Parciální diferenciální rovnice s p-Laplaciánem

Robert Mařík

Mendelova zemědělská a lesnická univerzita v Brně

Lesnická
a dřevařská
fakulta

Schrödingerova rovnice

$$\Delta u + c(x)u = 0$$

$x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$,

$\Delta u = \mathsf{div}\big(\nabla u\big) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{(\partial x_i)^2} u$

Linearita Schrödingerovy rovnice

- Konstantní násobek jednoho řešení je opět řešením této rovnice.
- Součet dvou libovolných řešení je opět řešením této rovnice.

Energetický funkcionál je kvadratický v proměnných $\|\nabla y\|$ a y

$$\int_M \Big(\|\nabla y(x)\|^2 - c(x)|y(x)|^2 \Big)\, \mathrm{d}x$$

Speciální případ: Platí-li $n = 1$ nebo je-li $c(x)$ funkcí pouze $||x||$, rovnice se redukuje na obyčejnou diferenciální rovnici

$$\Big(r(t)u' \Big)' + q(t)u = 0$$

Rovnice s p-Laplaciánem

$$\text{div}\left(\|\nabla u\|^{p-2}\nabla u\right) + c(x)f(u) = 0$$

Fyzikální aplikace: pohyb nenewtonovských kapalin (viskozita není konstantní, napětí není úměrné gradientu rychlosti), tok přes pórovité látky, tání ledovců

Pololineární diferenciální rovnice s p-Laplaciánem

$$\text{div}\left(\|\nabla u\|^{p-2}\nabla u\right) + c(x)\Phi(u) = 0, \qquad \text{kde } \Phi(u) = |u|^{p-2}u.$$

- Konstantní násobek jednoho řešení je opět řešením této rovnice.
- Funkce $\Phi(u)$ je hranice mezi rychle a pomalu rostoucí nelinearitou $f(u)$.
- Rozpracovaná kvalitativní teorie.

Energetický funkcionál je funkcionál stupně p v proměnných $\|\nabla y\|$ a y

$$\int_M \Big(\|\nabla y(x)\|^p - c(x)|y(x)|^p\Big)\,\mathrm{d}x$$

Speciální případ: Platí-li $n = 1$ nebo je-li $c(x)$ funkcí pouze $||x||$, rovnice se redukuje na obyčejnou diferenciální rovnici

$$\Big(r(t)\Phi(u')\Big)' + q(t)\Phi(u) = 0$$

Problém 1.

$$\operatorname{div}\left(\|\nabla u\|^{p-2}\nabla u\right) + c(x)\Phi(u) = 0$$
$$\int_M \left(\|\nabla y(x)\|^p - c(x)|y(x)|^p\right) \mathrm{d}x$$

Pozorování: Rovnice je oscilatorická, jestliže funkce $c(x)$ je dostatečně velká.

"Obvyklý" přístup: Funkce $c(x)$ je velká, pokud je velká funkce $C(t)$ – střední hodnota funkce $c(x)$ na sféře $\|x\| = t$.

Nevýhoda "obvyklého" přístupu: Tento přístup nedokáže zachytit situace, kdy je funkce $c(x)$ dostatečně velká jenom v některém směru (tak velká, že způsobí oscilaci), ale naopak malá v jiném směru (tak malá, že celková střední hodnota funkce bude malá).

Odstranění uvedené nevýhody: Použitím jemnějších metod, které umožňují zohlednit vícedimenzionálnost problému, je možno střední hodnotu potenciálu nahradit vhodně zvoleným váženým průměrem. Tento postup dovolí některé části potenciálu započítat s menší vahou (dokonce i nulovou!).

Souvislost se známými výsledky: Myšlenkově postup volně navazuje na výsledky A. Toraeva (odvozené jinou metodou), dokázané výsledky jsou však nové i v lineárním případě.

