

Tečna je (přibližně) $y = 0.61x + 0.91$.

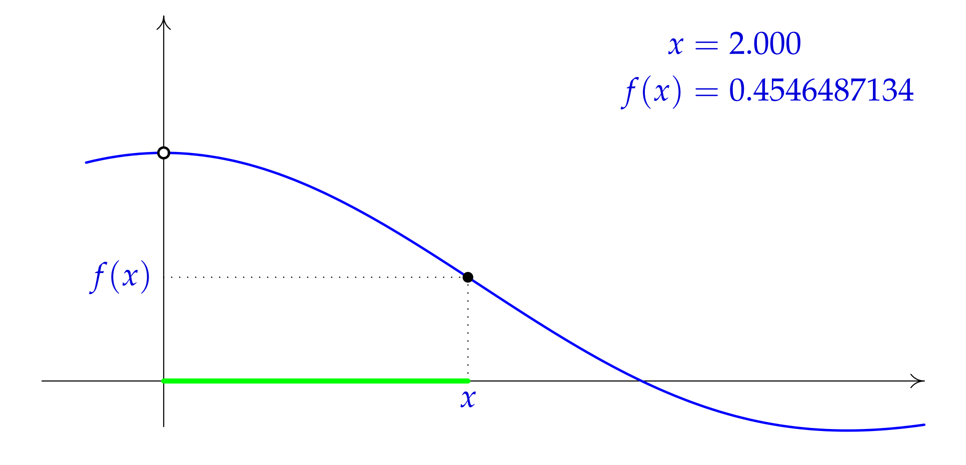
|< < Play > >|

Robert Mařík

Diferenciální počet

4. „Blížení se“ poprvé

Limitní proces $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\sin x}{x}$



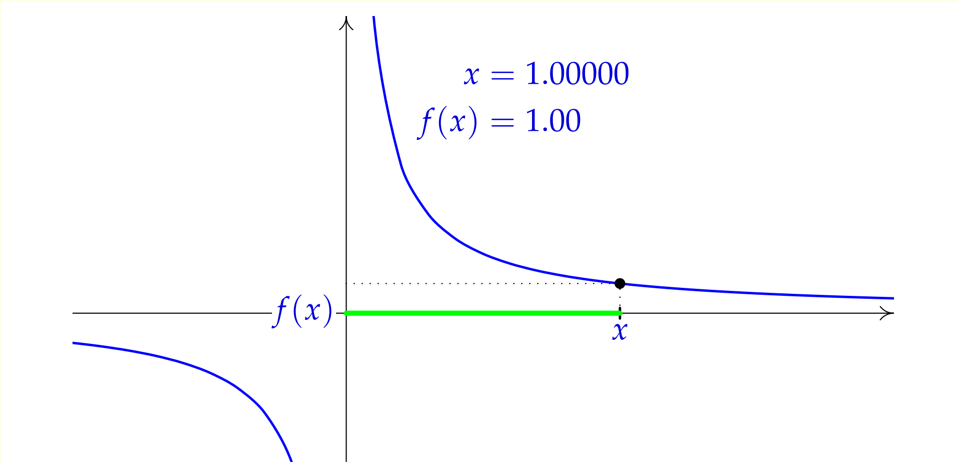
|< < Play > >|

Platí $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\sin x}{x} = 1$

Robert Mařík

5. „Blížení se“ podruhé

Limitní proces $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x}$



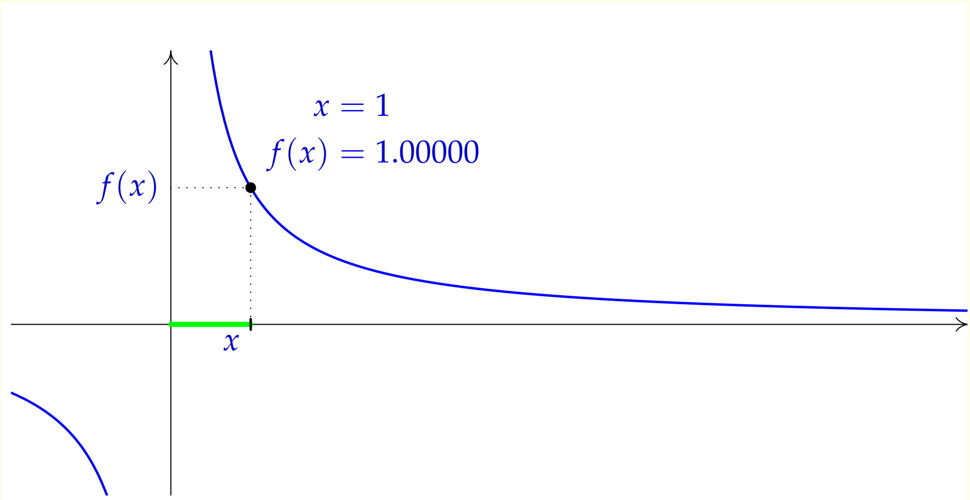
|< < Play > >|

Platí $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x} = \infty$

Robert Mařík

6. „Blížení se“ potřetí

