Mathematical Assistant on Web

Robert Mařík

Mendelova zemědělská a lesnická univerzita v Brně

Lesnická
a dřevařská
fakulta

Mathematical Asistant on Web (MAW)

Jak se rodila myšlenka na vytvoření aplikace

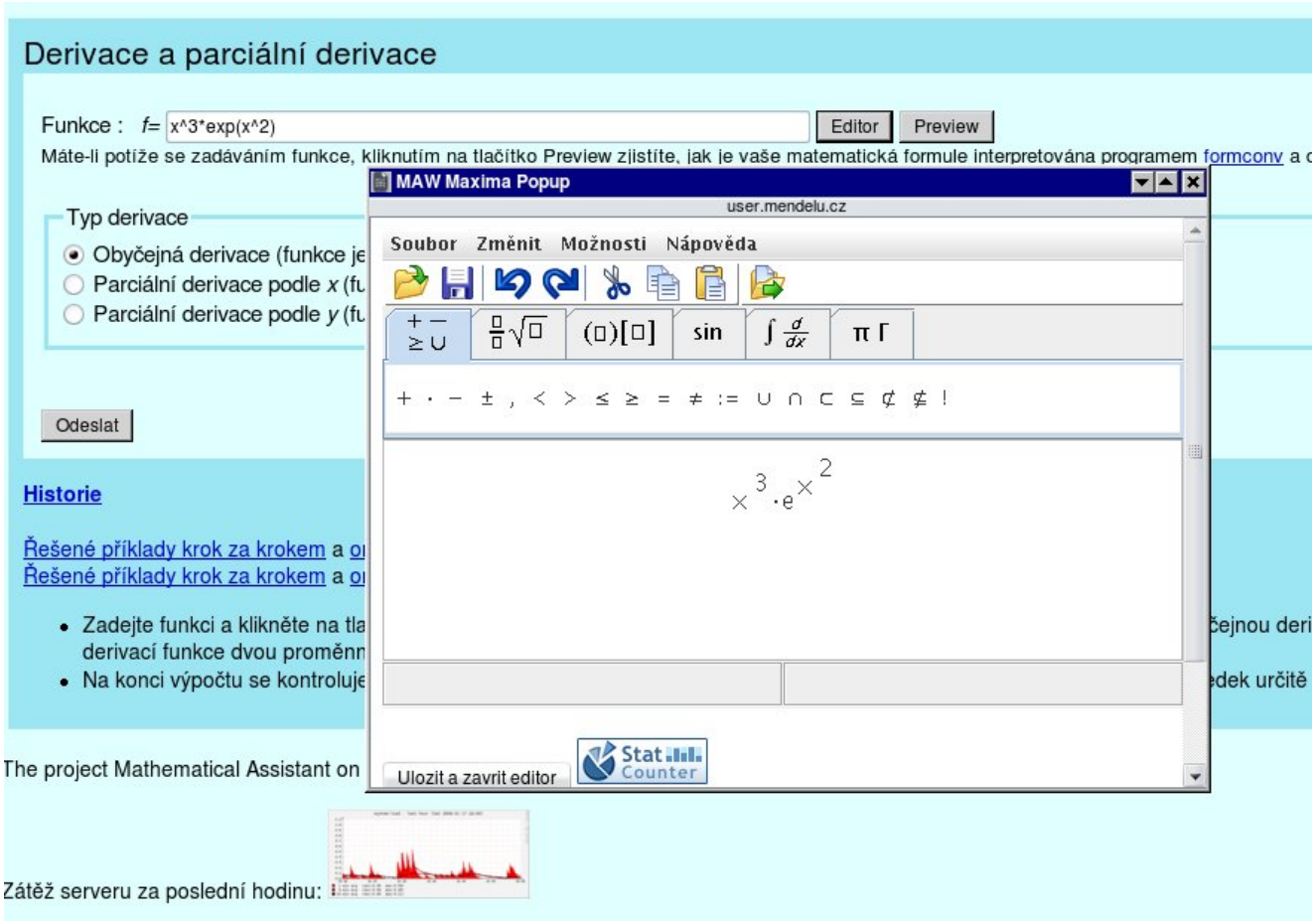
- Vláda ČR a EU podporují **celoživotní vzdělávání** (*překlad*: na univerzitu přicházejí čtyřicátníci se značně pohaslými znalostmi středoškolské matematiky)
- Vláda ČR a EU požadují **větší procento** vysokoškolsky vzdělaných lidí (*překlad*: univerzitu zkouší vystudovat ne nejvzdělanějších 15 % populace, ale 40%)
- Vysokoškolské vzdělávání je **vícestupňové** (*překlad*: po derivacích a integrálech na baklářském stupni si studenti od matematiky dva roky "odpočinou" a teprve poté pokračují na magisterském stupni parciálními derivacemi, diferenciálními rovnicemi a dvojným integrálem)
- Studenti se často učí matematiku pomocí sbírek matematických úloh (*překlad*: čtením řešených příkladů a následným napodobováním)