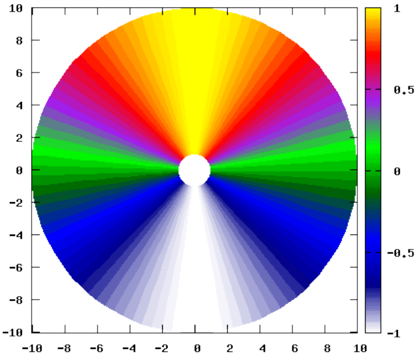
Oscilace v horní polorovině. Jestliže $n = 2$ a

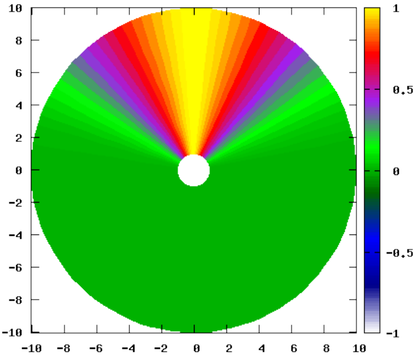
$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{\ln t} \int_1^t r \int_0^\pi c(r,\varphi)\, \sin^2(\varphi)\, \mathsf{d}\varphi\, \mathsf{d}r \; > \frac{\pi}{2},$$

pak je rovnice $\boxed{\Delta u + c(x)u = 0}$ oscilatorická.

$$c(r,\varphi) = \frac{A}{r^2}\sin\varphi$$

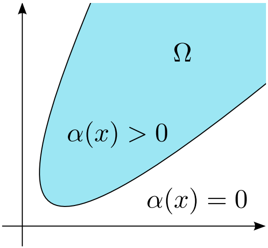
$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sin\varphi\, \mathsf{d}\varphi \; = 0 \qquad\qquad \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin^3\varphi\, \mathsf{d}\varphi \; = \frac{8}{3\pi} \approx 0.85$$





Detekce oscilace s využitím pouze funkčních hodnot v oblasti Ω.

Věta 1. *Buď Ω neohraničená oblast v $\mathbb{R}^n$, jednoduše souvislá s po částech hladkou hranicí $\partial\Omega$ a* $\mathrm{meas}\big(\Omega \cap S(t)\big) > 0$ *pro $t > 1$. Buď $k \in (1, \infty)$ reálné číslo a $\alpha \in C^1(\Omega \cap \Omega(1), \mathbb{R}^+) \cap C_0(\overline{\Omega}, \mathbb{R})$ funkce splňující*



(i) $\alpha(x) = 0$ *právě tehdy, když $x \notin \Omega \cap \Omega(1)$,*

(ii) $$\int_1^\infty \left(\int_{\Omega \,\cap\, S(t)} \alpha(x) \,\mathrm{d}\sigma \right)^{1-q} \mathrm{d}t = \infty.$$

Jestliže platí

$$\lim_{t\to\infty} \int_{\Omega \,\cap\, \Omega(1,t)} \alpha(x) \left(c(x) - \frac{k}{(p\alpha(x))^p} \|\nabla \alpha(x)\|^p \right) \mathrm{d}x = \infty,$$

pak rovnice

$$\mathrm{div}\left(\|\nabla u\|^{p-2} \nabla u\right) + c(x)|u|^{p-2}u = 0.$$

je oscilatorická v Ω.

Problém 2

Rovnice

$$\boxed{\operatorname{div}\Big(A(x)\|\nabla u\|^{p-2}\nabla u\Big) + c(x)|u|^{p-2}u = 0}$$

se pro $p = 2$ redukuje na lineární rovnici

$$\boxed{\operatorname{div}\Big(A(x)\nabla u\Big) + c(x)u = 0}.$$

Pozorování: Dosazením $p = 2$ do známých oscilačních kritérií odvozených pro obecný případ $p > 1$ dostáváme horší výsledky než výsledky, které byly odvozeny přímo pro lineární rovnici. Proč?

$$\boxed{\mathsf{div}\Big(A(x)\|\nabla u\|^{p-2}\nabla u\Big)+c(x)\Phi(u)=0} \tag{1}$$

Věta 2. *Definujme funkce*

$$a(r)=\int_{S(r)}\lambda_{\mathsf{max}}(x)\left(\frac{\lambda_{\mathsf{max}}(x)}{\lambda_{\mathsf{min}}(x)}\right)^{p-1}\mathsf{d}\sigma\,,\qquad b(r)=\int_{S(r)}c(x)\,\mathsf{d}\sigma\,.$$