Limitní proces $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x}$



|< < Play > >|

Platí $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$

Robert Mařík

7. Přesná definice limity

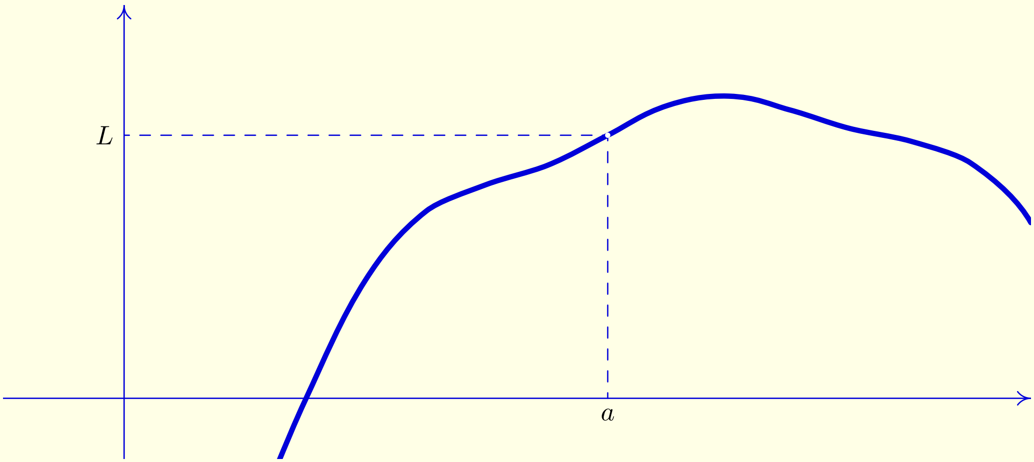
Nyní snad již máme přibližnou představu, co to znamená, řekne-li se „pokud se x blíží k bodu a tak se $f(x)$ blíží k bodu L“. Dokážeme tuto představu zhruba okomentovat nad grafem funkce $y = f(x)$.

Problém: Jak definovat limitu pro obecnou funkci $y = f(x)$, u které neznáme graf ale jenom analytický předpis?

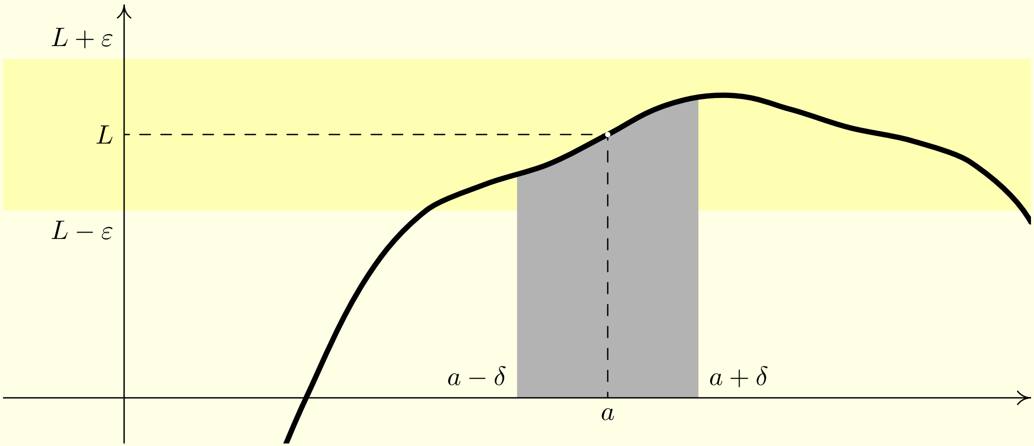
Jediné co obecně umíme pro každou funkci, je počítat funkční hodnoty.

