

Základy ovládání programu Sage

Robert Mařík

27. listopadu 2010



1 Základy práce

Pro zadávání příkazů a spouštění výpočtů se musíte nejprve připojit k nějakému Sage serveru, kde si můžete vytvořit vlastní uživatelský účet. Je tedy nutné spustit na svém počítači internetový prohlížeč. (Funguje pro výchozí nastavení ve většině operačních systémů. Paranoidní jedinci, kteří mají vypnuty cookies a javascripty si musí tyto možnosti povolit.) Poté již stačí navštívit webovou adresu serveru. K dispozici je

- volný celosvětový server <http://www.sagenb.org>, který je viditelný ze kteréhokoli místa na Internetu, může být bohužel poněkud pomalý a někdy jsou problémy s dostupností, prostředí je pouze v angličtině (k září 2010)
- server Ústavu matematiky na Mendelově univerzitě, který je přístupný z vnitřní sítě Mendelovy univerzity, nebo přes proxy server, (*k dispozici i v češtině*)
- instalace na lokálním počítači (viz návod na www.sagemath.org)

Na úvodní stránce si při první návštěvě vytvoříte účet (v anglické verzi **Sign up for a new Sage Notebook account**) a poté se již přihlašujete. Pozor, hesla mezi různými Sage servery nejsou nijak synchronizována a při použití jiného serveru si musíte vytvořit uživatelské jméno a heslo znovu. V případě, že použijete Sage server na Mendelově univerzitě (vřele doporučeno), volte jiné heslo než heslo pro přístup do informačního systému.

Prostředí programu Sage je klasická webová stránka s textovými políčky, do kterých vepisujeme příkazy. Po spuštění příkazu vidíme výstup pod políčkem a současně se otevře nové textové pole.

Příkazy se spouští klávesovou zkratkou **Shift+Enter**. Klikněte například na následující buňku a stiskněte **Shift+Enter**. Objeví se výsledek výpočtu (ale musíte být nalogovaní a mít dokument otevřený jako Sage zápisník, nikoliv jako normální html stránku, **pokud nahoře nevidíte logo programu Sage, číslo verze a ovládací prvky, pak si prohlížíte jenom statický dokument**)

Sage code

`3*(4-8)*pi`

Pokud vidíte jako výsledek text `-12*pi`, zkuste nahoře na webové stránce zatrhnout checkbox "Typeset", zadejte v prohlížeči reload (znovunačtení stránky) a přepočítejte výraz ještě jednou. Měl by se objevit výraz -12π . Případnou velikost písma opravíte kliknutím na tlačítko jsMath vpravo dole, Options, Zaškrtnout **Image fonts** a případně zadat hodnotu **Scale mathematics**

Sage má automatické doplňování příkazů. Zkuste napsat do následujícího políčka text `fac` a stisknout tabulátor. Ukážou se všechny příkazy začínající těmito slovy. Vyberte si kterýkoliv z nich, připište za něj otazník a stiskněte opět tabulátor. Objeví se nápověda k tomuto příkazu.

Sage code

`fac`

Použití příkazu pro rozklad na součin může vypadat například následovně.

⁰Podporováno grantem FRVŠ 131/2010.

⁰Dílo je šířeno pod licencí Creative Commons: Uveďte autora – neuzívejte komerčně.

```
factor(x^3-1)
```