Jestliže rovnice

$$\Big(a(r)\Phi(u')\Big)'+b(r)\Phi(u)=0$$

osciluje, pak osciluje i rovnice (1)*.*

Věta 3. *Buď* $1<p\le 2$*.*

$$\widehat{a}(r)=\int_{S(r)}\lambda_{\mathsf{max}}(x)\,\mathsf{d}\sigma\ \le a(r),\qquad \widehat{b}(r)=\int_{S(r)}c(x)\,\mathsf{d}\sigma\,.$$

Jestliže rovnice

$$\Big(\widehat{a}(r)\Phi(u')\Big)'+\widehat{b}(r)\Phi(u)=0$$

osciluje, pak osciluje i rovnice (1)

Další otevřené problémy

- Neoscilační kriteria a existence neoscilatorických řešení – velice málo rozpracováno dokonce i v lineárním případě.

- V lineárním případě jsou dva způsoby zavedení oscilace, slabá a silná oscilace. Tyto dva druhy oscilace jsou pro lineární rovnice za "nepříliš omezujících" podmínek ekvivalentní. Pro pololineární rovnice je případná ekvivalence či neekvivalence otevřený problém.

Pedagogická činnost

- Zavedení volitelného předmět Dynamické modely v biologii (diferenciální rovnice, diferenční rovnice a jejich aplikace v biologii a ekologii – modely populací, modely holubice – jestřáb, periodické a neperiodické cikády, samočištění Kanadských jezer, ...).
- Online aplikace Mathematical Assistant on Web – řešení typických úloh základních kurzů vysokoškolské matematiky online po zadání vstupních dat do formuláře na webu. Toto řešení je včetně postupu a je založeno výlučně na Open Source. (Společný projekt s Mgr. Tihlaříkovou.)
- Makra pro AcroTEX – vyhodnocování správnosti testových odpovědí, kde odpověď je matematický výraz, který může být zadán nejednoznačně (například obecné řešení diferenciální rovnice).
- AcroWeb – rozhraní pro tvorbu testů AcroTEXu online z jednoduchého textového souboru (struktura jako v UIS).
- Fancytooltips – LATEXový balíček pro vkládání informativních textů a animací (na TEXlive a v repozitářích MikTEXu).
- Hry a makra pro tvorbu hry Jeopardy (na CTAN).

Věta 4. *Pro reálné číslo $l > 1$ definujme funkce*

$$a(r) = (l^*)^{p-1} \int_{S(r)} \rho(x) \lambda_{\mathsf{max}}^p(x) \lambda_{\mathsf{min}}^{1-p}(x) \, \mathrm{d}\sigma \,,$$

$$b(r) = \int_{S(r)} \rho(x) \left[c(x) - \frac{l^{p-1}}{p^p \lambda_{\mathsf{min}}^{p-1}(x)} \left\| \frac{\nabla \rho(x)}{\rho(x)} A(x) \right\|^p \right] \mathrm{d}\sigma \,,$$

kde $l^* = \dfrac{l}{l-1}$*. Jestliže rovnice* $\Big(a(r)\Phi(u')\Big)' + b(r)\Phi(u) = 0$ *osciluje, pak osciluje i rovnice*

$$\boxed{\operatorname{div}\Big(A(x)\|\nabla u\|^{p-2}\nabla u\Big) + c(x)\Phi(u) = 0}.$$

Věta 5. *Buď* $1 < p \leq 2$.

$$\widehat{a}(r) = (l^*)^{p-1} \int_{S(r)} \rho(x) \lambda_{\mathsf{max}}(x) \, \mathrm{d}\sigma \,,$$

$$\widehat{b}(r) = \int_{S(r)} \rho(x) \left[c(x) - \frac{l^{p-1}}{p^p} \lambda_{\mathsf{max}}(x) \left\| \frac{\nabla \rho(x)}{\rho(x)} \right\|^p \right] \mathrm{d}\sigma \,,$$

… (tvrzení je stejné jako u Věty 4)