Musíme pomocí funkčních hodnot a známých relací na množině reálných čísel popsat proces „blížení se“.

Nejprve si uvedeme definici poněkud *hravým* způsobem a potom ji zpřesníme.



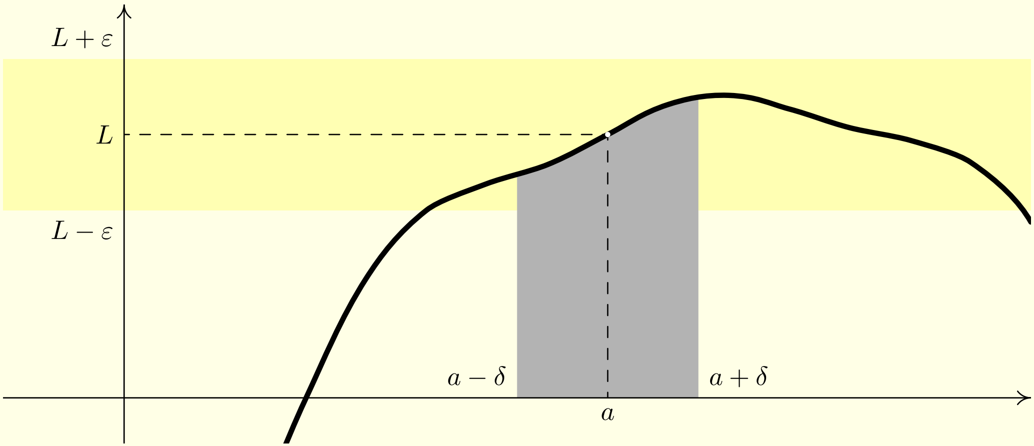
- Podle obrázku lze odhadovat, že čím je hodnota x blíže k bodu a, tím je hodnota $f(x)$ blíže k bodu L.
- Pokusíme se toto blížení definovat přesně a nezávisle na grafu funkce. (Přesto budeme na grafu funkce sledovat, co se děje. Takto totiž pochopíme, že definice limity, která na první pohled není zcela srozumitelná, je přirozeným zpřesněním pojmu „blížit se“.)



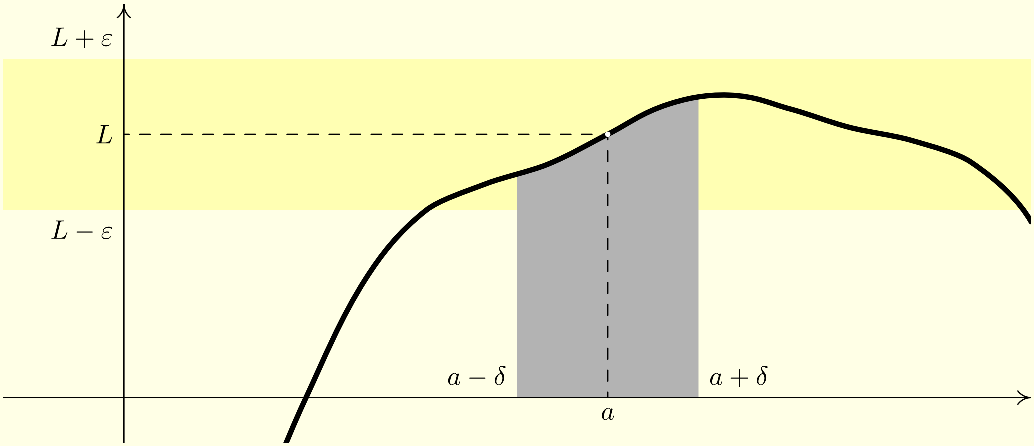
- Okolím vlastního bodu b rozumíme libovolný otevřený interval, který obsahuje tento bod.
- Ryzím okolím vlastního bodu b rozumíme okolí bodu b, ze kterého vyjmeme právě bod b.
- Vodorovný pás vznikne rozšířením okolí bodu L vodorovně.
- Svislý pás vznikl rozšířením ryzího okolí bodu a svisle (okolí je ryzí a proto do něj nepatří svislá přerušovaná čára).