MAW — výpočty snadno a rychle

- Systém je určen jako podpora slabším studentům, matematickým začátečníkům, kteří jsou nejistí v praktickém počítání
- Z pohledu uživatele jde o **webové formuláře šité na míru** klasickým úloham základního kurzu matematiky
- Student do formuláře zadá svůj problém a obdrží zpracovaný výsledek, včetně rozepsaného postupu řešení

První dojmy

Vstupní formuláře mají všechny podobnou strukturu a obsahují předdefinované ukázkové příklady a historii.



Derivace a Lagrangeův polynom

Derivace

http://user.mendelu.cz/marik/maw

Zadání[1]: Derivujte funkci $y = x^3\,e^{x^2}$

označení: $(\cdot)' = \frac{d}{dx}$

$$y' = \left(x^3\,e^{x^2}\right)'$$

Derivace součinu: $\left(x^3\,e^{x^2}\right)' = x^3\,\left(e^{x^2}\right)' + e^{x^2}\,\left(x^3\right)'$

$$y' = x^3\,\left(e^{x^2}\right)' + e^{x^2}\,\left(x^3\right)'$$

Derivace mocninné funkce: $\left((x)^3\right)' = 3\,x^2$

Derivace exponenciální funkce: $\left(e^{x^2}\right)' = e^{x^2}\,\left(x^2\right)'$

$$y' = x^3\,e^{x^2}\,\left(x^2\right)' + 3\,x^2\,e^{x^2}$$

Derivace mocninné funkce: $\left((x)^2\right)' = 2\,x$

$$y' = 2\,x^4\,e^{x^2} + 3\,x^2\,e^{x^2}$$

Pokusíme se třemi různými způsoby automaticky upravit vypočtenou derivaci, Všechny varianty jsou ekvivalentní matematické výrazy, vyberte si proto tu úpravu, která působí opticky nejpřijatelněji (může se stát, že jsou některé tvary výsledku po úpravách stejné, v tom případě se snažíme ty co se opakují vynechat a nemusí tu proto být uvedeny všechny tři úpravy).

Úprava 1: $y' = x^2\,\left(2\,x^2 + 3\right)\,e^{x^2}$

Úprava 2: $y' = \left(2\,x^4 + 3\,x^2\right)\,e^{x^2}$

Úprava 3: $y' = 2\,x^4\,e^{x^2} + 3\,x^2\,e^{x^2}$

[1] Pokud se zadaná funkce neshoduje s funkcí, která je uvedena na začátku řetězce derivování, znamená to, že došlo k automatickým úpravám vedoucím k přepsání zadané funkce do ekvivalentního, ale jednoduššího tvaru.

Interpolace pomocí Lagrangeova polynomu

http://user.mendelu.cz/marik/maw

Pro zadané body hledáme polynom, co nejmenšího stupně, který prochází všemi těmito body.

i	0	1	2
x_i	1	2	3
y_i	2	3	1

Protože je zadáno 3 bodů, bude stupeň polynom nejvýše 2.

Pomocí y-ových souřadnic sestavíme tvar Lagrangeova polynomu.

$$L(x) = 2l_0(x) + 3l_1(x) + l_2(x)$$

Pomocí x-ových souřadnic sestavíme a upravíme pomocné Lagrangeovy polynomy.

