

# Diferenciální počet funkcí dvou proměnných

Robert Mařík

27. listopadu 2010



## 1 Diferenciální počet funkcí dvou proměnných

Pro práci s funkcemi dvou proměnných musíme deklarovat proměnné  $x$  a  $y$ .

```
(x,y,z)=var('x y z')
```

Nadefinujeme funkci dvou proměnných, pomocí příkazu `show` si ji zobrazíme a pomocí příkazu `diff` ji zderivujeme, v tom to případě jednou podle  $x$  a jednou podle  $y$ , tj vypočteme  $f''_{xy}$ .

```
f(x,y)=atan(y/x)
show(f(x,y))
diff(f(x,y),x,y)
```

$$\arctan\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{1}{\left(\frac{y^2}{x^2} + 1\right)x^2} + 2 \frac{y^2}{\left(\frac{y^2}{x^2} + 1\right)^2 x^4}$$

Výsledek nic moc? Tak si jej upravíme. Znak `-` nás odkazuje na výsledek posledního výpočtu a funkce `factor` se snaží výraz rozložit na součin.

```
factor(_)
```

$$-\frac{(x-y)(x+y)}{(x^2+y^2)^2}$$

## 2 Lokální extrémy funkce dvou proměnných

Definujeme jinou funkci dvou proměnných:  $f(x,y) = xy(4-x-y)$ .

Derivace funkce položíme rovny nule a najdeme tak stacionární body. Potom všechny stacionární body dosadíme do Hessiánu a druhé parciální derivace podle  $x$ .

```
f(x,y)=x*y*(4-x-y)
show(z==f(x,y))
sols=solve([diff(f(x,y),x),diff(f(x,y),y)],[x,y], solution_dict=True)
fxx(x,y)=diff(f(x,y),x,x)
H=f.hessian().determinant()
A=[["Stacionární bod","Hesián","$f''_{xx}$"]]
for s in sols:
    A.append([[s[x],s[y]],H(s[x],s[y]),fxx(s[x],s[y])])
html.table(A,header=True)
```

<sup>0</sup>Podporováno grantem FRVŠ 131/2010.

<sup>0</sup>Dílo je šířeno pod licencí Creative Commons: Uveďte autora – neuzívejte komerčně.

$$z = -(x + y - 4)xy$$

Stacionární bod	Hesián	$f''_{xx}$
[0,0]	-16	0
[0,4]	-16	-8
[4,0]	-16	0
$\begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$	$\frac{16}{3}$	$-\frac{8}{3}$

Nyní se můžeme pokusit tento postup co nejvíce zautomatizovat a napsat funkci, která se snaží nalézt všechny lokální extrémy a posoudit jejich kvalitu.

```

x,y=var('x y')
def loc_extr(funkce):
    html(r'Funkce $z=%s$'%latex(funkce))
    sols=solve([diff(funkce,x),diff(funkce,y)],[x,y], solution_dict=True)
    fxx=diff(funkce,x,x)
    H=funkce.hessian().determinant()
    A=[["Stacionární bod","Hesián","$f''_{xx}$","rozhodnutí"]]
    for s in sols:
        if H.subs(s) < 0:
            druha_derivace='...'
            rozhodnuti='sedlo'
        elif H.subs(s) > 0:
            druha_derivace=fxx.subs(s)
            if fxx.subs(s) > 0:
                rozhodnuti='minimum'
            else:
                rozhodnuti='maximum'
        else:
            druha_derivace='...'
            rozhodnuti='???'
        A.append([[s[x],s[y]],H.subs(s),druha_derivace,rozhodnuti])
    html.table(A,header=True)

```

```
loc_extr(x*y*(4-x-y))
```

$$\text{Funkce } z = -(x + y - 4)xy$$

Stacionární bod	Hesián	$f''_{xx}$	rozhodnutí
[0,0]	-16	...	sedlo
[0,4]	-16	...	sedlo
[4,0]	-16	...	sedlo
$\begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$	$\frac{16}{3}$	$-\frac{8}{3}$	maximum

```
loc_extr(x^2-y^2)
```

