

Aplikace parciálních derivací

Robert Mařík

27. listopadu 2010



1 Dimenzování polic

Uvažujme rovnoměrně zatíženou polici z DTD desky, na koncích podepřenou podpěrkami (lišťami), s následujícími geometrickými a materiálovými charakteristikami (v základních jednotkách SI).

```
----- Sage code -----
var('q_a, E, l, b, h, q, J') # definice promennych
hodnoty={ # definice parametru police
q_a:650, # plosne zatizeni
E:2500*10^6, # modul pruznosti
l:0.7, # delka police
b:0.4, # sirka police
h:0.019 # tloustka police
}
hodnoty # tisk hodnot pro kontrolu
```

$\{q_a : 650, l : 0.7000000000000000, b : 0.4000000000000000, E : 2500000000, h : 0.0190000000000000\}$

V dimenzování nábytku je nutno umět vypočítat průhyb police a napětí a posoudit zda police vyhovuje. Pro jednoduchost nebudeme používat koeficienty pro obdélníkové tvary, dlouhodobé zatížení apod. Použijeme následující vzorce.

```
----- Sage code -----
pruhyb = 5*q*1^4/(384*E*J) # pruhyb police
pruhyb # tisk pro kontrolu
```

$$\frac{5l^4q}{384EJ}$$

```
----- Sage code -----
q=q_a*b # zatizeni na jednotku delky
q
```

$$bq_a$$

```
----- Sage code -----
J=b*h^3/12 # kvadraticky moment prurezu
J
```

$$\frac{1}{12}bh^3$$

Výádríme průhyb police jako funkci zadaných parametrů. Vidíme například, že rozměr b nemá při rovnoměrném zatížení na velikost průhybu vliv.

```
----- Sage code -----
pruhyb=pruhyb.substitute(J=J, q=q) # dosazeni za J a q
pruhyb
```

⁰Podporováno grantem FRVŠ 131/2010.

⁰Dílo je šířeno pod licencí Creative Commons: Uveďte autora – neuzívejte komerčně.

$$\frac{5l^4q_a}{32Eh^3}$$

```

Sage code
pruhyb.substitute(hodnoty) # dosadime hodnoty pro nas nosnik

```

0.00142208230062691

```

Sage code
_*10^3 # prevod na milimetry

```

1.42208230062691

Hodnoty derivace pruhybu podle délky a tloušťky udávají, jak velký mají jednotlivé veličiny vliv na celkový průhyb.

```

Sage code
diff(pruhyb,l).substitute(hodnoty)

```

0.00812618457501093

```

Sage code
diff(pruhyb,h).substitute(hodnoty)

```

-0.224539310625302

Výše uvedené hodnoty však nejsou příliš informativní, protože se vztahují k jednotkám SI. Pokud budeme změny tloušťky a průhyb měřit v milimetrech, nemusíme dělat žádnou korekci a vidíme, že každý milimetr o který se ztenčí police vede ke zvýšení průhybu o 0.22 milimetru (derivace je záporná a zvýšení jedné veličiny odpovídá snížení veličiny druhé a naopak). Pokud budeme za základní jednotky délky brát decimetr (jednotka stokrát větší než milimetr), musíme hodnotu první derivace vynásobit stem. Vidíme tedy, že každý decimetr délky police navíc má za následek zvýšení průhybu přibližně o 0.8 milimetru.

Někdy může být zadána hodnota parametru, který je vypočítáván podle vzorce a úkolem je zjistit, pro jaká vstupní data dostaneme zadaný výsledek. Z matematického hlediska se jedná o řešení rovnice. Pokusíme se například určit, pro jakou délku police bude průhyb roven 3mm.

```

Sage code
var('pruhyb') # pruhyb je od nynejska promenna
hodnoty={
q_a:650, # plosne zatizeni
E:2500*10^6, # modul pruznosti
pruhyb:0.003, # povoleny pruhyb
b:0.4, # sirka police
h:0.019 # tloustka police
}
hodnoty

```

{q_a : 650, b : 0.4000000000000000, h : 0.0190000000000000, E : 2500000000, pruhyb : 0.00300000000000000}

Sestavíme rovnici pro průhyb a dosadíme za *J* a *q*.

```

Sage code
rovnice = pruhyb == (5*q*l^4/(384*E*J)).substitute(J=J, q=q)
rovnice

```

$$\text{pruhyb} = \frac{5l^4q_a}{32Eh^3}$$

```

Sage code
reseni = solve(rovnice,l) # vyreseni rovnice
reseni