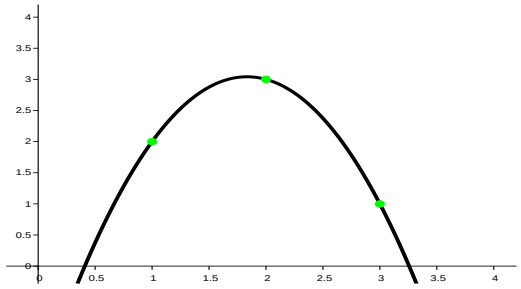
$$l_0(x) = \frac{(x-2)\,(x-3)}{(1-2)\,(1-3)} = \frac{x^2-5x+6}{2} = \frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{2}x + 3$$

$$l_1(x) = \frac{(x-1)\,(x-3)}{(2-1)\,(2-3)} = \frac{x^2-4x+3}{-1} = -x^2 + 4x - 3$$

$$l_2(x) = \frac{(x-1)\,(x-2)}{(3-1)\,(3-2)} = \frac{x^2-3x+2}{2} = \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + 1$$

Dosadíme pomocné Lagrangeovy polynomy a sečteme členy se stejnou mocninou (výsledek je uveden v rámečku).

$$L(x) = 2\left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{2}x + 3\right) + 3\left(-x^2 + 4x - 3\right) + \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + 1\right) = \boxed{-\frac{3}{2}x^2 + \frac{11}{2}x - 2}$$



Průběh funkce

Průběh funkce programem Maxima
http://user.mendelu.cz/marik/maw

Vyšetřujeme průběh funkce $\boxed{y = \frac{x^3}{x-1}}$

Výpočet je zpravidla rozdělen na dvě strany. Na první straně jsou výpočty derivací, na druhé straně graf.

Podmínka na body nespojitosti: $x - 1 = 0$
Body nespojitosti: $x_1 = 1$
Podmínka na průsečík s osou x: $\frac{x^3}{x-1} = 0$
Průsečíky s osou x: $x_1 = 0$
Funkce není ani sudá ani lichá.

Výpočet y': $\left[\frac{x^3}{x-1}\right]' = \frac{3x^2(x-1) - x^3}{(x-1)^2} = \frac{2x^3 - 3x^2}{(x-1)^2} = \frac{x^2(2x-3)}{(x-1)^2}$
První derivace: $\boxed{y' = \frac{x^2(2x-3)}{(x-1)^2}}$

Podmínka pro stacionární body: $x^2(2x-3) = 0$
Stacionární body: $x_1 = \frac{3}{2},\ x_2 = 0$

Výpočet y'': $\left[\frac{2x^3 - 3x^2}{(x-1)^2}\right]' = \frac{(6x^2 - 6x)(x-1)^2 - (2x^3 - 3x^2)\,2(x-1)}{(x-1)^4} =$

$= \frac{\Big(x-1\Big)\Big((6x^2 - 6x)(x-1) - (2x^3 - 3x^2)\,2\Big)}{(x-1)^4} =$

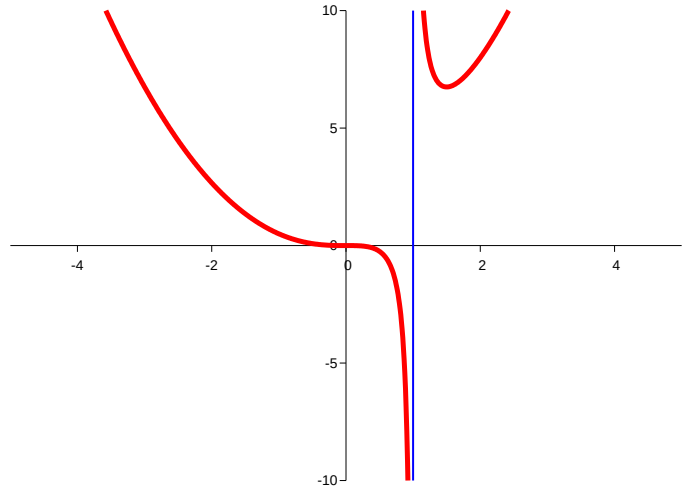
$= \frac{(6x^2 - 6x)(x-1) - (2x^3 - 3x^2)\,2}{(x-1)^3} = \frac{2x^3 - 6x^2 + 6x}{(x-1)^3} = \frac{2x(x^2 - 3x + 3)}{(x-1)^3}$

Druhá derivace: $\boxed{y'' = \frac{2x(x^2 - 3x + 3)}{(x-1)^3}}$

Podmínka pro stacionární body: $2x\left(x^2 - 3x + 3\right) = 0$
Kritické body: $x_1 = 0$

Funkce nemá asymptotu v $\pm\infty$.