$$(x - 1)(x^2 + x + 1)$$

2 Užitečné triky

- Jak vidíme na tomto dokumentu, mezi políčka s příkazy programu Sage je možno vkládat i textové komentáře. Toho docílíme tak, že klikneme na vodorovnou modrou čáru, která se objeví přes celou obrazovku při přejíždění myší na každém místě, kam je možno nové pole vložit. Kliknutí myší vloží pole se vstupem pro psaní příkazů programu Sage, kliknutí se shiftem vloží pole s programem TinyMCE, kam je možno psát libovolné textové komentáře.
- Pokud chceme editovat vstupní data programu Sage, klikneme do textového pole. Pokud chceme editovat textové komentáře, klikneme na ně dvakrát.
- Výpočty zůstávají uloženy na serveru. Pro stažení na lokální počítač můžeme použít roletové menu na začátku stránky: **File** -> **Save workshet to a file**. Výsledný soubor má koncovku `sws`. Nahrát tento soubor zpět na server (stejný nebo jiný) můžeme pomocí **File** -> **Load worksheet from a file**. Pro potřeby zálohování můžete z hlavního adresáře se seznamem zápisníků zatrhnout a stáhnout hromadně vybrané (nebo všechny) své zápisníky (v zip souboru) a poté je hromadně nahrát jinak.
- Další klávesové zkratky (pro rozdělení políčka na dvě, pro spojení dvou políček apod) jsou popsány v nápovědě - položka **Help** v horním menu.
- Pokud začnete pracovat s proměnnou která není deklarována, obdržíte chybovou hlášku. Každou proměnnou je nutno deklarovat příkazem `var`, nebo nastavit automatické deklarování příkazem `automatic_names` - porovnejte výstupy následujících příkazů. Jedná se o příkaz pro roznásobení závorek ve výrazu $(z - 1)(z + 1)$.

```
expand((z-1)*(z+1))
```

Traceback (most recent call last):

...

NameError: name 'z' is not defined

```
automatic_names(True)
```

```
expand((z-1)*(z+1))
```

$$z^2 - 1$$

- Není možno vynechávat znaménko pro násobení `*`, jak to často děláme při ručním zápisu matematických výrazů. Výraz $3(z + 1)$ tedy musíme zapsat ne `3(z+1)` ale `3*(z+1)`. V některých případech je možno hvězdičku vynechávat, pokud si nastavíme `implicit_multiplication(True)`.

```
3(z-1)
```

Traceback (most recent call last):

...

TypeError: 'sage.rings.integer.Integer' object is not callable

```
implicit_multiplication(True)
```

```
3(z-1)
```

3z - 3

- Na výsledek předchozího výpočtu se můžeme odkazovat pomocí podtržnítky

```
8*7 # vypocet soucinu
```

56

```
(_) -4 # predchozi vysledek zmenseny o 4
```

52

- Do textového pole je možno psát více příkazů. Tiskne se výstup toho posledního. Výsledky předchozích příkazů se tisknou pomocí příkazů `print` nebo `show`. Více příkazů na jednom řádku oddělujeme středníkem.

```
a=9
print a+1
c=8
show(x^2+1)
c=c+5; a+c
```

10

$$x^2 + 1$$

22

3 Možnosti programu Sage

Program Sage umožňuje mimo jiné

- různé druhy úpravy výrazů (roznásobování, vytýkání, použití goniometrických vzorců)
- řešení rovnic, nerovnic a soustav rovnic, přibližné řešení rovnic - demo soubor
- výpočet limit, derivací, určitých a neurčitých integrálů - demo soubor
- kreslení grafů funkcí jedné a dvou proměnných - demo soubor
- násobení matic, manipulace s maticemi, výpočet determinantu a inverzní matice - demo soubor

3.1 Úprava algebraických výrazů

Seznam všech dostupných operací s daným výrazem získáme

- pokud výraz uložíme do libovolné proměnné a v dalším políčku napíšeme jméno proměnné, tečku a stiskneme tabelátor, nebo
- příkazem `dir(jmeno_promenne)`

```
f=(x^3-x)/(x^4-1); f
```

$$\frac{x^3 - x}{x^4 - 1}$$

V proměnné f máme racionální lomenou funkci. Na následujícím řádku ji upravíme (zkrátíme čitatele a jmenovatele výrazem $x^2 - 1$).

```
f.simplify_full()
```

$$\frac{x}{x^2 + 1}$$

3.1.1 Rozklad na součin (factor) a roznásobování závorek (expand, simplify_full).

Některé operace voláme jako funkce programu sage, tj. funkce(objekt), některé jako metody aplikované na daný objekt, tj. objekt.funkce(). V případě příkazu factor je možné použít obojí, viz následující ukázka.

```
f=x^4-1; f.factor()
```

$$(x-1)(x+1)(x^2+1)$$

```
f=x^4-1; factor(f)
```

$$(x-1)(x+1)(x^2+1)$$

```
f=(x-1)^3; f.expand()
```

$$x^3 - 3x^2 + 3x - 1$$

```
f.simplify_full()
```

$$x^3 - 3x^2 + 3x - 1$$

3.1.2 Úprava goniometrických výrazů.

