Taylorův polynom

Robert Mařík

30. srpna 2010

Motivace. Předpokládejme že je dána funkce f s následujícími vlastnostmi:

- Dokážeme vypočítat funkční hodnotu a hodnotu derivací (až do řádu n) v jistém bodě x_0.
- Nemáme dostatečně efektivní algoritmus na výpočet funkčních hodnot v ostatních bodech $x \neq x_0$.

Pro výpočet funkčních hodnot v bodech v okolí bodu x_0 se budeme snažit funkci aproximovat jednodušší funkcí, v našem případě polynomem stupně n. Nejlepší polynom, který funkci f v okolí bodu x_0 aproximuje je takový polynom, který má s danou funkcí totožné v bodě x_0 derivace až do řádu n. Takový polynom se nazývá Taylorův polynom a nalezneme ho pomocí následující definice.

Definice (Taylorův polynom). Nechť $n \in \mathbb{N}$ je přirozené číslo a f funkce, která je definovaná v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$ a má zde všechny derivace do řádu n včetně. Polynom

$$T_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

se nazývá *Taylorův polynom* stupně n funkce f v bodě x_0. Bod x_0 se nazývá *střed* Taylorova polynomu.

Poznámka 1. Taylorův polynom je jediný polynom stupně n, který má s funkcí f v bodě x_0 společnou funkční hodnotu a hodnotu prvních n derivací. V případě že středem polynomu je $x_0 = 0$ používáme pro Taylorův polynom název *Maclaurinův polynom*.

Věta 1 (Taylorova věta)**.** Nechť funkce f má v bodě x_0 a nějakém jeho okolí $O(x_0)$ spojité derivace do řádu $n+1$, včetně. Pak pro všechna $x \in O(x_0)$ platí

$$f(x) = T_n(x) + R_{n+1}(x),$$

kde $T_n(x)$ je Taylorův polynom funkce f stupně n se středem v bodě x_0 a $R_{n+1}(x)$ je zbytek. Tento zbytek splňuje

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}, \tag{1}$$

kde c je vhodné číslo ležící mezi x a x_0.

Poznámka 2 (aproximace a její přesnost)**.** Z vyjádření zbytku (1) plyne, že tento zbytek je malý, jestliže

- x je blízko x_0, tj. absolutní hodnota rozdílu $(x - x_0)$ je malá
- n je velké
- $f^{(n+1)}(x)$ je malá v uvažovaném okolí bodu x_0

Jsou-li tyto podmínky splněny, můžeme psát v okolí bodu x_0

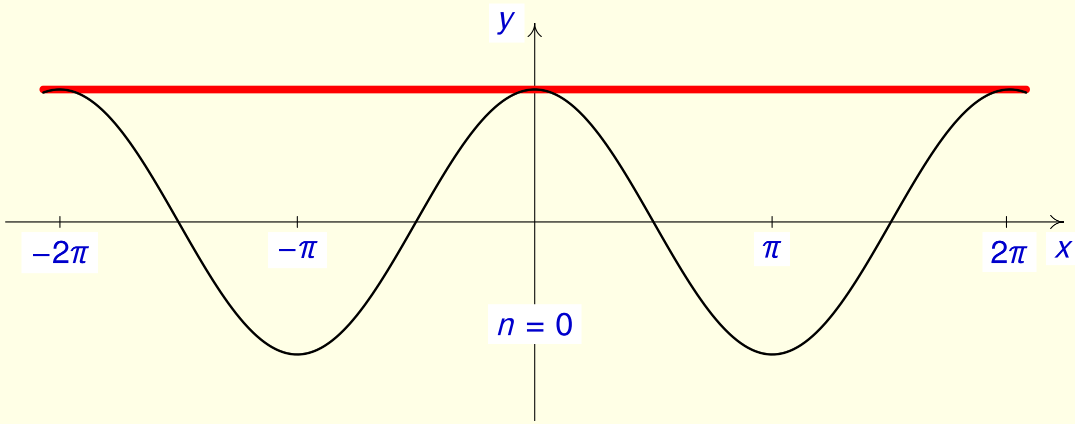
$$f(x) \approx T_n(x)$$

a chyba, které se při tom dopustíme bude malá. (Z (1) jsme schopni určit maximální hodnotu chyby, které se přitom dopustíme.)

Poznámka 3 (aplikační)**.** Taylorův polynom tedy slouží k tomu, abychom jistou funkční závislost aproximovali závislostí polynomickou. Tím se závislost podstatně zjednoduší, protože polynomy jsou jedny z nejjednodušších funkcí. Mějme však na paměti, že polynomická aproximace může být vynikající, ale i dostatečná pouze pro některá x, nebo dokonce tak špatná, že její použití nevede k rozumným výsledkům.