```

$$\left[l = \left(\frac{2}{5}i\right) \left(\frac{Eh^3\text{pruhyb}}{q_a}\right)^{\left(\frac{1}{4}\right)} 2^{\left(\frac{1}{4}\right)} 5^{\left(\frac{3}{4}\right)}, l = -\frac{2}{5} \left(\frac{Eh^3\text{pruhyb}}{q_a}\right)^{\left(\frac{1}{4}\right)} 2^{\left(\frac{1}{4}\right)} 5^{\left(\frac{3}{4}\right)}, l = \left(-\frac{2}{5}i\right) \left(\frac{Eh^3\text{pruhyb}}{q_a}\right)^{\left(\frac{1}{4}\right)} 2^{\left(\frac{1}{4}\right)} 5^{\left(\frac{3}{4}\right)}, l = \right.$$

Neznámá *l* se v rovnici vyskytuje ve čtvrté mocnině. Při řešení v oboru komplexních čísel tedy dostáváme právě čtyři kořeny. Tři z nich pochopitelně nemají praktický význam.

_____ Sage code _____
`[i.rhs().subs(hodnoty).n() for i in reseni]`

[\[0.843620590006057i, -0.843620590006057, -0.843620590006057i, 0.843620590006057\]](#)

První tři řešení nevyhovují (záporná a komplexní čísla) a délka police je tedy 84.3cm.

Dokázali byste interpretovat následující číslo? (Velikost derivace délky police podle průhybu.)

_____ Sage code _____
`diff(reseni[3].rhs(),pruhyb).subs(hodnoty).n()`

[70.3017158338381](#)

2 Brzdná dráha

V ideálních podmínkách je brzdná dráha dána vztahem $L = kmv^2$. Uvažujme $k = 3.45 \times 10^{-6}$, $v = 100 \text{ kmh}^{-1}$ a $m = 1100 \text{ kg}$. Jednotky veličiny k jsou voleny tak, že délka brzděné dráhy vychází v metrech.

Vypočítejte parciální derivace $\frac{\partial L}{\partial m}$ a $\frac{\partial L}{\partial v}$ a interpretujte výsledky fyzikálně.

_____ Sage code _____
`k, m, v = var('k m v')
hodnoty = {k: 3.45*10^(-6), m: 1100, v: 100}
L = k*m*v^2
L`

kmv^2

Derivace podle hmotnosti

_____ Sage code _____
`diff(L, m).subs(hodnoty)`

[0.0345000000000000](#)

Derivace podle rychlosti

_____ Sage code _____
`diff(L, v).subs(hodnoty)`

[0.7590000000000000](#)

S rostoucí hmotností vozidla a s rostoucí rychlostí délka brzděné dráhy roste. Pro naše auto to podle výše uvedených výpočtů znamená, že kilogram nákladu navíc prodlouží brzděnou dráhu o 3cm, tj. 30 kg navíc prodlouží dráhu o 90 cm. Podobně, každý kilometr za hodinu u rychlosti námi uvažovaného auta přidává přibližně 75 cm brzděné dráhy.

3 Povrch lidského těla

V medicíně je nutná znalost povrchu těla například při odstraňování následků hypotermie. Mezi povrchem těla S , výškou h a hmotností m platí přibližný empirický vzorec $S = 0.2038832 m^{0.425} h^{0.725}$ (dosazujeme v kilogramech resp. metrech a výsledek je v metrech čtverečních). Pro dětského pacienta $m = 30 \text{ kg}$ a $h = 1.40 \text{ m}$ najděte parciální derivace povrchu podle hmotnosti a podle výšky a podejte jejich fyzikální interpretaci.

_____ Sage code _____
`k, m, h = var('k m h')
k = 0.2038832
hodnoty = {m: 30, h: 140}`

Upravíme si funkci tak, abychom mohli pracovat s centimetry a centimetry čtverečními.

_____ Sage code _____
`F = k*m^(0.425)*(h/100)^(0.725)*10000
F`

$$72.3404891997869 h^{0.725000000000000} m^{0.425000000000000}$$

_____ Sage code _____
F(hodnoty)

$$11043.3490809263$$

_____ Sage code _____
diff(F,m)(hodnoty)

$$156.447445313122$$

_____ Sage code _____
diff(F,h)(hodnoty)

$$57.1887720262254$$

Podle výsledků, s každým centrimetrem výšky roste povrch těla dítěte o 57 cm^2 a s každým kilogramem hmotnosti roste o 156 cm^2