Oscilační kritéria pro parciální diferenciální rovnice s p-Laplaciánem

Robert Mařík

Mendelova zemědělská a lesnická univerzita v Brně

Lesnická a dřevařská fakulta

Pololineární PDR

$$\boxed{\mathrm{div}\left(\|\nabla u\|^{p-2}\nabla u\right) + c(x)\Phi(u) = 0} \tag{1}$$

$p > 1$, $\Phi(u) = |u|^{p-2}u$, $\|x\|$ — Euklidovská norma v $\mathbb{R}^n$, $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right)$

$$\Omega(a) = \left\{x \in \mathbb{R}^n : a \le \|x\|\right\},$$
$$\Omega(a,b) = \left\{x \in \mathbb{R}^n : a \le \|x\| \le b\right\},$$
$$S(a) = \left\{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = a\right\}.$$

$c(x)$ Hölderovsky spojitá na $\Omega(1)$

Definice 1 (Oscilace)**.** Funkce u definovaná na $\Omega(1)$ je *oscilatorická*, jestliže u má nulové body na $\Omega(t)$ pro všechna $t \ge 1$ a *neoscilatorická* jinak.
Rovnice (1) je *oscilatorická*, jestliže nemá na $\Omega(1)$ neoscilatorické řešení.

Ω neohraničená oblast v $\mathbb{R}^n$

Definice 2 (Oscilace v Ω)**.** Funkce u definovaná na $\Omega(1)$ je *oscilatorická v oblasti* Ω, jestliže u má nulové body v $\Omega(t) \cap \Omega$ pro všechna $t \ge 1$ a *neoscilatorická v* Ω jinak.
Rovnice (1) je *oscilatorická v oblasti* Ω, jestliže nemá řešení neoscilatorické v Ω.

Radiálně symetrická rovnice

$$\mathrm{div}\left(\|\nabla u\|^{p-2}\nabla u\right) + c(||x||)\Phi(u) = 0$$

$u(x) = \widetilde{u}\big(\|x\|\big)$

$$\left(r^{n-1}\Phi(\widetilde{u}')\right)' + r^{n-1}c(r)\Phi(\widetilde{u}) = 0, \qquad ' = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}$$

kde $r = \|x\|$.

Obyčejná lineární diferenciální rovnice druhého řádu

Pro $n = 1$ a $p = 2$ se rovnice

$$\mathrm{div}\left(\|\nabla u\|^{p-2}\nabla u\right) + c(x)\Phi(u) = 0$$

redukuje na

$$u'' + c(x)u = 0.$$

Metody

Lemma 1 (metoda Riccatiho rovnice). *Buď u řešení rovnice (1), které je kladné na oblasti Ω. Vektorová funkce $\vec{w}(x)$ definovaná vztahem*

$$\vec{w}(x) = \frac{\|\nabla u(x)\|^{p-2}\nabla u(x)}{|u(x)|^{p-2}u(x)}$$

je dobře definovaná na Ω a splňuje na Ω Riccatiho rovnici ($q = \dfrac{p}{p-1}$)

$$\operatorname{div}\vec{w} + c(x) + (p-1)\|\vec{w}\|^q = 0.$$

Lemma 2 (variační metoda). *Buď u řešení rovnice (1), které je kladné na kompaktní množině M s po částech hladkou hranicí ∂M a $y \in W_0^{1,p}(M)$. Platí*

$$\int_M \Big(\|\nabla y(x)\|^p - c(x)|y(x)|^p\Big)\,\mathrm{d}x \geq 0.$$

Věta 1 (Došlý, Jaroš – Kusano – Yoshida). *Rovnice*

$$\mathrm{div}(||\nabla u||^{p-2}\nabla u) + c(x)|u|^{p-2}u = 0$$

je oscilatorická, pokud je oscilatorická obyčejná diferenciální rovnice

$$\left(r^{n-1}|u'|^{p-2}u'\right)' + \frac{1}{\omega_n}\left(\int_{S(r)} c(x)\,\mathrm{d}x\right)|u|^{p-2}u = 0.$$