Graf



January 18, 2009 9:04 Mathematical Assistant on Web, http://user.mendelu.cz/marik/maw

Diferenciální rovnice druhého řádu

Lineární diferenciální rovnice druhého řádu
http://user.mendelu.cz/marik/maw

Řešíme nehomogenní rovnici

$$y'' + 2y' + y = x^2 \tag{1}$$

1. Vyřešíme nejprve asociovanou homogenní rovnici

$$y'' + 2y' + y = 0$$

Charakteristická rovnice: $\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$

Kořeny: $\lambda_{1,2} = \dfrac{-(2) \pm \sqrt{(2)^2 - 4\,(1)}}{2} = \dfrac{-2 \pm \sqrt{0}}{2} = -1$

Charakteristický polynom má jeden dvojnásobný kořen.
Dvě lineárně nezávislá řešení jsou $y_1 = e^{-x}$ a $y_2 = xe^{-x}$.
Obecné řešení asociované homogenní rovnice je $y = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x}$.

2. Hledáme partikulární řešení nehomogenní rovnice.
Pravá strana rovnice je polynom $P(x) = x^2$, stupeň tohoto polynomu je 2.
Číslo 0 není kořenem charakteristického polynomu a partikulární řešení je tvaru
$y = (ax^2 + bx + c)$.
2a. Přípravné výpočty (musíme najít derivace a dosadit tyto derivace do zadané rovnice):

$$\begin{aligned} y &= ax^2 + bx + c \\ y' &= 2ax + b \\ y'' &= 2a \end{aligned} \tag{2}$$

2b. Dosazení do rovnice (dosadíme do (1))

$$\underbrace{(2a)}_{y''} + 2\underbrace{(2ax + b)}_{y'} + \underbrace{(ax^2 + bx + c)}_{y} = x^2$$

and add like powers of x

$$ax^2 + bx + 4ax + c + 2b + 2a = x^2$$

and collect the coefficients at the powers of x

$$ax^2 + (b + 4a)\,x + c + 2b + 2a = x^2$$

2c. Vypočítáme neurčité koeficienty Porovnáním koeficientů získáváme (od nejvyšší mocniny)

$$\begin{aligned} a &= 1 \\ b + 4a &= 0 \\ c + 2b + 2a &= 0 \end{aligned}$$

Lineární diferenciální rovnice druhého řádu
http://user.mendelu.cz/marik/maw

Řešíme nehomogenní rovnici

$$y'' + 2y' + y = x^2$$

1. Asociovaná homogenní rovnice je

$$y'' + 2y' + y = 0$$

Charakteristický polynom je $\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$

Kořeny charakteristické rovnice: $\lambda_{1,2} = \dfrac{-(2) \pm \sqrt{(2)^2 - 4\,(1)}}{2} = \dfrac{-2 \pm \sqrt{0}}{2} = -1$

Charakteristický polynom má jeden dvojnásobný kořen.
Dvě lineárně nezávislá řešení jsou $y_1 = e^{-x}$ a $y_2 = xe^{-x}$.
Obecné řešení asociované homogenní rovnice je $y = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x}$.

