Limity

Robert Mařík

27. listopadu 2010

Limita je poněkud tajuplný pojem pro studenty, kteří se matematikou nezabývají do hloubky. Ukážeme si, jak program Sage usnadňuje studium limit. V první řadě je možno použít numerický experiment pro odhad limity, tj. dosazovat postupně čísla která se blíží k limitní hodnotě a sledovat, jak se chová posloupnost funkčních hodnot. Podobnou informaci, ale méně přesnou, zjistíme i při nakreslení grafu. Pro přesný výpočet limity slouži v programu Sage příkaz `limit`.
Nejprve upozorněme na dvě záludnosti.

- Jakkoliv dokonalé algoritmy pro výpočet někdy selžou a každý program pro manipulaci s matematickými objekty může dávat někdy špatný výsledek. Nejinak je tomu u programu Sage. Pro příkaz `limit` tato poučka platí dvojnásob!
- Veškeré výpočty v systémech počítačové algebry pracují s funkcemi jako s komplexními funkcemi. Zde je nutno rozlišovat nekonečno a mínus nekočno tak jak je známe z přednášek od komplexního nekonečna. Je-li limita rovna komplexnímu nekonečnu, v analýze reálných funkcí reálné proměnné to znamená, že limita neexituje. Pro odstranění této disharmonie si můžeme příkaz `limit` předefinovat tak, jak je uvedeno ke konci tohoto dokumentu.

1 Numerický odhad limity

Funkce $\dfrac{\sin(x)}{x}$ není definovaná v nule, ale čím vic se blížíme s x k nule, tím víc se funkční hodnoty blíží k číslu 1. Snadno to nahlédneme dosazováním čísel, které jsou na reálné ose blíže a blíže k nule.

Sage code
```
f(x)=sin(x)/x
f(x).show()
(f(0.1).n(),f(0.001).n(),f(0.0000001).n(),f(0.00000000001).n())
```

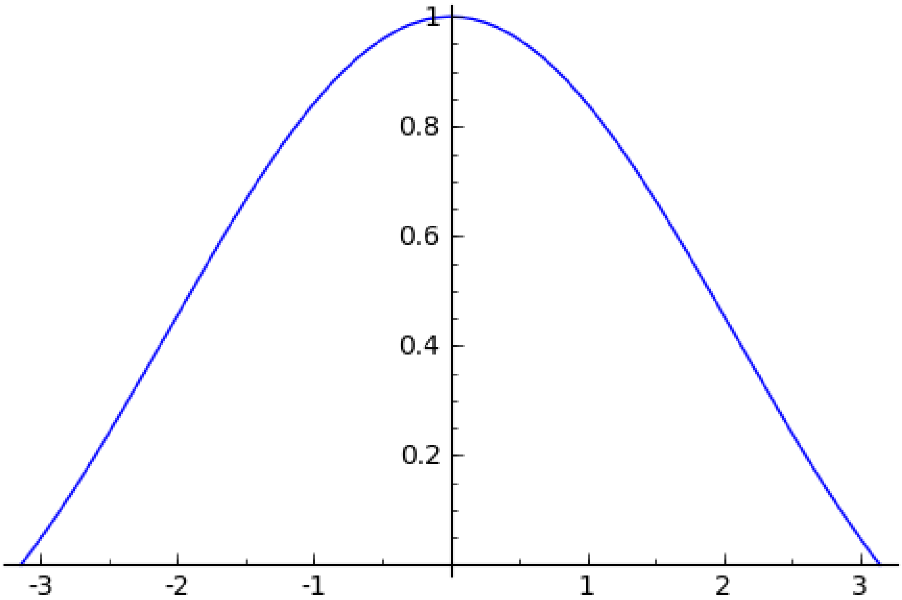
$$\frac{\sin\left(x\right)}{x}$$

(0.998334166468282, 0.999999833333342, 0.999999999999998, 1.00000000000000)

`n()` je příkaz pro numerickou aproximaci. Všimněte si, že poslední funkční hodnota je přesně rovna číslu 1. Je to však jen přibližná hodnota. Lze totiž ukázat, že pro všechna x platí $\dfrac{\sin(x)}{x} < 1$.
Ve skutečnosti také nevíme, jestli se funkční hodnoty blíží k číslu 1 nebo třeba k číslu 1.000000000000000000000012580000015
Další výpočet s grafem funkce doměnku že limita je rovna jedné potvrzuje.

Sage code
```
plot(sin(x)/x,(x,-pi,pi)).show()
```

[0]Podporováno grantem FRVŠ 131/2010.



2 Výpočet limity příkazem `limit`

V Sage je možno počítat limitu (oboustrannou i jednostrannou) přímo použitím funkce `limit`. Následující příkaz demonstruje výpočet limity $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$.