Aproximace funkce $f: \ y = \cos x$ v okolí bodu $x = 0$ pomocí Taylorova polynomu.

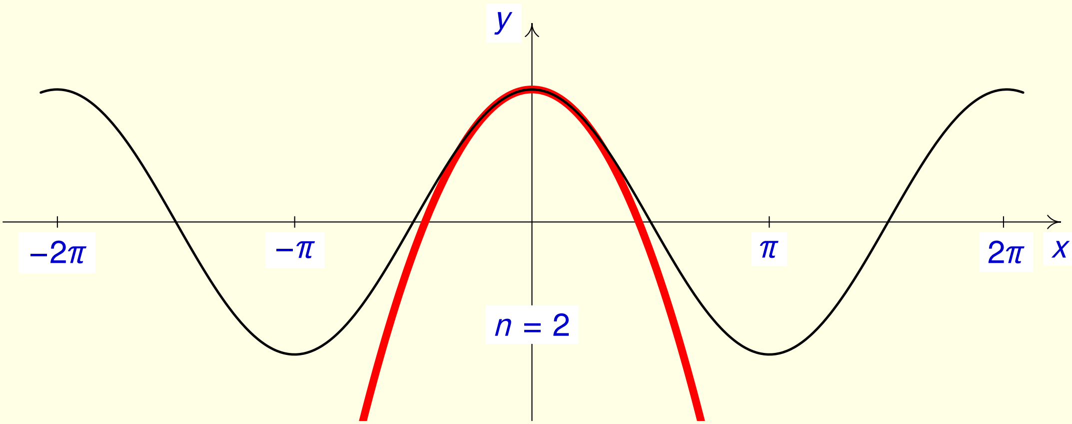
$$T_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$



$$\boxed{T_0(x) = 1}$$

Aproximace funkce $f: \ y = \cos x$ v okolí bodu $x = 0$ pomocí Taylorova polynomu.

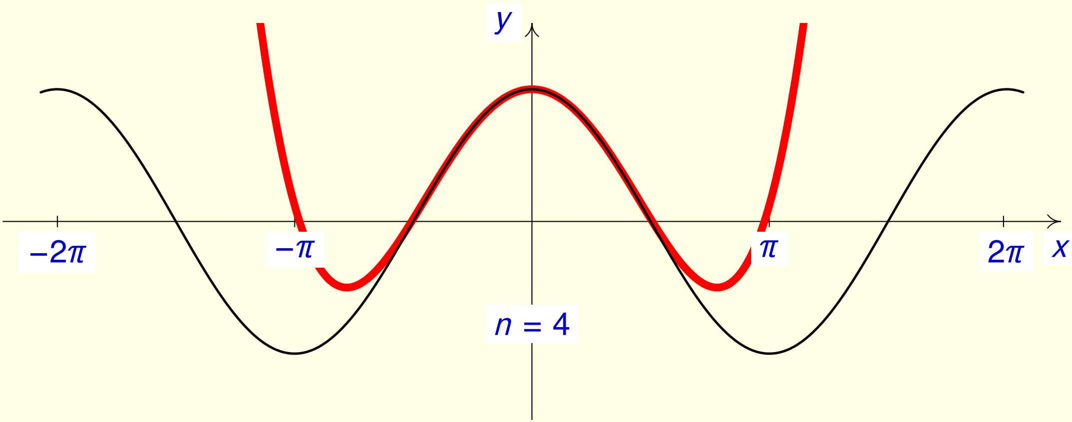
$$T_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$



$$\boxed{T_2(x) = 1 - \frac{x^2}{2}}$$

Aproximace funkce $f:\ y=\cos x$ v okolí bodu $x=0$ pomocí Taylorova polynomu.

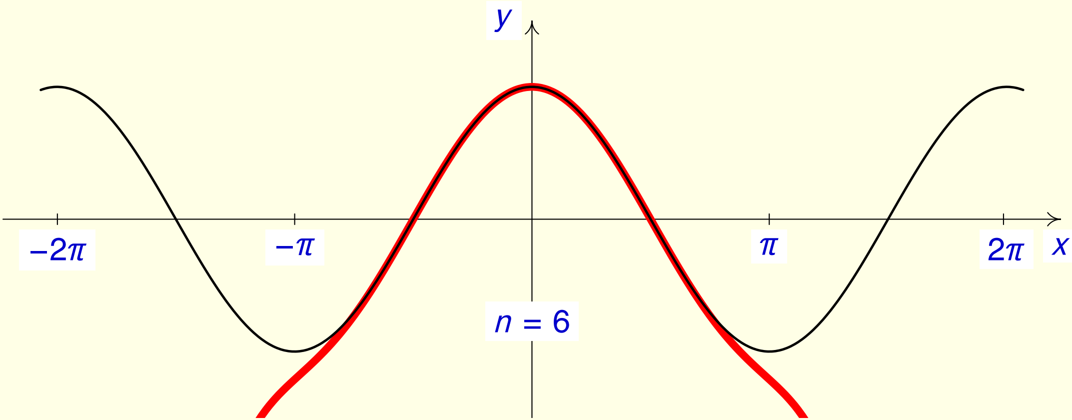
$$T_n(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$



$$\boxed{T_4(x)=1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}}$$

Aproximace funkce $f: \ y = \cos x$ v okolí bodu $x = 0$ pomocí Taylorova polynomu.