Převod na jednodušší argument simplify_trig() a převod na nižší mocniny trig_reduce().

```
expr = sin(2*alpha); expr
```

$$\sin(2\alpha)$$

```
expr.simplify_trig()
```

$$2 \sin(\alpha) \cos(\alpha)$$

```
expr=sin(alpha)*(cos(alpha))^4; expr
```

$$\sin(\alpha) \cos(\alpha)^4$$

```
expr.trig_reduce()
```

$$\frac{3}{16} \sin(3\alpha) + \frac{1}{16} \sin(5\alpha) + \frac{1}{8} \sin(\alpha)$$

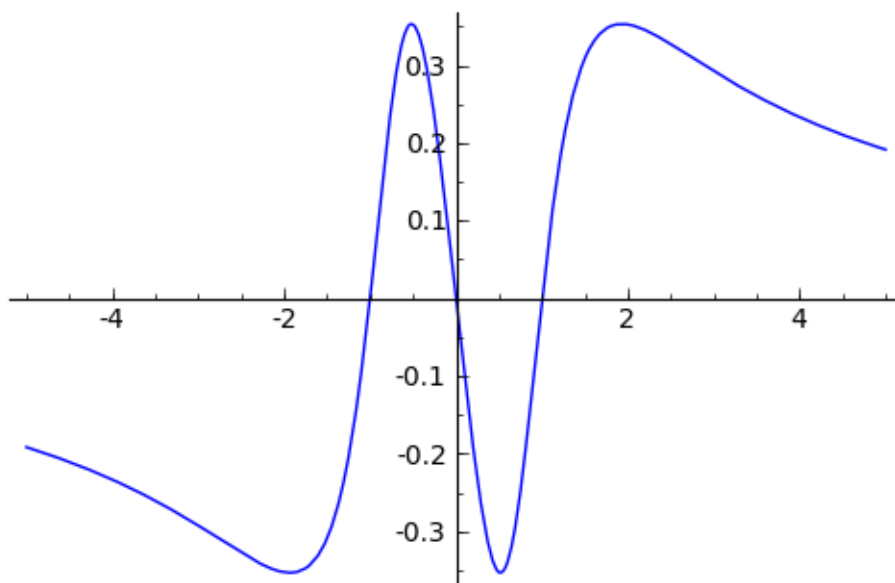
3.2 Operace s funkcemi

Sage umožňuje najít nulové body funkce, nakreslit graf a mnoho dalších operací.

```
f(x)=(x^3-x)/(x^4+1); f.solve(x) #nulove body funkce
```