Nástroje

Integrace per-partés

$$uv' = (uv)' - u'v$$

$$\int_t^T uv'\,\mathsf{d}x = u(T)v(T) - u(t)v(t) - \int_t^T u'v\,\mathsf{d}x$$

$$\alpha\,\mathsf{div}\,\vec{w} = \mathsf{div}(\alpha\vec{w}) - \langle \vec{w}, \nabla\alpha \rangle$$

$$\int_{\Omega(t,T)} \alpha\,\mathsf{div}\,\vec{w}\,\mathsf{d}x = \int_{S(T)} \alpha\,\langle \vec{w}, \vec{\nu} \rangle\,\mathsf{d}\sigma - \int_{S(t)} \alpha\,\langle \vec{w}, \vec{\nu} \rangle\,\mathsf{d}\sigma - \int_{\Omega(t,T)} \langle \vec{w}, \nabla\alpha \rangle\,\mathsf{d}x$$

Youngova nerovnost (doplnění na čtverec pro $p = 2$)

$$\frac{a^2}{2} \pm aw + \frac{w^2}{2} \geq 0$$

$$\frac{||\vec{a}||^p}{p} \pm \langle \vec{a}, \vec{w} \rangle + \frac{||\vec{w}||^q}{q} \geq 0, \qquad q = \frac{p}{p-1}$$

Věta 2. *Buď Ω neohraničená oblast v $\mathbb{R}^n$, jednoduše souvislá s po částech hladkou hranicí $\partial\Omega$ a* meas$\big(\Omega \cap S(t)\big) > 0$ *pro $t > 1$. Buď $k \in (1, \infty)$ reálné číslo a $\alpha \in C^1(\Omega \cap \Omega(a_0), \mathbb{R}^+) \cap C_0(\overline{\Omega}, \mathbb{R})$ funkce splňující*

(i) $\alpha(x) = 0$ *právě tehdy, když $x \notin \Omega \cap \Omega(a_0)$,*

(ii) $$\int_1^\infty \left(\int_{\Omega \cap S(t)} \alpha(x) \, \mathrm{d}\sigma \right)^{1-q} \mathrm{d}t = \infty.$$

Jestliže platí

$$\lim_{t \to \infty} \int_{\Omega \cap \Omega(1,t)} \alpha(x) \left(c(x) - \frac{k}{(p\alpha(x))^p} \left\| \alpha(x)\vec{b}(x) - \nabla\alpha(x) \right\|^p \right) \mathrm{d}x = \infty,$$

pak rovnice

$$\mathrm{div}\left(\|\nabla u\|^{p-2} \nabla u \right) + \left\langle \vec{b}(x), \|\nabla u\|^{p-2} \nabla u \right\rangle + c(x)\Phi(u) = 0.$$

je oscilatorická v Ω.

Důkaz.

$$\mathrm{div}\, \vec{w} + c(x) + (p-1)\|\vec{w}\|^q + \left\langle \vec{w}, \vec{b}(x) \right\rangle = 0$$

$\square$

$$D = \left\{(t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n : t \geq \|x\| \geq 1\right\}$$
$$D_0 = \left\{(t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n : t > \|x\| \geq 1\right\}$$
$$\Omega_{0,t}(a,b) = \left\{x \in \mathbb{R}^n : a \leq \|x\| \leq b, H(t,x) \neq 0\right\}$$
$$S_{0,t}(a) = \left\{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = a, H(t,x) \neq 0\right\}$$

Věta 3. *Buď $H(t,x) \in C(D,[0,\infty))$. Funkce $\rho(x) \in C^1(\Omega(1),(0,\infty))$ buď taková, že funkce $H(t,x)$ má spojitou parciální derivaci podle x_i ($i = 1..n$) na D_0. Nechť platí následující podmínky*

(i) *Jestliže $\|x\| = t \geq t_0$, pak $H(t,x) = 0$.*

(ii) *Jestliže $H(t,x) = 0$ pro některé $(t,x) \in D_0$, pak $\|\nabla H(t,x)\| = 0$.*

(iii) *Existuje funkce $k(s)$, $k(s) \in C([t_0,\infty),(0,\infty))$ taková, že funkce $f(t,s) := k(s)\int_{S(s)} H(t,x)\,\mathrm{d}\sigma$ je kladná a nerostoucí vzhledem k proměnné s pro všechna $t > s \geq 1$.*

(iv) *Vektorová funkce* $\vec{h}(t,x)$ *definovaná na* D_0 *vztahem*

$$\vec{h}(t,x) = \nabla H(t,x) + \frac{H(t,x)}{\rho(x)} \nabla \rho(x)$$

splňuje

$$\int_{\Omega_{0,t}(1,t)} H^{1-p}(t,x) \|\vec{h}(t,x)\|^p \rho(x) \, \mathrm{d}x < \infty$$

pro všechna $t > 1$.