Robert Mařík
Diferenciální počet

Home Page
Print
Title Page
Page 10 of 21
Go Back
Full Screen
Close
Quit



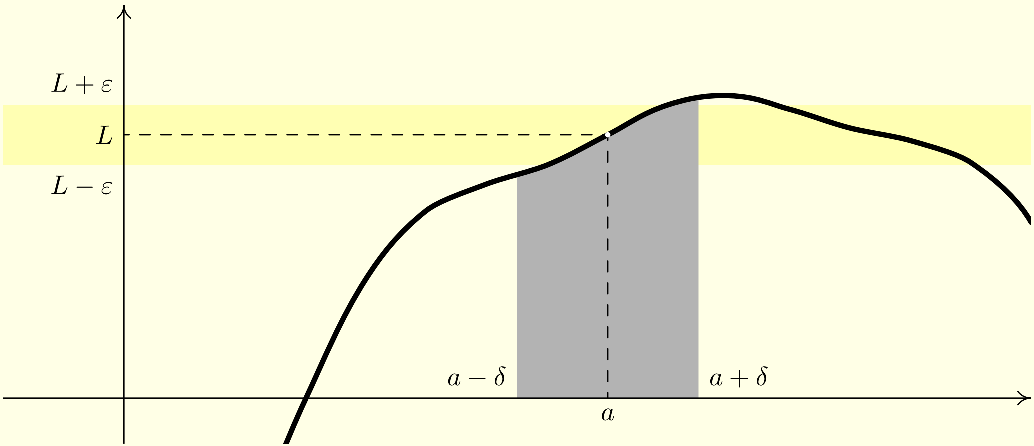
- K vyznačenému okolí bodu L lze najít okolí bodu a takové, že obraz všech bodů z okolí bodu a (s případnou vyjímkou bodu a) leží v okolí bodu L.
- Funkční hodnoty v bodě a si nevšímáme. Může být libovolná nebo ani nemusí být definována.



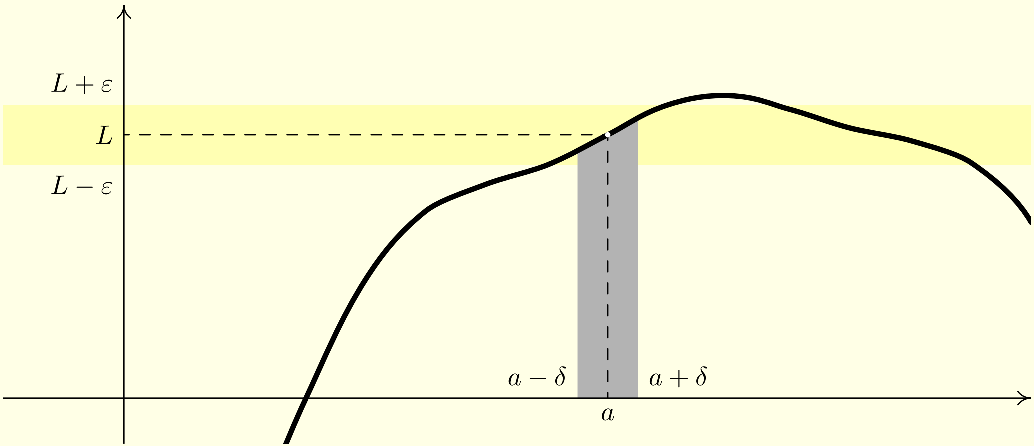
Budeme hrát hru žlutého hráče ( ) proti šedému ( ):

- zužuje či rozšiřuje okolí bodu L libovolně.
- Po jeho tahu pokračuje , jeho úkolem je zužovat nebo rozšiřovat ryzí okolí bodu a tak, aby po jeho tahu ta část grafu, která je nad jeho šedým okolím, byla celá ve žlutém pásu.
- Pokud vždy najde protitah k tahu , vyhrává . Pokud takový protitah nenajde, vyhrává .

