Integrály

Robert Mařík

27. listopadu 2010

1 Výpočet integrálů programem Sage

1.1 Neurčitý integrál

Pro výpočet neurčitého integrálu slouží funkce `integrate`. Integrační konstanta není ve výsledku zahrnuta. Přepínání mezi jednotlivými metodami probíhá automaticky (ve skutečnosti program používá jiné postupy než student matematiky). Vypočteme $\int x^3 \sin(x)\, dx$

Sage code
```
integrate(x^3*sin(x),x)
```

$$3\left(x^2 - 2\right)\sin\left(x\right) - \left(x^3 - 6\,x\right)\cos\left(x\right)$$

Kontrola: Pokud výsledek integrace zderivujeme a upravíme, obdržíme původní funkci.

Sage code
```
diff(_,x)
```

$$\left(x^3 - 6\,x\right)\sin\left(x\right) + 6\,x\sin\left(x\right)$$

Sage code
```
(_).simplify_full()
```

$$x^3\sin\left(x\right)$$

1.2 Určitý integrál

Výpočet určitého integrálu $\int_1^e \ln(x)\, dx$ je možno realizovat buďto pomocí dalších volitelných parametrů příkazu `integrate` (viz následující výpočet), nebo pomocí neurčitého integrálu a Newtonovy - Leibnizovy formule.

Sage code
```
integrate(ln(x),x,1,e)
```

$$1$$

Určitý integrál $\int_1^e \ln(x)\, dx$ pomocí Newtonovy - Leibnizovy formule.

Sage code
```
f(x)=integrate(ln(x),x)
f(e)-f(1)
```

$$1$$

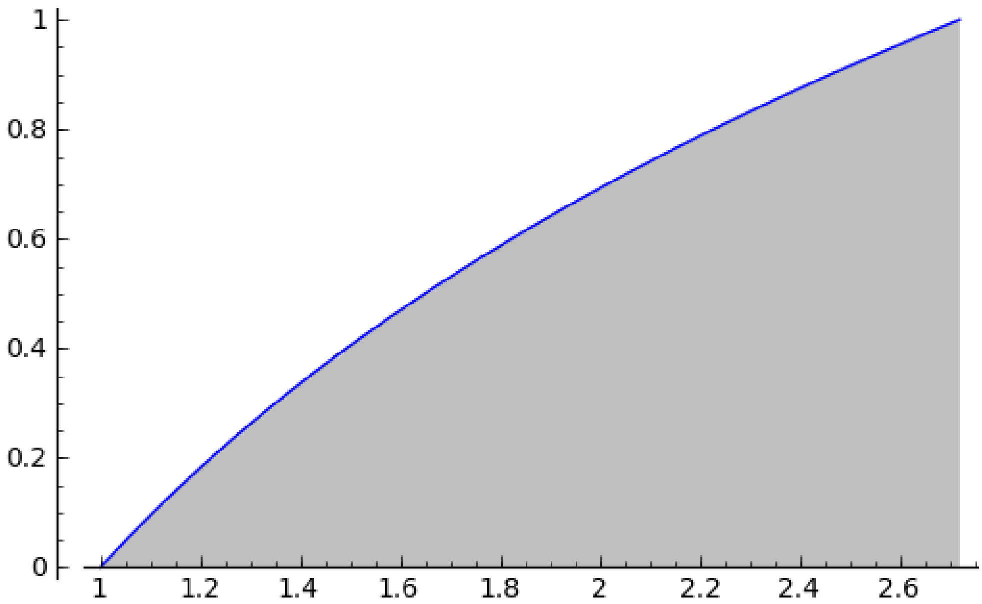
[0]Podporováno grantem FRVŠ 131/2010.