2. Metodou variace konstant hledáme řešení ve tvaru

$$y_p = A(x)e^{-x} + B(x)xe^{-x}$$

Řešíme soustavu rovnic

$$A'(x)\left[e^{-x}\right] + B'(x)\left[xe^{-x}\right] = 0 \quad A'(x)\left[-e^{-x}\right] + B'(x)\left[-(x-1)\,e^{-x}\right] = x^2$$

s neznámými $A'(x)$ a $B'(x)$.
Determinant matice soustavy (wronskián funkcí y_1 a y_2)

$$W[y_1, y_2](x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{-x} & xe^{-x} \\ -e^{-x} & -(x-1)\,e^{-x} \end{vmatrix} = e^{-2x}$$

Pomocné determinanty jsou

$$W_1(x) = \begin{vmatrix} 0 & y_2(x) \\ f(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & xe^{-x} \\ x^2 & -(x-1)\,e^{-x} \end{vmatrix} = -x^3 e^{-x}$$

$$W_2(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & 0 \\ y_1'(x) & f(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{-x} & 0 \\ -e^{-x} & x^2 \end{vmatrix} = x^2 e^{-x}$$

Řešení soustavy rovnic pro $A'(x)$ a $B'(x)$ je

$$A'(x) = \frac{W_1}{W} = -x^3 e^x$$

$$B'(x) = \frac{W_2}{W} = x^2 e^x$$

Integrací dostaneme $A(x)$ a $B(x)$ (kliknutím na integrál tento integrál nahrajete do aplikace usnadňující výpočet neurčitých integrálů)

$$A(x) = \int -x^3 e^x \,\mathrm{d}x = \left(-x^3 + 3x^2 - 6x + 6\right) e^x$$

$$B(x) = \int x^2 e^x \,\mathrm{d}x = \left(x^2 - 2x + 2\right) e^x$$

Partikulární řešení (po dosazení a úpravě):
$y_p(x) = A(x)y_1(x) + B(x)y_2(x) = x^2 - 4x + 6$
Obecné řešení:
$y(x) = y_p(x) + C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) = x^2 - 4x + 6 + C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x}$.

Integrály

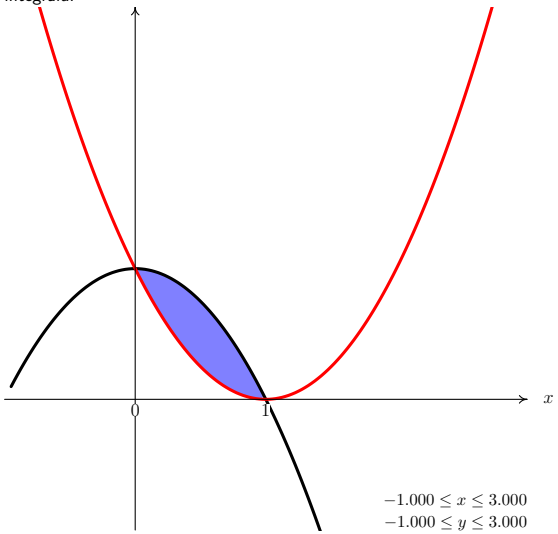
Geometrické aplikace určitého integrálu

http://user.mendelu.cz/marik/maw

Hledáme obsah obrazce mezi grafy funkcí $f : y = 1 - x^2$ a $g : y = (1-x)^2$ na intervalu od 0 do 1.

$$\begin{aligned} S &= \int_0^1 \left[1 - x^2 - \left((1-x)^2\right)\right] \mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 2x - 2x^2 \, \mathrm{d}x \\ &= \left[x^2 - \frac{2}{3}x^3\right]_0^1 \\ &= \frac{1}{3} \approx 0.3333333333 \end{aligned}$$

Klikněte na integrál pro předání funkce online aplikaci, která Vás provede výpočtem neurčitého integrálu.