Jestliže

$$\limsup_{t\to\infty} \left(\int_{S(1)} H(t,x) \, \mathrm{d}\sigma \right)^{-1} \times \int_{\Omega_{0,t}(1,t)} \left[H(t,x)\rho(x)c(x) - \frac{\|\vec{h}(t,x)\|^p \rho(x)}{p^p H^{p-1}(t,x)} \right] \mathrm{d}x = \infty,$$

pak je rovnice

$$\mathrm{div} \left(\|\nabla u\|^{p-2} \nabla u \right) + c(x)\Phi(u) = 0$$

oscilatorická.

Důsledek 1. *Nechť jsou splněny předpoklady (i) – (iv) Věty 3. Jestliže*

$$\limsup_{t\to\infty}\left(\int_{S(1)} H(t,x)\,\mathsf{d}\sigma\right)^{-1}\int_{\Omega_{0,t}(1,t)}\frac{\|\vec{h}(t,x)\|^p\rho(x)}{H^{p-1}(t,x)}\,\mathsf{d}x<\infty \tag{2}$$

a

$$\limsup_{t\to\infty}\left(\int_{S(1)} H(t,x)\,\mathsf{d}\sigma\right)^{-1}\int_{\Omega(1,t)} H(t,x)\rho(x)c(x)\,\mathsf{d}x=\infty,$$

pak je rovnice

$$\mathsf{div}\left(\|\nabla u\|^{p-2}\nabla u\right)+c(x)\Phi(u)=0$$

oscilatorická.

Věta 4. *Nechť funkce H, h, k a ρ splňují předpoklady (i)–(iv) Věty 3. Nechť platí*

$$0 < \inf_{s\geq 1} \left\{ \liminf_{t\to\infty} \frac{k(s) \int_{S(s)} H(t,x)\, \mathrm{d}\sigma}{k(1) \int_{S(1)} H(t,x)\, \mathrm{d}\sigma} \right\}$$

a (2). Jestliže existuje funkce $A \in C(\Omega(t_0), \mathbb{R})$ s vlastností

$$\inf_{t\in(T,\infty)} \left\{ \left(\int_{S(T)} H(t,x)\, \mathrm{d}\sigma \right)^{-1} \times \int_{\Omega_{0,t}(T,t)} \left[H(t,x)\rho(x)c(x) - \frac{\|\vec{h}(t,x)\|^p \rho(x)}{p^p H^{p-1}(t,x)} \right] \mathrm{d}x \right\} \geq A(T)$$

pro $T \geq 1$ a

$$\int_1^\infty (A_+(T))^q \widehat{\rho}^{1-q}(T) k^{-1}(T)\, \mathrm{d}T = \infty,$$

kde $A_+(T) = \max\{A(T), 0\}$ a

$$\widehat{\rho}(T) = \sup_{t>T} \left\{ \left(\int_{S(T)} H(t,x)\, \mathrm{d}\sigma \right)^{-1} \int_{S(T)} \rho(x) H(t,x)\, \mathrm{d}\sigma \right\},$$

pak je rovnice (1) oscilatorická.

($n = 1$: $\widehat{\rho} \equiv \rho$, $\limsup_{t\to\infty}$ místo $\inf_{t\in(T,\infty)}$)

Definice 3. Říkáme, že $H(t,s) \in C(D,[0,\infty))$ patří do množiny $\mathcal{H}$, jestliže

(i) $H(t,s) = 0$ právě tehdy když $t = s$,

(ii) existuje parciální derivace $\dfrac{\partial H}{\partial s}(t,s)$,

(iii) $h_2(t,s) := -\dfrac{\partial H}{\partial s}(t,s)$, pro $(t,s) \in D$, $t \neq s$,

(iv) $h_2^p(t,s)H^{1-p}(t,s)$ je integrovatelná na každé kompaktní podmnožině množiny D.

Definice 4. Říkáme, že $H^*(t,s) \in C(D,[0,\infty))$ patří do množiny $\mathcal{H}^*$, jestliže

(i) $H^*(t,s) = 0$ právě tehdy když $t = s$.

(ii) existuje parciální derivace $\dfrac{\partial H^*}{\partial t}(t,s)$

(iii) $h_1^*(t,s) = \dfrac{\partial H^*}{\partial t}(t,s)$, for $(t,s) \in D$, $t \neq s$,

(iv) $\Big[h_1^*(t,s)\Big]^p \Big[H^*(t,s)\Big]^{1-p}$ je integrovatelná na každé kompaktní podmnožině množiny D.