1.2.1 Geometrická interpretace a střední hodnota

Sage code

```
f(x)=ln(x)  # upravte dle potreby
a,b=1,e     # upravte dle potreby

P=map(latex,(a,b,f(x),integrate(f(x),(x,a,b))))
html('Grafická interpretace integrálu $\int_{%s}^{%s} %s=%s$'%(P[0],P[1],P[2],P[3]))

plot(f(x),(x,a,b), fill=True)
```

Grafická interpretace integrálu $\int_{1}^{e} \log\left(x\right) = 1$

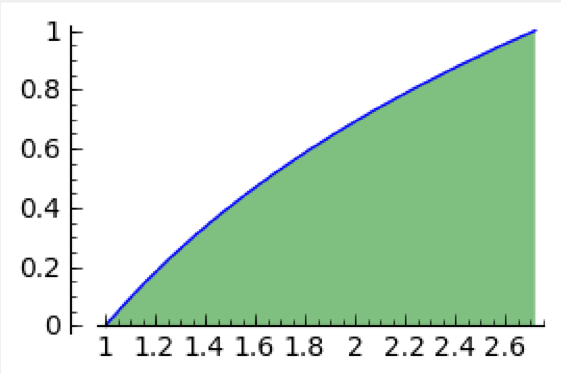


Střední hodnota je výška obdélníku, který má stejnou stranu na ose x a stejný obsah jako křivočarý lichoběžník pod křivkou.

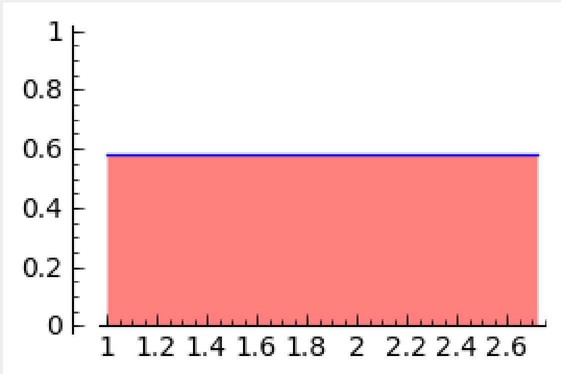
Sage code

```
opts = {'figsize': [3,2], 'ymax':1}
f(x)=ln(x)
a=1
b=e

stredni_hodnota=integrate(f(x),(x,a,b))/(b-a)

obr1 = plot(f(x),(x,a,b), fill='axis', fillcolor='green', **opts)
obr2 = plot(stredni_hodnota,(x,a,b), fill='axis', fillcolor='red', **opts)
html.table([['Plocha pod křivkou','Střední hodnota'],[obr1,obr2],['Dohromady\
 <br>(obsahy obrazců jsou stejné)'],[obr1+obr2]])
```

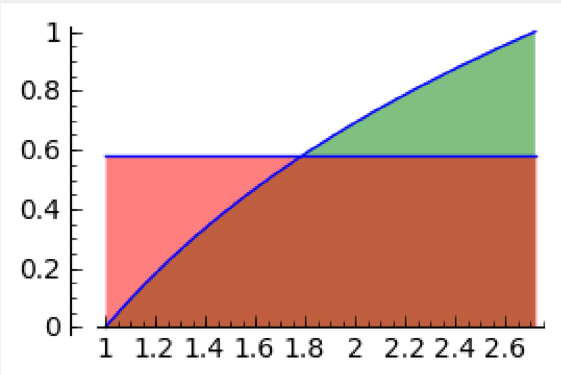
Plocha pod křivkou



Střední hodnota



Dohromady (obsahy obrazců jsou stejné)



1.2.2 Numerická aproximace

U integrálů, které program nedokáže vypočítat přesně, je možno použít numerickou aproximaci

Sage code
```
integrate(sin(x)/x,0,1)
```

$$\int_0^1 \frac{\sin(x)}{x}\,dx$$

Při numerické aproximaci je výsledkem uspořádaná dvojice `(přibližná hodnota, odhad chyby)`.