$$[x = (-1), x = 1, x = 0]$$

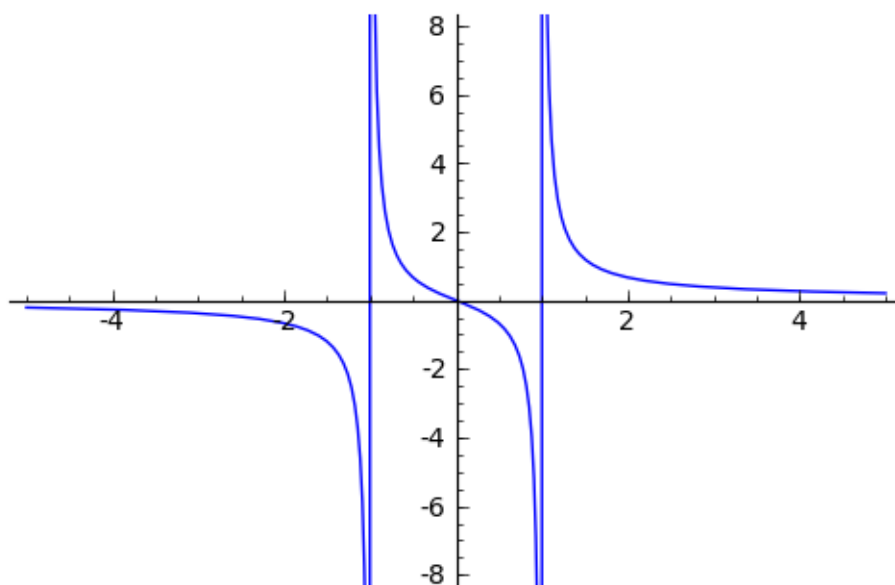
```
plot(f, (x, -5, 5)) # graf na intervalu (-5, 5)
```



Při kreslení nespojitých funkcí musíme zadat parametry `ymin` a `ymax` pro meze na ose y , protože automatická volba nevede k pěkným výsledkům.

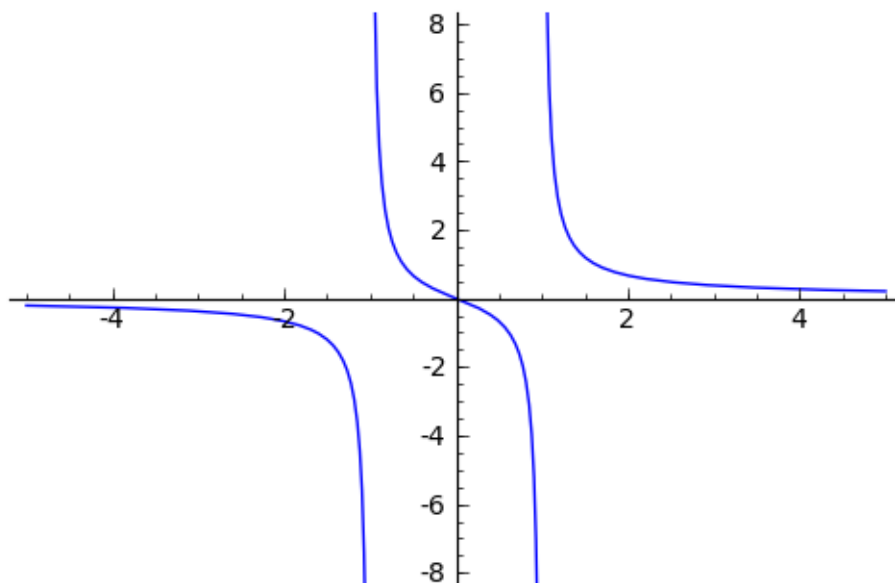
Sage code

```
f(x)=(x^3+x)/(x^4-1); plot(f,(x,-5,5),ymax=8,ymin=-8)
```



Sage code

```
plot(f,(x,-5,5),ymax=8,ymin=-8, detect_poles=True) # varianta bez svislých čar
```



Výpočet derivace (`diff`) a algebraická úprava na jednodušší tvar.

```
f.diff(x)
```

$$\frac{-4(x^3 + x)x^3}{(x^4 - 1)^2} + \frac{3x^2 + 1}{x^4 - 1}$$

```
factor(f.diff(x))
```

$$\frac{-x^2 + 1}{(x - 1)^2(x + 1)^2}$$

Výpočet neurčitého integrálu (`integrate`) a algebraická úprava na jednodušší tvar.

```
f.integrate(x)
```

$$\frac{1}{2} \log(x - 1) + \frac{1}{2} \log(x + 1)$$

```
integrate(f(x), x) # jina moznost vypoctu integralu
```

$$\frac{1}{2} \log(x - 1) + \frac{1}{2} \log(x + 1)$$

```
f.integral(x).simplify_log()
```