Věta 5. *Předpokládejme, že existuje reálné číslo $T \in (a,b)$, kladná hladká funkce $\rho(x)$ a funkce $H(t,s) \in \mathcal{H}$, $H^*(t,s) \in \mathcal{H}^*$ s vlastnostmi*

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{H^*(T,a)} \int_{\Omega(a,T)} H^*\big(||x||,a\big)\rho(x)c(x)\,\mathsf{d}x \\
&\qquad + \frac{1}{H(b,T)} \int_{\Omega(T,b)} H\big(b,||x||\big)\rho(x)c(x)\,\mathsf{d}x \\
&\qquad\qquad > \frac{1}{H^*(T,a)} \int_{\Omega(a,T)} \left\| \frac{\nabla\rho(x)}{\rho(x)} + \frac{h_1^*\big(||x||,a\big)}{H^*\big(||x||,a\big)}\vec{\nu} \right\|^p \rho(x) H^*\big(||x||,a\big) p^{-p}\,\mathsf{d}x \\
&\qquad\qquad\quad + \frac{1}{H(b,T)} \int_{\Omega(T,b)} \left\| \frac{\nabla\rho(x)}{\rho(x)} - \frac{h_2\big(b,||x||\big)}{H\big(b,||x||\big)}\vec{\nu} \right\|^p \rho(x) H\big(b,||x||\big) p^{-p}\,\mathsf{d}x\,.
\end{aligned}$$

Pak každé řešení rovnice (1) *má alespoň jeden nulový bod v $\Omega(a,b)$.*

Věta 6. *Jestliže existují* $t_0 > 1$, $H \in \mathcal{H}$, $H^* \in \mathcal{H}^*$, $\rho \in C^1(\Omega(t_0), \mathbb{R}^+)$ *takové, že pro všechna* $\tau > t_0$ *platí nerovnice*

$$\limsup_{t\to\infty} \int_{\Omega(\tau,t)} H\big(t, ||x||\big)\rho(x)\left[c(x) - \frac{1}{p^p}\left\|\frac{\nabla\rho(x)}{\rho(x)} - \frac{h_2\big(t,||x||\big)}{H_2\big(t,||x||\big)}\vec{\nu}\right\|^p\right] \mathsf{d}x > 0$$

$$\limsup_{t\to\infty} \int_{\Omega(\tau,t)} H^*\big(||x||,\tau\big)\rho(x)\left[c(x) - \frac{1}{p^p}\left\|\frac{\nabla\rho(x)}{\rho(x)} + \frac{h_1^*\big(||x||,\tau\big)}{H^*\big(||x||,\tau\big)}\vec{\nu}\right\|^p\right] \mathsf{d}x > 0,$$

pak je rovnice (1) *oscilatorická.*

Věta 7. *Nechť pro každé* $T > 1$ *existují* $t_1 > T$, $H \in \mathcal{H}$ *a* $H^* \in \mathcal{H}^*$ *takové, že*

$$\limsup_{t\to\infty} \int_{\Omega(t_1,t)} H\big(t,||x||\big)H^*\big(||x||,t_1\big)\rho(x) \times \left[c(x) - \frac{1}{p^p}\left\|\frac{\nabla\rho(x)}{\rho(x)} + \frac{h_1^*\big(||x||,t_1\big)}{H^*\big(||x||,t_1\big)}\vec{\nu} - \frac{h_2\big(t,||x||\big)}{H\big(t,||x||\big)}\vec{\nu}\right\|^p\right] \mathsf{d}x > 0.$$

Pak je rovnice (1) *oscilatorická.*

Věta 8. *Buď $p \geq 2$, $\alpha \in C^1(\mathbb{R}^n)$ a $\vec{\nu}$ buď jednotkový vektor ke sféře $S(\|x\|)$ ve směru vnější normály.*
Buď $K = 2^{-1+p/2}$ jestliže $\langle \nabla\alpha(x), \vec{\nu}\rangle = 0$ pro všechna x a $K = 2^{p-1}$ jinak. Předpokládejme, že $\alpha(x)$ je nulová vně Ω a kladná uvnitř Ω. Označme

$$R(t) = \int_{S(t)\cap\Omega} K\alpha^p(x)\,\mathsf{d}\sigma$$

a

$$C(t) = \int_{S(t)\cap\Omega} \Big(\alpha^p(x)c(x) - K\|\nabla\alpha(x)\|^p\Big)\,\mathsf{d}\sigma\,.$$