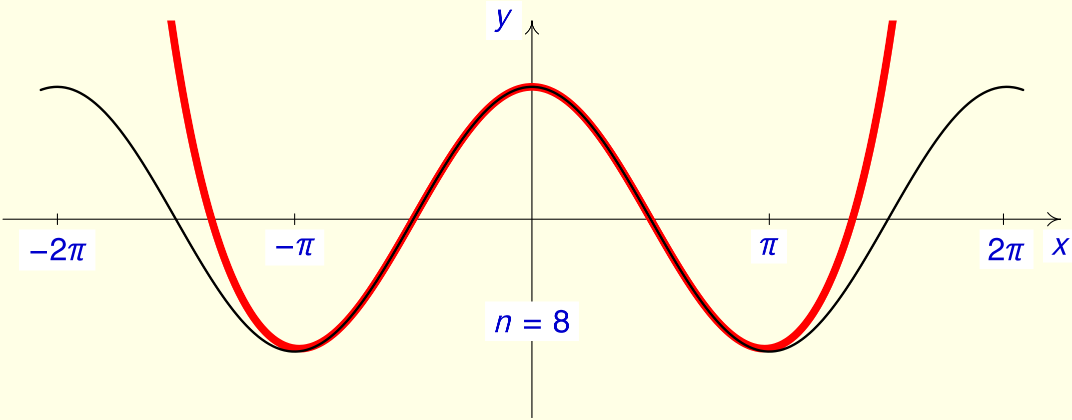
$$T_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$



$$\boxed{T_6(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!}}$$

Aproximace funkce $f: y = \cos x$ v okolí bodu $x = 0$ pomocí Taylorova polynomu.

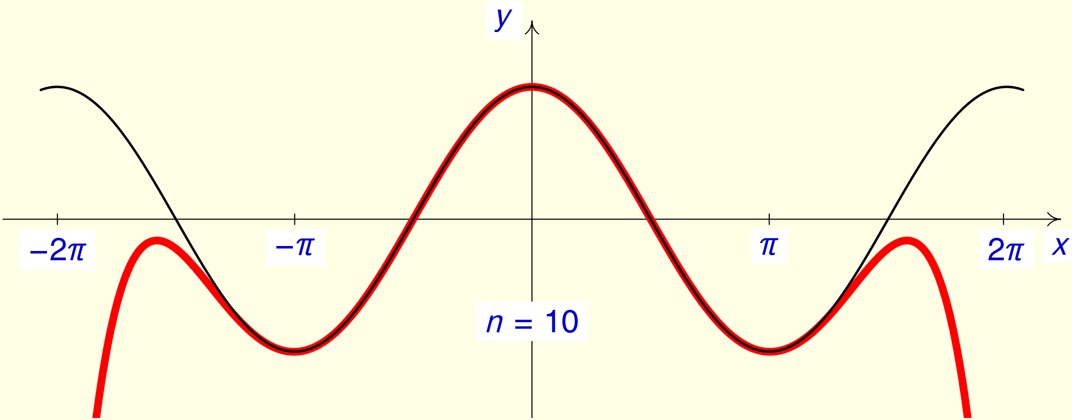
$$T_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$



$$\boxed{T_8(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!}}$$

Aproximace funkce $f: y = \cos x$ v okolí bodu $x = 0$ pomocí Taylorova polynomu.