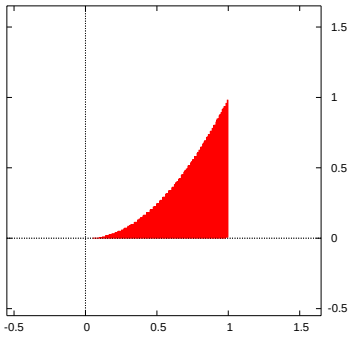


Dvojný integrál

http://user.mendelu.cz/marik/maw

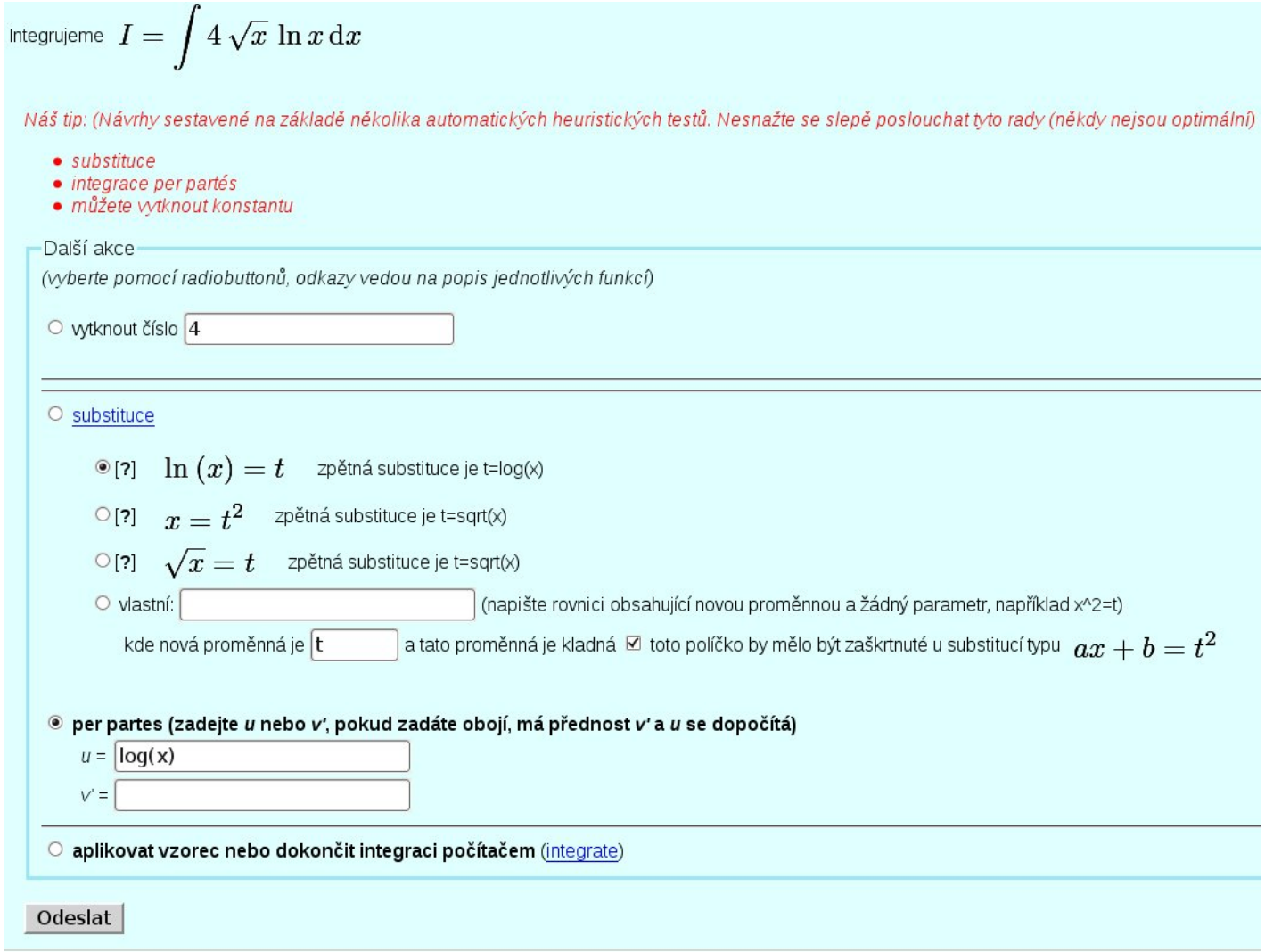
Integrujeme funkci $\left(x^3+1\right)\, y$ na množině zadané nerovnostmi $0 \le x \le 1$ a $0 \le y \le x^2$.