$$\frac{1}{2} \log(x - 1) + \frac{1}{2} \log(x + 1)$$

Výpočet určitého integrálu $\int_0^3 x^2 dx$

```
integrate(x^2, (x, 0, 3))
```

3.3 Rovnice a nerovnice

Jedno znaménko `=` se v programu Sage používá pro přiřazení hodnoty do proměnné. Pro rovnice se používají dvě rovnítka za sebou.

```
r = 1 # promenna r ma hodnotu 1
```

```
w^2-1==8 # kvadraticka rovnice s neznamou w
```

$$w^2 - 1 = 8$$

Následující výraz však způsobí chybu. Jedno rovnítko značí přiřazení hodnoty, výraz $q^2 - 3$ však není jménem proměnné, do které by se dala tato hodnota dosadit.

```
q^2-3 = 0 # způsobí chybu
```

Traceback (most recent call last):

...

SyntaxError: can't assign to operator

Pro řešení rovnic a nerovnic v programu Sage slouží příkaz `solve`.

```
solve(x^2-7==0,x)
```

$$[x = -\sqrt{7}, x = \sqrt{7}]$$

```
solve(x^2+7==0,x)
```

$$[x = -i\sqrt{7}, x = i\sqrt{7}]$$

```
solve((x-7)^2==0,x)
```

$$[x = 7]$$

```
solve(x-y+9 == 2,x)
```

$$[x = y - 7]$$

```
solve(x+2*y+9 == 2,y)
```

$$\left[y = -\frac{1}{2}x - \frac{7}{2} \right]$$

Někdy však můžeme obdržet odpověď, která nepatří do definičního oboru funkce. Tuto odpověď je nutno vyloučit ručně.

```
solve(sin(x)/x,x) # "vysledek" nepatri do definicniho oboru funkce
```

$$[x = 0]$$

Někdy naopak nezískáme všechna řešení a musíme uvést volitelný parametr pro jinou metodu řešení rovnice.

```
solve(sin(3*x+pi/3)==1/2,x) # neziskame vsechna reseni
```

$$\left[x = -\frac{1}{18}\pi \right]$$

Sage code

```
solve(sin(3*x+pi/3)==1/2,x, to_poly_solve='force')
```

$$\left[x = \frac{1}{6} \pi + \frac{2}{3} \pi z_{57}, x = -\frac{1}{18} \pi + \frac{2}{3} \pi z_{55} \right]$$

Sage umožňuje řešit i některé nerovnice.

Sage code

```
solve(x^2-4<0,x) # kvadraticka nerovnice
```

$$[[x > (-2), x < 2]]$$

Řešení v předchozím výpočtu jsou x , která splňují současně $x > -2$ a $x < 2$, tj. otevřený interval $(-2, 2)$.

Sage code

```
solve(x^2-4<=0,x) # neostra nerovnice
```

$$[[x \geq (-2), x \leq 2]]$$

Sage code

```
solve(x^2-4>0,x) # opacna nerovnice
```

$$[[x < (-2)], [x > 2]]$$

Řešení v předchozím výpočtu jsou x , která splňují $x < -2$, nebo $x > 2$, tj. sjednocení intervalů $(-\infty, -2) \cup (2, \infty)$ (všimněte si jiného uspořádání nerovností do hranatých závorek).

4 Práce s n -ticemi

V Sage se používá jazyk Python, tj. veškeré položky v seznamech indexují od nuly. Bližší informace je možno najít v příručkách, nápovědných textech a učebnicích jazyka Python.

Sage code

```
A=solve(x^4-2*x^2==0,x)
A
```

$$[x = -\sqrt{2}, x = \sqrt{2}, x = 0]$$

Sage code

```
A[0] # první prvek (index 0)
```

$$x = -\sqrt{2}$$

Sage code

```
A[1] # druhý prvek (index 1)
```

$$x = \sqrt{2}$$

Sage code

```
A[1:] # od indexu 1 do konce
```

$$[x = \sqrt{2}, x = 0]$$

Sage code

```
A[-1] # poslední prvek
```

$$x = 0$$