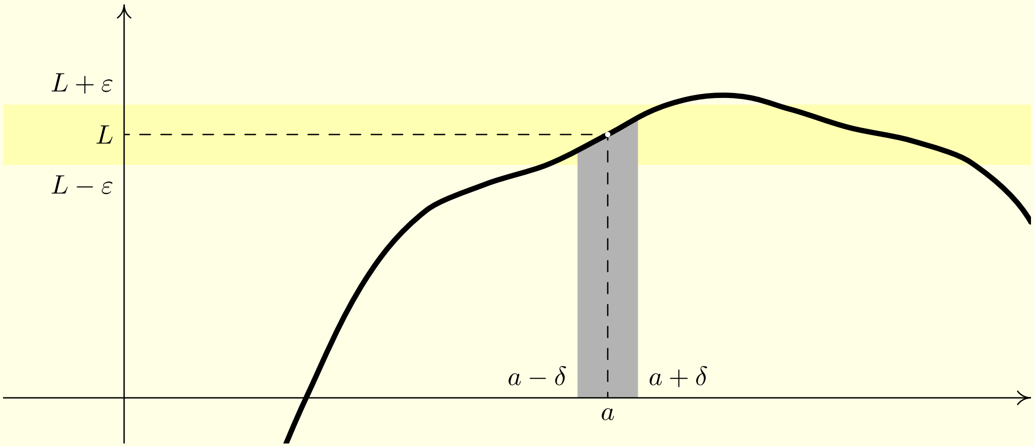
Robert Mařík



- ✍: Zúžíme vodorovné okolí bodu L (žlutý pás).
- Nyní funkční hodnoty z okolí bodu a (vršek šedé množiny) vybíhají ze žlutého pásu ven a ✍ hráč hledá protitah, kterým vršek šedé množiny vrátí do žlutého pásu.



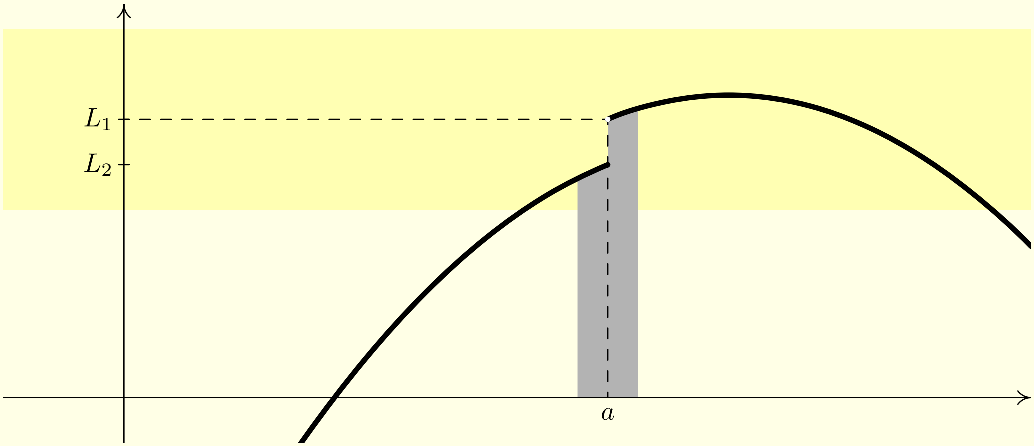
- Máme protitah šedým okolím: stačí zúžit okolí bodu a a funkční hodnoty z okolí bodu a jsou opět ve žlutém pásu. Toto lze provést vždy, ať je ε jakkoliv malé.
- Hra je **nespravedlivá**, ✍ vždy vyhraje.
- V takovém případě říkáme, že funkce má v bodě a limitu L.



- Ke každému okolí bodu L nalezneme ryzí okolí bodu a takové, že obraz všech bodů z tohoto ryzího okolí bodu a leží v uvažovaném okolí bodu L.

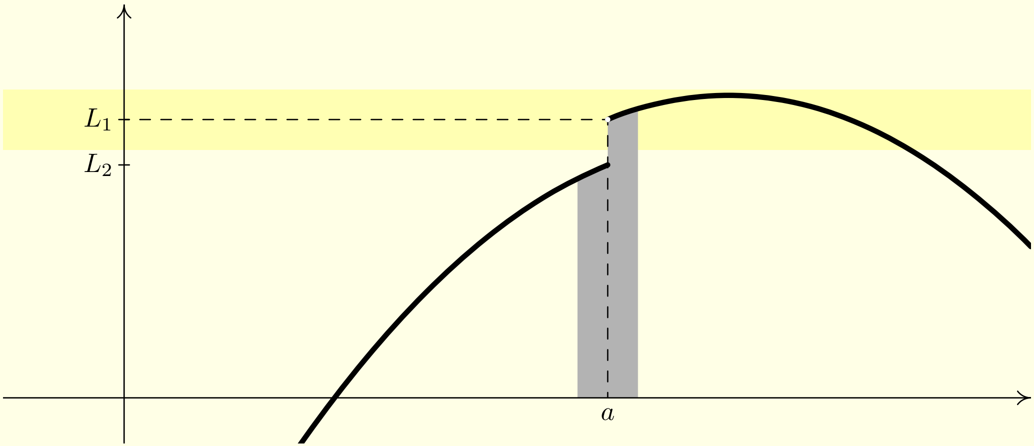
Definice 1 (definice limity) Je-li splněna podmínka z předchozího bodu, říkáme, že funkce má v bodě a limitu rovnu číslu L. Píšeme $\boxed{\lim_{x\to a} f(x) = L}$.