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \int_0^{x^2} \left(x^3+1\right)\, y \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 \left[\frac{\left(x^3+1\right)\, y^2}{2}\right]_0^{x^2} \mathrm{d}x \qquad \textit{(vnitřní integrace)} \\ &= \int_0^1 \frac{1}{2}\left(1+x^3\right)\, \left(x^2\right)^2 - \frac{1}{2}\left(1+x^3\right)\, 0^2 \, \mathrm{d}x \qquad \textit{(dosazení mezí)} \\ &= \int_0^1 \frac{x^7+x^4}{2} \, \mathrm{d}x \qquad \textit{(úprava)} \\ &= \left[\frac{x^8}{16} + \frac{x^5}{10}\right]_0^1 \qquad \textit{(vnitřní integrace)} \\ &= \frac{1}{10}\,1^5 + \frac{1}{16}\,1^8 - \left(\frac{1}{10}\,0^5 + \frac{1}{16}\,0^8\right) \qquad \textit{(dosazení mezí)} \\ &= \frac{13}{80} \qquad \textit{(úprava)} \end{aligned}$$



Neurčitý integrál

Výpočet neprobíhá automaticky, ale je řízen uživatelem. MAW provádí výpočty a u každé funkce se snaží nabízet uživateli vhodnou metodu výpočtu.



MAW nemine cíl

MAW obsahuje kontrolní mechanismy („dělá zkoušku“) aby se mu nestávalo to co vidíme na výpočtu z `mathway.com`.

Mathway™ BETA

Basic Math | Pre-Algebra | Algebra | Trigonometry | Pr

Solve the Equation

csc(x)=0

Take the inverse cosecant of both sides of the equation to extract x from inside the cosecant.

x=arccsc(0)

Take the inverse cosecant of 0 to get $\frac{1}{\text{NaN}}$.

$x=\frac{1}{\text{NaN}}$

Combine all similar variables in the expression.

$x=\frac{1}{N^2a}$

Arrange the variables alphabetically within the expression $\frac{1}{N^2a}$. This is the standard way of writing an expression.

$x=\frac{1}{aN^2}$ ✓

MAW dává možnost volby

Některé jiné služby na webu generují výpočet, který nedává možnost volby metody. MAW je naopak vstřícný k experimentátorům.

Následující výpočet je automaticky vygenerován aplikací **Integrace s programem Maple** na serveru MU v Brně. Zvolená substituce není pro výpočet integrálu optimální, nicméně uživatel nemá možnost použitou substituci ovlivnit.

MAW uživateli tuto možnost dává tam, kde to má smysl (např. u neurčitého integrálu a diferenciální rovnice druhého řádu).

Výstup

Postup:

$$\int x\sqrt{x^2+1}\,dx$$

[zavedeme substituci, $x=\tan(u)$]

$$=\int \tan(u)(\sec(u))^3\,du$$

[zavedeme substituci, $u1=\sec(u)$]

$$=\int u1^2\,du1$$

[integrujeme výraz]

$$=1/3\,u1^3$$

[dosadíme zpět]

$$=1/3\,(\sec(u))^3$$

[dosadíme zpět]

$$=1/3\,(x^2+1)^{3/2}$$

MAW má čtivý výstup

Výstup MAWu je typograficky kvalitní a přizpůsobený bežně používaným normám.

Následující výpočet je automaticky vygenerován komerčním serverem `calc101.com`. Zvolená forma zápisu není v českých učebnicích příliš rozšířena a zajisté bude pro cílovou skupinu MAWu (slabé studenty) matoucí.

$\frac{d}{dx}(\sin(\log(x)))$

Use the chain rule
$\frac{d\sin(\log(x))}{dx} = \frac{d\sin(u)}{du}\ \frac{du}{dx}$,
where $u = \log(x)$.

$= \cos(\log(x))\ \frac{d}{dx}(\log(x))$

The derivative of $\log(x)$ is $\frac{1}{x}$.

$= \frac{\cos(\log(x))}{x}$

Now do the second derivative.

$\frac{d^2}{dx^2}(\sin(\log(x)))$

The second derivative is the derivative of the derivative.

$= \frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dx}(\sin(\log(x)))\right)$

Copy the first derivative from three lines above.

$= \frac{d}{dx}\left(\frac{\cos(\log(x))}{x}\right)$

Use the quotient rule
$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{\frac{du}{dx}v - u\frac{dv}{dx}}{v^2}$,
where $u = \cos(\log(x))$ and $v = x$.