Sage code
```
integral_numerical(sin(x)/x,0,1)
```

$$\left(0.946083070367, 1.05036320793 \times 10^{-14}\right)$$

Sage code
```
integral_numerical(ln(x),1,e)
```

$$\left(1.0, 1.11022302463 \times 10^{-14}\right)$$

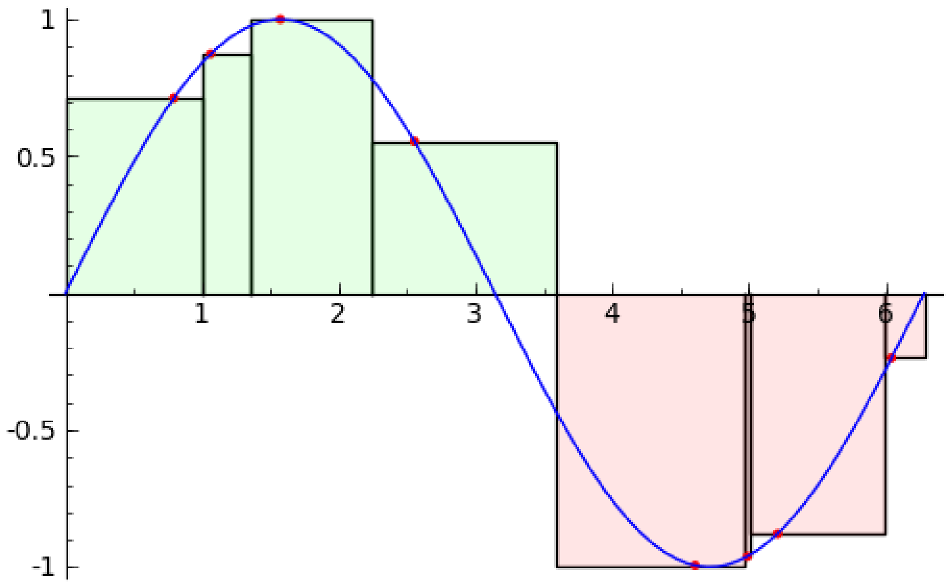
2 Grafická ilustrace Riemannova integrálu

Sage code
```
from sage.plot.polygon import Polygon
def rieman_sum(n=5, f=x^2, start=0, end=1):
    a = start
    b = end
    func(x) = f
    division = [a]+[a+random()*(b-a) for i in range(n-1)]+[b]
    division = [i.n() for i in division]
```

```
    division.sort()
    xs = [division[i]+random()*(division[i+1]-division[i]) for i in range(n)]
    ys = [func(x_val) for x_val in xs]
    rects = Graphics()
    for i in range(n):
        body=[[division[i],0],[division[i],ys[i]],[division[i+1],ys[i]],[division[i+1],0]]
        if ys[i].n()>0:
            color_rect='green'
        else:
            color_rect='red'
        rects = rects +polygon2d(body, rgbcolor = color_rect,alpha=0.1)\
         + point((xs[i],ys[i]), rgbcolor = (1,0,0))\
         + line(body,rgbcolor='black',zorder=-1)
    html('Riemanův součet $\sum_i f(\eta_i)(x_i-x_{i-1})$')
    html("Funkce: $%s$; interval: $[%s,%s]$; počet podintervalů: %s \
    "%(latex(func(x)),latex(a),latex(b),n))
    show(plot(func(x),(x,a,b),zorder=5) + rects)
    delka_intervalu=[division[i+1]-division[i] for i in range(n)]
    html.table([["Podinterval","Reprezentant","Funkční hodnota","Délka intervalu"]]\
    +[[[division[i],division[i+1]],xs[i],ys[i],delka_intervalu[i]] for i in range(n)],\
    header=True)
    print "Integrální součet: "+str(sum([ys[i]*delka_intervalu[i] for i in range(n)]))
rieman_sum(f=sin(x),n=8,end=2*pi)
```