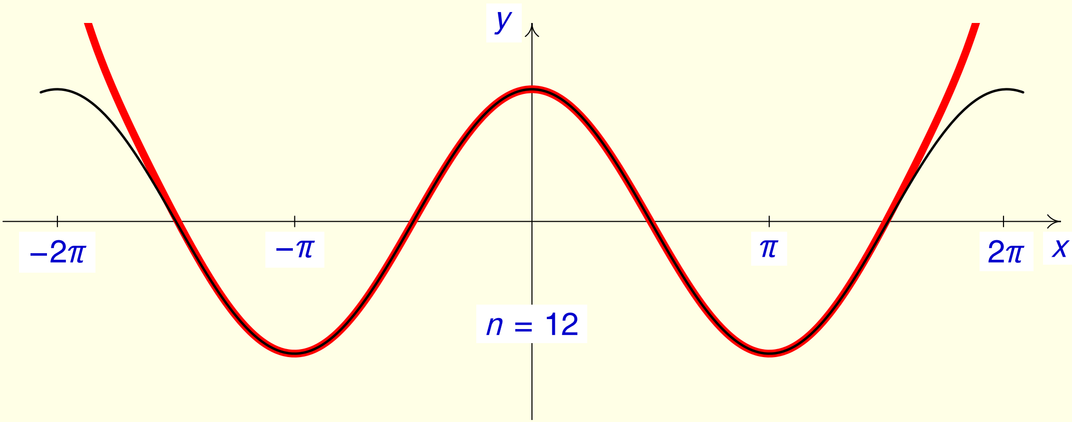
$$T_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$



$$\boxed{T_{10}(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \frac{x^{10}}{10!}}$$

Aproximace funkce $f: \ y = \cos x$ v okolí bodu $x = 0$ pomocí Taylorova polynomu.

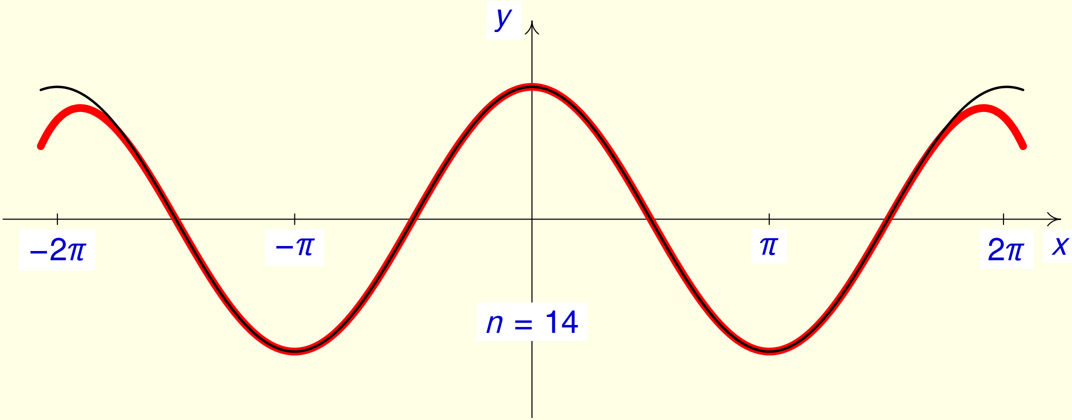
$$T_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$



$$\boxed{T_{12}(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \frac{x^{10}}{10!} + \frac{x^{12}}{12!}}$$

Aproximace funkce $f\,:\; y = \cos x$ v okolí bodu $x = 0$ pomocí Taylorova polynomu.

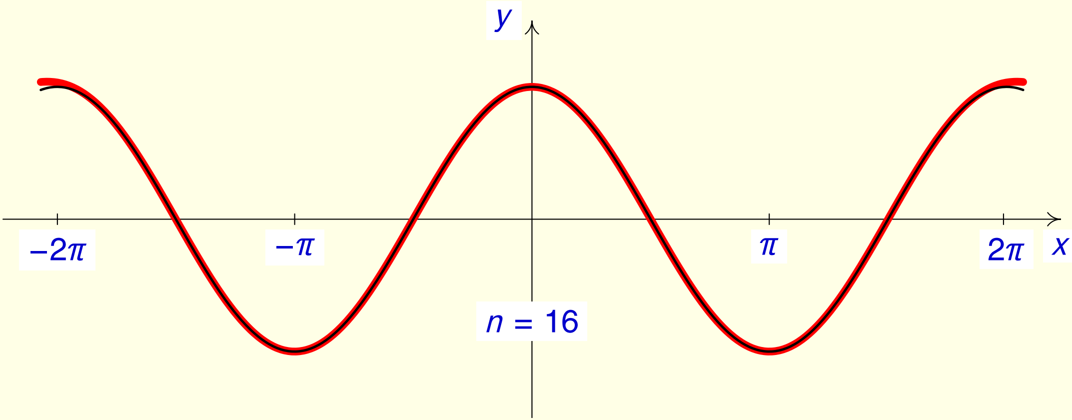
$$T_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$



$$\boxed{T_{14}(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \frac{x^{10}}{10!} + \frac{x^{12}}{12!} - \frac{x^{14}}{14!}}$$

Aproximace funkce $f: \ y = \cos x$ v okolí bodu $x = 0$ pomocí Taylorova polynomu.

$$T_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$



$$\boxed{T_{16}(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \frac{x^{10}}{10!} + \frac{x^{12}}{12!} - \frac{x^{14}}{14!} + \frac{x^{16}}{16!}}$$