Jestliže je diferenciální rovnice

$$\Big(R(t)\Phi(u')\Big)' + C(t)\Phi(u) = 0, \qquad ' = \frac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}$$

oscilatorická v $+\infty$, pak

$$\mathsf{div}\big(\|\nabla u\|^{p-2}\nabla u\big) + c(x)\Phi(u) = 0,$$

je také oscilatorická v Ω.

$$\boxed{\operatorname{div}\Big(A(x)\|\nabla u\|^{p-2}\nabla u\Big) + \Big\langle \vec{b}(x), \|\nabla u\|^{p-2}\nabla u \Big\rangle + c(x)\Phi(u) = 0} \qquad (3)$$

- $A(x)$ je eliptická diferencovatelná $n \times n$ matice
- vektorová norma $\|\vec{b}\| = \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$ je obvyklá Eulkeidovská norma
- $\|A\| = \sup_{\|\vec{b}\| \neq 0} \dfrac{\|A\vec{b}\|}{\|\vec{b}\|}$ je indukovaná maticová norma
- $\lambda_{\mathsf{min}}(x)$, $\lambda_{\mathsf{max}}(x)$ jsou po řadě nejmenší a největší vlastní hodnota matice $A(x)$
- $\|A(x)\| = \lambda_{\mathsf{max}}(x)$
- $\|A^{-1}(x)\| = \dfrac{1}{\lambda_{\mathsf{min}}(x)}$

Věta 9. *Pro reálné číslo $l > 1$ definujme funkce*

$$a(r) = (l^*)^{p-1} \int_{S(r)} \rho(x) \|A(x)\|^p \lambda_{\mathsf{min}}^{1-p}(x) \, \mathsf{d}\sigma \,,$$

$$b(r) = \int_{S(r)} \rho(x) \left[c(x) - \frac{l^{p-1}}{p^p \lambda_{\mathsf{min}}^{p-1}(x)} \left\| \vec{b}(x) - \frac{\nabla \rho(x)}{\rho(x)} A(x) \right\|^p \right] \mathsf{d}\sigma \,,$$

kde $l^* = \dfrac{l}{l-1}$ jestliže $\|\rho(x)\vec{b}(x) - \nabla\rho(x)A(x)\| \neq 0$ a $l^* = 1$ jinak. Jestliže rovnice

$$\Big(a(r)\Phi(u') \Big)' + b(r)\Phi(u) = 0.$$

osciluje, pak osciluje i rovnice (3).

Věta 10. *Buď $1 < p \le 2$.*

$$\widehat{a}(r) = (l^*)^{p-1} \int_{S(r)} \rho(x) \lambda_{\mathsf{max}}(x) \, \mathsf{d}\sigma \,,$$

$$\widehat{b}(r) = \int_{S(r)} \rho(x) \left[c(x) - \frac{l^{p-1}}{p^p} \lambda_{\mathsf{max}}(x) \left\| \vec{b}(x) A^{-1}(x) - \frac{\nabla \rho(x)}{\rho(x)} \right\|^p \right] \mathsf{d}\sigma \,,$$

. . . (tvrzení je stejné jako u Věty 9)

Příklad 1. Jestliže

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{\ln t} \int_1^t r \int_0^\pi c(r,\varphi)\ \sin^2(\varphi)\, \mathsf{d}\varphi\ \mathsf{d}r\ > \frac{\pi}{2},$$

nebo existuje $\lambda > 1$ s vlastností

$$\limsup_{t\to\infty} t^{-\lambda} \int_1^t (t-r)^\lambda \Big(r \int_0^\pi c(r,\varphi) \sin^2\varphi\, \mathsf{d}\varphi\ - \frac{\pi}{2r} \Big)\, \mathsf{d}r\ = \infty,$$

pak je rovnice

$$\Delta u + c(x)u = 0$$

oscilatorická v polorovině $x_2 > 0$.

Příklad 2. Buď Ω neohraničená oblast v $\mathbb{R}^2$

$$\Omega = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \varphi_1 < \varphi(x,y) < \varphi_2\right\},$$

kde $0 \leq \varphi_1 < \varphi_2 \leq 2\pi$ a $\varphi(x,y)$ je polární souřadnice bodu $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Buď $A \in C^1([0,2\pi], \mathbb{R}_0^+)$ hladká funkce splňující

(i) $A(\varphi) \neq 0$ právě tehdy když $\varphi \in (\varphi_1, \varphi_2)$

(ii) $A(0) = A(2\pi)$ a $A'(0+) = A'(2\pi-)$

(iii) integrál

$$I_2 := \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{\left[A^2(\varphi)(p-2)^2 + (A'(\varphi))^2\right]^{\frac{p}{2}}}{p^p A^{p-1}(\varphi)} \, \mathrm{d}\varphi < \infty$$

konverguje.