Sage code
```
limit(sin(x)/x,x=0)
```

1

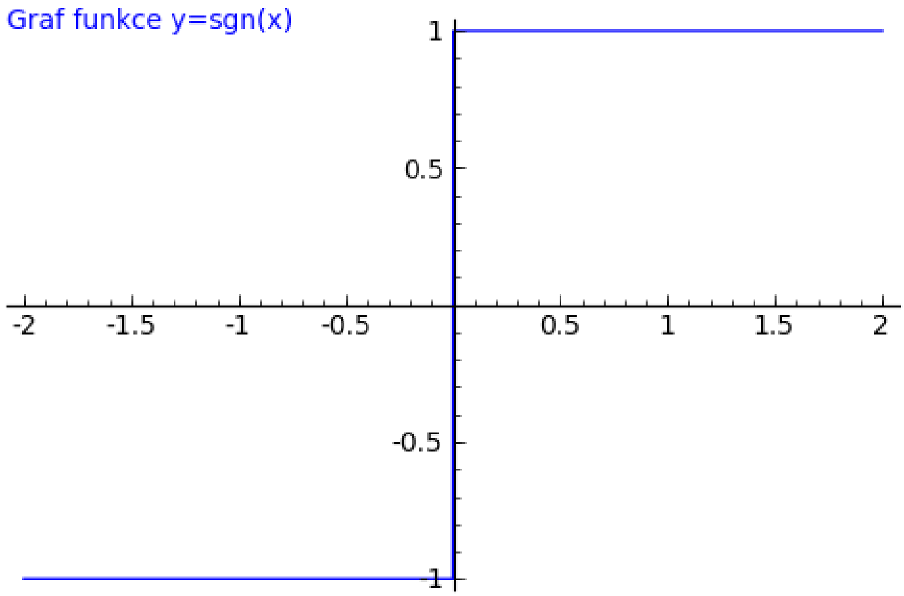
Výpočet limity v nevlastním bodě: $\lim_{x\to\infty} \frac{x^3+3}{3x^3-1}$

Sage code
```
limit((x^3+3)/(3*x^3-1),x=oo)
```

$\frac{1}{3}$

Následující funkce má skok v $x = 0$. V tomto bodě neexistuje oboustranná limita, existují pouze limity jednostranné. Pro jednostrannou limitu používáme parametr `dir`.

Sage code
```
plot(sgn(x),(x,-2,2))+text("Graf funkce y=sgn(x)",\
    (0,1),axis_coords=True,horizontal_alignment='left')
```



Sage code
```
limit(sgn(x),x=0,dir='plus')
```

1

Sage code
```
limit(sgn(x),x=0)  # tato (oboustranná) limita neexistuje
```

und

3 Interpretace nevlastní limity a limity, která neexistuje

U limity, která neexistuje, Sage vrací `ind`, `und` nebo ∞, čímž je míněno komplexní nekonečno. Obdržíme-li tento výsledek, v reálném oboru limita neexistuje. **Nevlastní limita v reálném oboru má vždy znaménko: $+\infty$ nebo $-\infty$.**

3.1 Limity, které neexistují

Funkce $y = \dfrac{1}{x}$ má v nule různé jednostranné limity, oboustranná limita neexistuje.

Sage code
```
limit(1/x,x=0)
```

∞

Funkce $y = \ln x$ není defivaná v levém okolí nuly, oboustranná limita v nule neexistuje.

Sage code
```
limit(ln(x),x=0)
```

∞

Funkce $y = \sin\dfrac{1}{x}$ se v okolí nuly "neustálí"k žádnému číslu, podobně $\sin x$ v nekonečnu osciluje a ani neroste k $+\infty$, ani neklesá k $-\infty$, ani se neblíží k vodorovné asymptotě.

Sage code
```
limit(sin(1/x),x=0,dir='above')
```

ind

Sage code
```
lim(sin(x),x=oo)
```

ind

Následující limita neexistuje, protože funkce $y = \operatorname{sgn} x$ má v $x = 0$ skok (viz obrázek výše).

Sage code
```
limit(sgn(x),x=0)
```

und

3.2 Nevlastní limity

Následující limity jsou nevlastní. Výsledkem je vždy $+\infty$ nebo $-\infty$, tj. nekonečno opatřené znaménkem.

Sage code
```
limit(1/x,x=0,dir='above')
```

$+\infty$

Sage code
```
limit(1/x,x=0,dir='below')
```

$-\infty$

Sage code
```
limit(ln(x),x=0,dir='above')
```

$-\infty$

3.3 Předefinování příkazu `limit`

Pokud limita neexistuje, Sage vrací `ind`, `und`, nebo ∞. Aby to nebylo matoucí, můžeme si příkaz `limit` předefinovat tak, aby v těchto případech vracel vždy stejný dohodnutý výstup, například `undefined`, tj nedefinováno.

Sage code
```
def limit(ex, dir=None, taylor=False, algorithm='maxima', **args):
    result=sage.calculus.calculus.limit(ex,dir=dir,taylor=taylor,algorithm=algorithm,**args)
    if str(result) in ['und','ind','Infinity']:
        return('undefined')
    return(result)
```

Otestujeme náš příkaz, původní příkaz je stále dostupný pod jménem `sage.calculus.calculus.limit` a proto můžeme porovnat výstupy obou příkazů.

Sage code
```
limit(sgn(x),x=0), sage.calculus.calculus.limit(sgn(x),x=0)
```

(undefined, und)

Sage code
```
limit(sin(x),x=oo), sage.calculus.calculus.limit(sin(x),x=oo)
```

(undefined, ind)

Sage code
```
limit(ln(x),x=0), sage.calculus.calculus.limit(ln(x),x=0)
```

(undefined, ∞)

Sage code
```
limit(ln(x),x=0,dir='above'), sage.calculus.calculus.limit(ln(x),x=0,dir='above')
```

$(-\infty, -\infty)$

Sage code
```
limit(sin(x)-x,x=0,dir='above'), sage.calculus.calculus.limit(sin(x)/x,x=0,dir='above')
```

$(0, 1)$