Robert Mařík



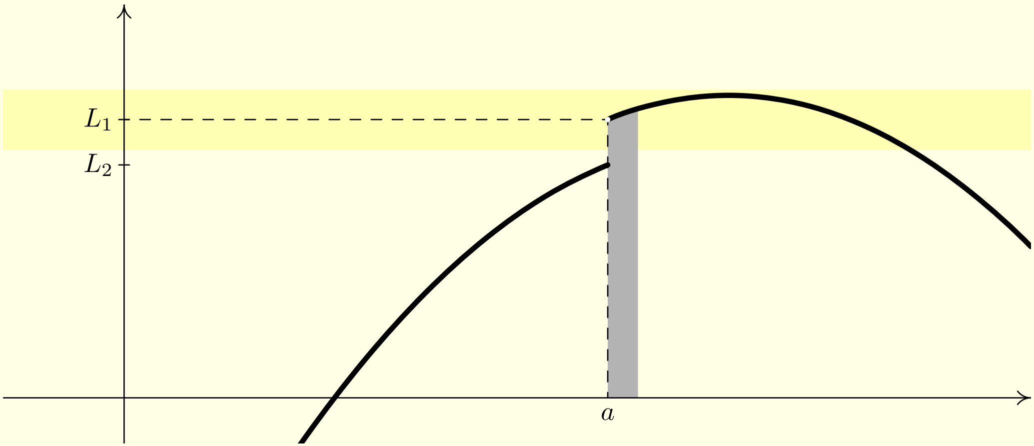
- Hrejme s jinou funkcí. Toto je výchozí pozice, vršek šedé množiny je ve žlutém pásu a ✍ je „na tahu“.
- Hra zase není spravedlivá (vidíte kdo vyhraje?).

Robert Mařík
Diferenciální počet



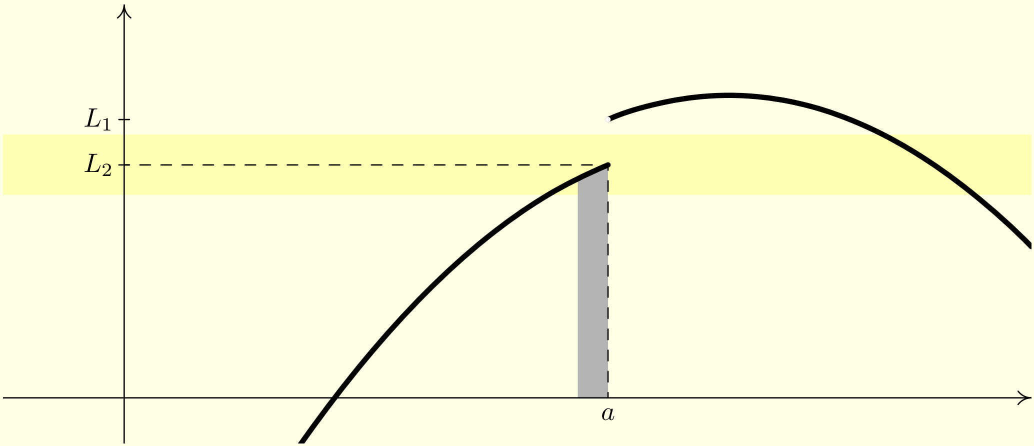
- ✍ vyhraje „jedním tahem“. Na tento útok neexistuje protitah šedým okolím.
- Tato funkce nemá v bodě a limitu rovnu číslu L_1. Lze totiž najít okolí bodu L_1 takové, že sebevětší zúžení ryzího okolí bodu a (šedý pás bez přerušované čáry) nezpůsobí to, že všechny funkční hodnoty se dostanou do tohoto pásu.
- Podobně, ani L_2 ani žádné jiné číslo není limitou funkce v bodě a. Funkce v bodě a nemá limitu.