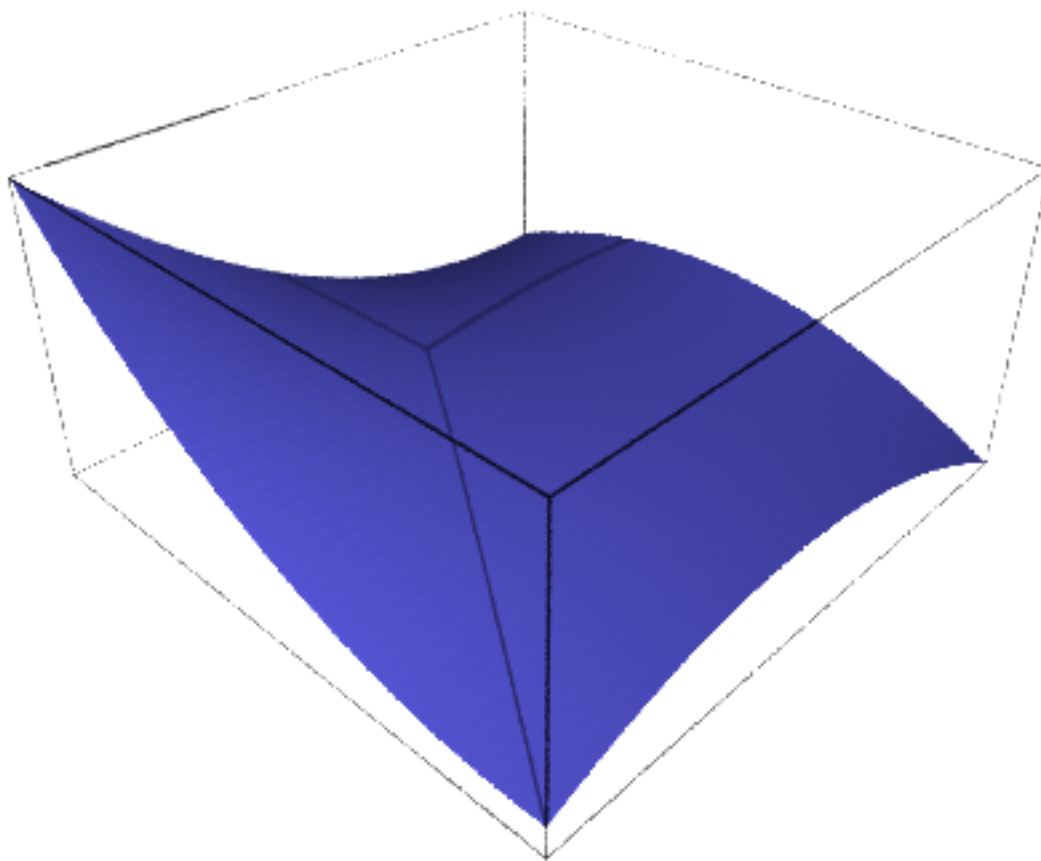
$$\text{Funkce } z = x^2 - y^2$$

Stacionární bod	Hesián	$f''_{xx}$	rozhodnutí
[0,0]	-4	...	sedlo

### 3 Kreslení 3D grafů

Graf funkce dvou proměnných. Pomocí myši můžete grafem otáčet a kolečkem přibližovat a oddalovat (musíte smazat volbu `viewer='tachyon'`, která je použita pro zobrazení statického obrázku).

```
Sage code
plot3d(f(x,y),(x,-5,5),(y,-5,5),viewer='tachyon')
```



Graf funkce dvou proměnných se stacionárními body. Posloupnost příkazů vytiskne funkci, stacionární body a nakreslí tyto body do 3D grafu

```
Sage code
x,y,z=var('x y z')
f(x,y)=x*y*(4-x-y)
show(z==f(x,y))
sols=solve([diff(f(x,y),x),diff(f(x,y),y)],[x,y], solution_dict=True)
PIC=plot3d(f(x,y),(x,-8,8),(y,-8,8),opacity=0.8)
SP=[]
```