Jestliže

$$\liminf_{t\to\infty} \frac{1}{\ln t} \int_1^t r^{p-1} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} c(r,\varphi) A(\varphi) \, \mathrm{d}\varphi \, \mathrm{d}r > I_2,$$

pak

$$\operatorname{div}\left(\|\nabla u\|^{p-2} \nabla u\right) + c(x)\Phi(u) = 0$$

je oscilatorická na Ω.
(Například $A(\varphi) = \sin^p \varphi$ pro $\varphi \in [0,\pi]$ a $A(\varphi) = 0$ jinak.)

Příklad 3. $\varphi,\ k \in C^1([r_0,\infty),\mathbb{R}^+)$. $H(r,s) \in C(D,\mathbb{R}_0^+)$

(i) ...(klasické předpoklady kladené na funkci $H(t,s)$)

(ii)

$$\limsup_{r\to\infty} \frac{1}{H(r,r_0)} \int_{r_0}^{r} \left\{ H(r,s)k(s)\varphi(s) \int_{S(s)} c(x)\,\mathrm{d}\sigma - \frac{1}{p^p}\left[H(r,s)k(s)\right]^{1-p}\Theta(s)\varphi(s)|h(r,s)|^p \right\} \mathrm{d}s = \infty,$$

kde

$$\Theta(s) = \begin{cases} \displaystyle\int_{S(s)} \|A(x)\|^p \lambda_{\mathsf{min}}^{1-p}(x)\,\mathrm{d}\sigma & \text{jestliže } p > 2 \\ \displaystyle\int_{S(s)} \lambda_{\mathsf{max}}(x)\,\mathrm{d}\sigma & \text{jestliže } 1 < p \le 2 \end{cases}$$

Potom je rovnice (3) oscilatorická.

Tento výsledek zlepšuje známý výsledek obsahující

$$\Theta(s) := \rho(s)\omega_n s^{n-1}, \quad \text{kde} \quad \rho(s) \ge \max_{x\in S(s)} \|A(x)\|_F^p \lambda_{\mathsf{min}}^{1-p}(x).$$

Další podobné rovnice

(nejsou pololineární, jdou vyšetřovat stejnými metodami, oscilují “rychleji”)

$$\operatorname{div}\big(\|\nabla u\|^{p-2}\nabla u\big) + B(x,u) = 0$$

- $B(x,-u) = -B(x,u)$
- $B(x,u) \geq c(x)\varphi(u)$ pro $x \in \mathbb{R}^n$, $u > 0$,
- $\varphi'(u)\varphi^{q-2}(u) \geq k$ pro $u > 0$,

$$\operatorname{div}\big(\|\nabla u\|^{p-2}\nabla u\big) + c(x)\Phi(u) + \sum_{i=1}^{m} q_i(x)\psi_i(u) = 0,$$

- $c(x)$, $q_i(x)$ jsou Hölderovsky spojité,
- $\psi_i(u)$ jsou spojitě diferencovatelné, kladné a neklesající pro $u > 0$.

$$\operatorname{div}\big(\|\nabla u\|^{p-2}\nabla u\big) + B(x,u) \leq 0$$

(kladná řešení)

$$u\Big(\operatorname{div}\big(\|\nabla u\|^{p-2}\nabla u\big) + B(x,u)\Big) \leq 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\Phi\Big(\frac{\partial u}{\partial x_i}\Big) + B(x,u) = 0$$

Kladná řešení kvazilineární rovnice

Buďte $\alpha \neq 0$ a $\beta := \alpha(p-1)-(n-p) \neq 0$ reálná čísla. Nechť existuje číslo $l > 1$ s vlastností

$$\lim_{r\to\infty} \int_{\Omega(r_0,r)} \left[||x||^\beta c(x) - \frac{1}{p}|\beta|^p \left(\frac{q-1}{l} p^* \right)^{-p/p^*} \frac{1}{||x||^n} \right] \mathrm{d}x = \infty.$$

Potom rovnice

$$\operatorname{div}(||\nabla u||^{p-2}\nabla u) + c(x)|u|^{q-2}u = 0.$$

nemá kladné řešení splňující

$$|u(x)|^{\frac{q-p}{p-1}} \geq ||x||^\alpha$$

na $\Omega(r)$ pro libovolné r. Zde $p, q > 1$, p^* je konjugované číslo k p.