Robert Mařík
Diferenciální počet



- **Ale:** Ke každému okolí bodu L_1 nalezneme pravé ryzí okolí bodu a takové, že obraz všech bodů z tohoto pravého ryzího okolí bodu a leží v uvažovaném okolí bodu L_1. (Při zúžení okolí bodu L_1 okolí stačí odpovídajícím způsobem zúžit pravé okolí bodu a)

Definice 2 (definice limity zprava) Je-li splněna podmínka z předchozího bodu, říkáme, že funkce má v bodě a limitu zprava rovnu číslu L_1. Píšeme $\boxed{\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = L_1}$.

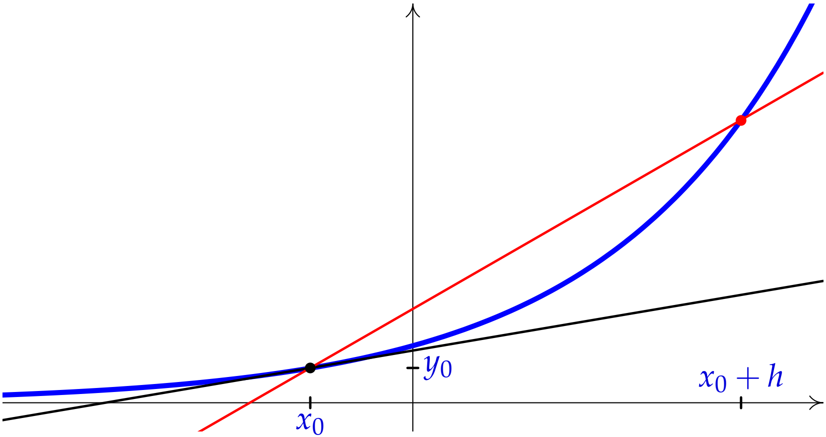


- Ke každému okolí bodu L_2 nalezneme levé ryzí okolí bodu a takové, že obraz všech bodů z tohoto levého ryzího okolí bodu a leží v uvažovaném okolí bodu L_2. (Při zúžení okolí bodu L_2 stačí odpovídajícím způsobem zúžit levé okolí bodu a)

Definice 3 (definice limity zleva) Je-li splněna podmínka z předchozího bodu, říkáme, že funkce má v bodě a limitu zleva rovnu číslu L_2. Píšeme $\boxed{\lim_{x\to a^-} f(x) = L_2}$.

8. Rovnice tečny podruhé

Směrnici sečny najdeme snadno, protože máme dva její body. Tečnu můžeme potom najít jako limitní polohu sečen.



Směrnice sečny je $k = \dfrac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = 2.07$.

Tečna je (přibližně) $y = 0.61x + 0.91$.

|< < Play > >|

Robert Mařík

Home Page
Print
Title Page
Page 20 of 21
Go Back
Full Screen
Close
Quit

9. Definice derivace

Derivace je veličina, která udává, jak rychle se mění funkční hodnoty dané funkce. Přesněji: je to veličina která udává směrnici tečny ke grafu funkce.

Definice 4 (derivace funkce v bodě) Nechť $x \in \mathrm{D}(f)$. Řekneme, že funkce f má *v bodě x derivaci* rovnu číslu označenému $f'(x)$, jestliže existuje konečná limita

$$\boxed{f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}}. \tag{1}$$

Podobně definujeme i derivaci zprava a derivaci zleva. Požíváme při tom limitu zprava a zleva místo oboustranné limity (1).

Definice 5 (derivace funkce) Nechť má funkce f derivaci v každém bodě otevřeného intervalu I. Předpisem, který každému bodu x z intervalu I přiřadí derivaci funkce f v bodě x je definována funkce, kterou nazýváme *derivací funkce f* na intervalu I a označujeme f'.

Definice 6 (vyšší derivace) Buď $f(x)$ funkce a $f'(x)$ její derivace. Existuje-li derivace $(f'(x))'$ funkce $f'(x)$, nazýváme ji *druhou derivací* funkce $f(x)$ a označujeme $f''(x)$. n-násobným opakováním tohoto postupu dospíváme k n-té derivaci funkce $f(x)$, kterou označujeme $f^{(n)}(x)$.

UNIVERSITAS AGRICULTURAE ET SILVICULTURAE MENDELIANAE BRUNENSIS

Robert Mařík
Diferenciální počet