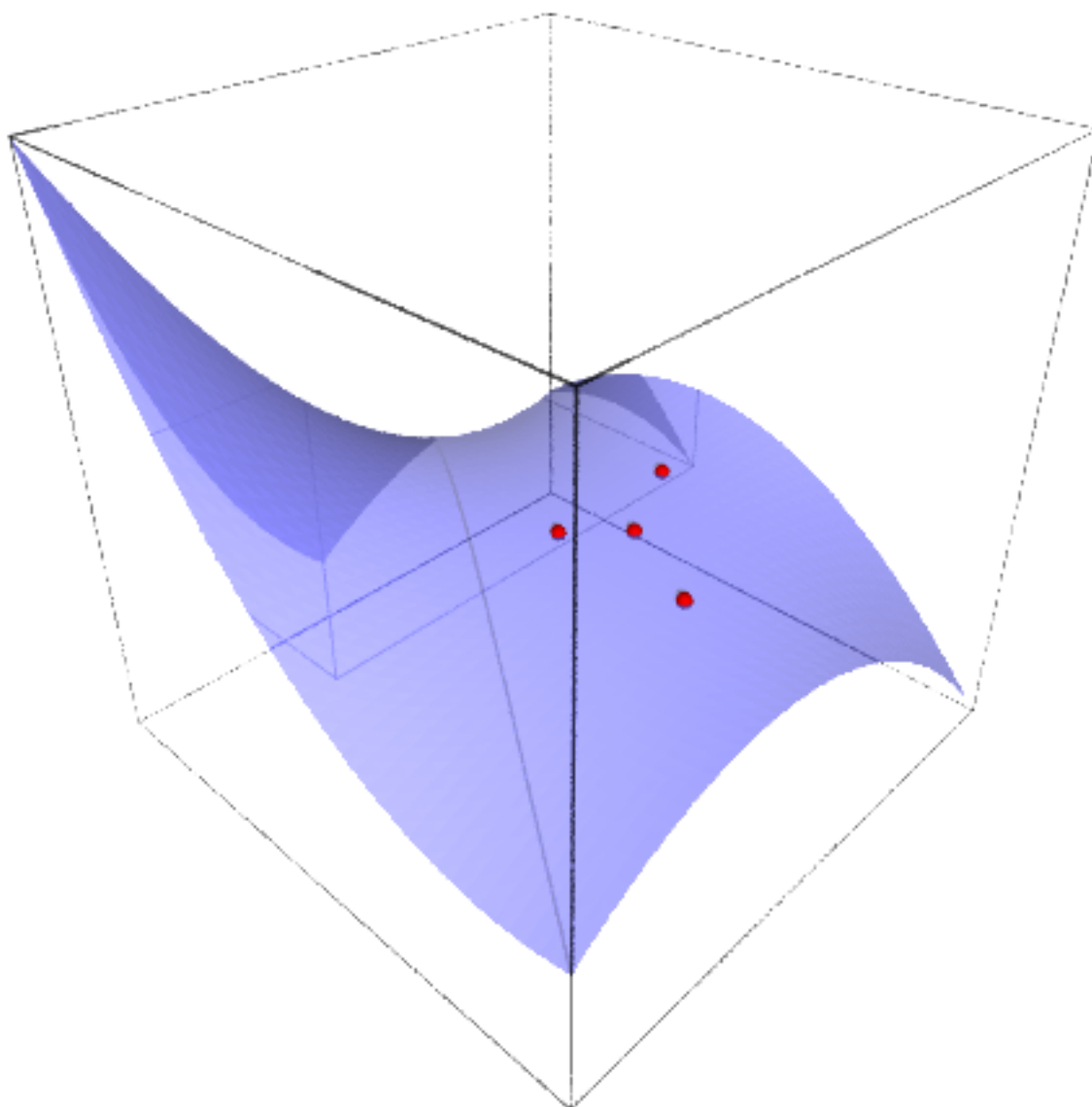
```

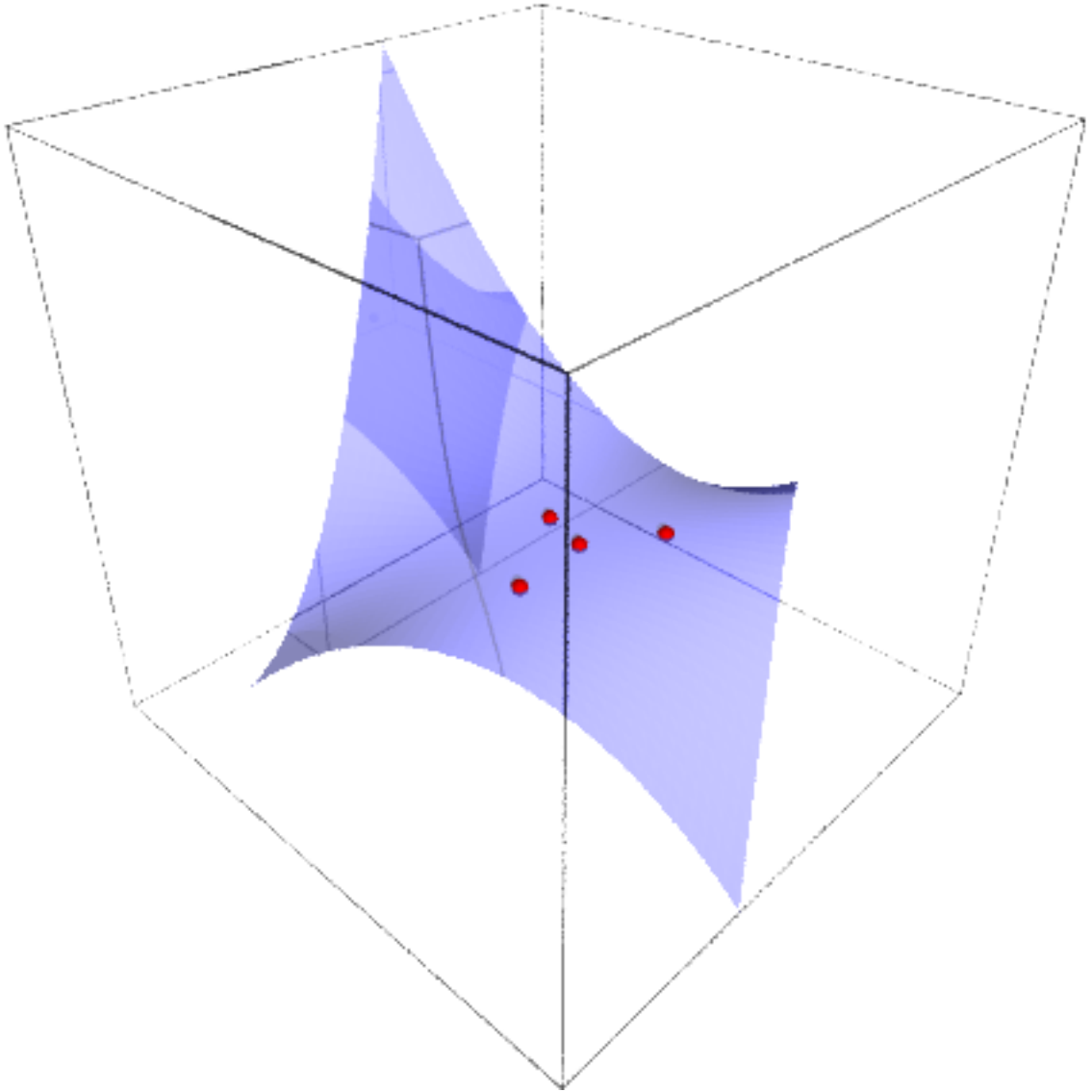
for s in sols:
    SP.append([s[x],s[y]])
    PIC=PIC+point3d((s[x],s[y],f(s[x],s[y])),color='red')
show(SP)
show(PIC,viewer='tachyon')
PIC.rotate((0,0,1),pi/3).show(viewer='tachyon')

```

$$z = -(x + y - 4)xy$$

$$\left[ [0, 0], [0, 4], [4, 0], \left[ \frac{4}{3}, \frac{4}{3} \right] \right]$$





Pro kreslení vrstevnic slouží příkaz `contour_plot`, který je popsán v dalším dokumentu.