Use the quotient rule
$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{\frac{du}{dx}v - u\frac{dv}{dx}}{v^2}$,
where $u = \cos(\log(x))$ and $v = x$.

$= \frac{x\ \frac{d}{dx}(\cos(\log(x))) - \cos(\log(x))\ \frac{d}{dx}(x)}{x^2}$

The derivative of x^n is $n\,x^{n-1}$.

$= \frac{x\ \frac{d}{dx}(\cos(\log(x))) - \cos(\log(x))}{x^2}$

Use the chain rule
$\frac{d\cos(\log(x))}{dx} = \frac{d\cos(u)}{du}\ \frac{du}{dx}$,
where $u = \log(x)$.

$= \frac{-\cos(\log(x)) - x\sin(\log(x))\ \frac{d}{dx}(\log(x))}{x^2}$

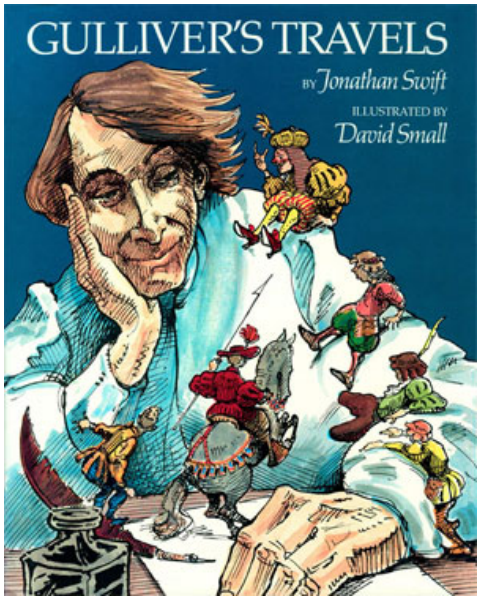
The derivative of $\log(x)$ is $\frac{1}{x}$.

$= \frac{-\cos(\log(x)) - \sin(\log(x))}{x^2}$

Simplify, assuming each variable is in an appropriate range.

$= -\frac{\cos(\log(x)) + \sin(\log(x))}{x^2}$

This material is subject to copyright.
Any unauthorized use, copying, or mirroring is prohibited.
©2000-2008 calc101.com

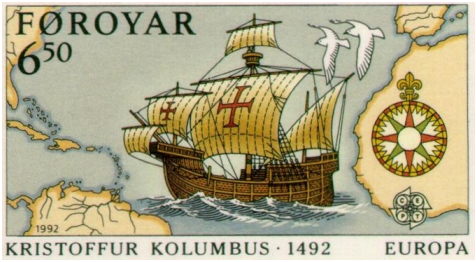


MAW stojí na ramenou obrů

If I have seen further it is only by standing on the shoulders of Giants. (Newton)

Výkonné jádro MAWu se spoléhá na osvědčené programy, historie některých sahá až do 60. let 20 století.

- Systém počítačové algebry **Maxima**
- Typografický systém **TEX**
- Program pro kreslení obrázků **GNUplot**



MAW se nesnaží objevit Ameriku

MAW se vždy snaží k řešení úkolů využít již dostupné nástroje. Šetří tak čas svých autorů a může využívat nástroje, které by jeho tvůrci vytvořit neuměli. Pomáhá také při testování dalších open source aplikací.

- Pro převod matematických výrazů mezi různými formáty slouží program `formconv`
- Některé pasáže týkající se bezpečnosti jsou převzaty z projektu `MaximaPHP`
- Pro editaci matematických výrazů a jejich zadávání do vstupních políček je využit program `DragMath`

MAW není tajemný hrad v Karpatech

- Zdrojové texty MAWu jsou publikovány na `sourceforge.org`
- Aplikaci si může kdokoliv na instalovat na svůj počítač nebo server
- Při procházení historie jsou průběžně odhalovány a opravovány chyby (nejčastěji úlohy, jejichž zpracování z nějakého důvodu selhalo)
- Na testování se podílejí sami uživatelé (díky!) – registrujeme více než 2000 přístupů denně během zkouškového období, celkem z více než 100 zemí za 1 rok provozu