Riemanův součet $\sum_i f(\eta_i)(x_i - x_{i-1})$

Funkce: $\sin(x)$; interval: $[0, 2\pi]$; počet podintervalů: 8

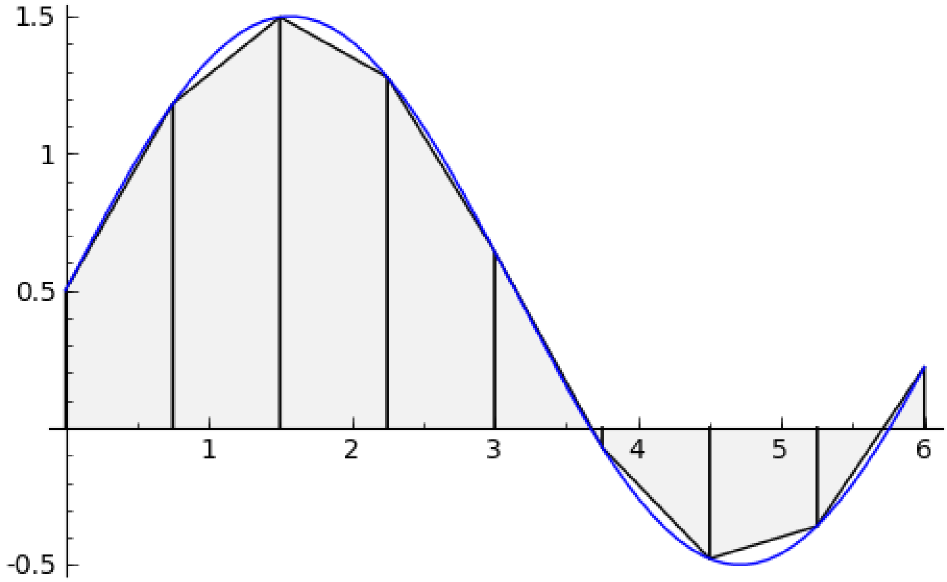


Podinterval	Reprezentant	Funkční hodnota	Délka intervalu
$[0.000000000000000, 1.00377544662873]$	0.793767551076022	0.712999997792661	1.00377544662873
$[1.00377544662873, 1.34996075363552]$	1.06236516200600	0.873509302967417	0.346185307006788
$[1.34996075363552, 2.24691969819511]$	1.57262577856236	0.999998326553582	0.896958944559589
$[2.24691969819511, 3.58444982671063]$	2.55412003820326	0.554259141536326	1.33753012851551
$[3.58444982671063, 4.96128323025358]$	4.60630726970628	-0.994378609910092	1.37683340354296
$[4.96128323025358, 5.00285566790995]$	4.98934897282723	-0.961891119413303	0.0415724376563684
$[5.00285566790995, 5.98795314683338]$	5.20985198888608	-0.878796034899126	0.985097478923429
$[5.98795314683338, 6.28318530717959]$	6.04472607405224	-0.236205739496968	0.295232160346208

```
Integrální součet: 0.311866588096767
```

Sage code

```
from sage.plot.polygon import Polygon
def lichobeznikove_pravidlo(n=5, f=x^2, start=0, end=1):
    a = start
    b = end
    func(x) = f
    division = [a]+[a+(i+1)*(b-a)/n for i in range(n-1)]+[b]
    division = [i.n() for i in division]
    rects = Graphics()
    ys=[func(i).n() for i in division]
    for i in range(n):
        body=[[division[i],0],[division[i],ys[i]],[division[i+1],ys[i+1]],[division[i+1],0]]
        color_rect='gray'
        rects = rects +polygon2d(body, rgbcolor = color_rect,alpha=0.1)\
          + line(body,rgbcolor='black',zorder=-1)
    show(plot(func(x),(x,a,b),zorder=5) + rects)
    m=[1]+[2 for i in range(n-1)]+[1]
    my=[ys[i]*m[i] for i in range (n+1)]
    html.table([[x,\
    "<span class=\"math\">m</span>",\
    "<span class=\"math\">f(x)</span>",\
    "<span class=\"math\">mf(x)</span>"]]+zip(division,m,ys,my)\
    +[["","","Součet:",sum(my)]],header=True)
    vysledky=map(latex,(a,b,func(x),((b-a)/(2*n)*sum(my)).n()))
    html(r"$\int_{%s}^{%s}%s dx\approx %s $"%(latex(a),latex(b),latex(func(x)),\
    latex(((b-a)/(2*n)*sum(my)).n())))
lichobeznikove_pravidlo(f=1/2+sin(x),n=8,end=6)
```



x	m	f(x)	mf(x)
0.000000000000000	1	0.500000000000000	0.500000000000000
0.750000000000000	2	1.18163876002333	2.36327752004667
1.50000000000000	2	1.49749498660405	2.99498997320811
2.25000000000000	2	1.27807319688792	2.55614639377584
3.00000000000000	2	0.641120008059867	1.28224001611973
3.75000000000000	2	-0.0715613187423437	-0.143122637484687
4.50000000000000	2	-0.477530117665097	-0.955060235330194
5.25000000000000	2	-0.358934493426592	-0.717868986853184
6.00000000000000	1	0.220584501801074	0.220584501801074
		Součet:	8.10118654528336

$$\int_0^6 \sin(x) + \frac{1}{2} dx \approx 3.03794495448126$$