Určitý integrál

Robert Mařík

26. září 2008

Obsah

1 Konstrukce (definice) Riemannova integrálu. 2

2 Výpočet — Newtonova–Leibnizova věta. 18

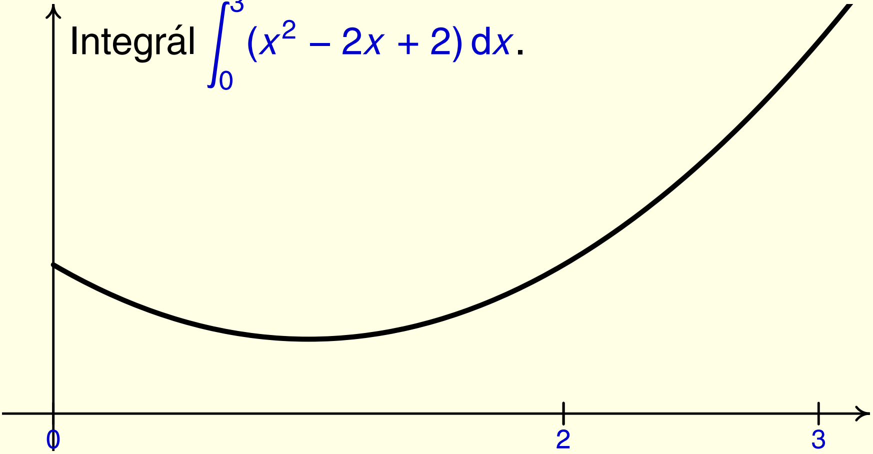
3 Numerický odhad — Lichoběžníkové pravidlo 19

4 Aplikace – výpočet objemů a obsahů 30

1 Konstrukce (definice) Riemannova integrálu.

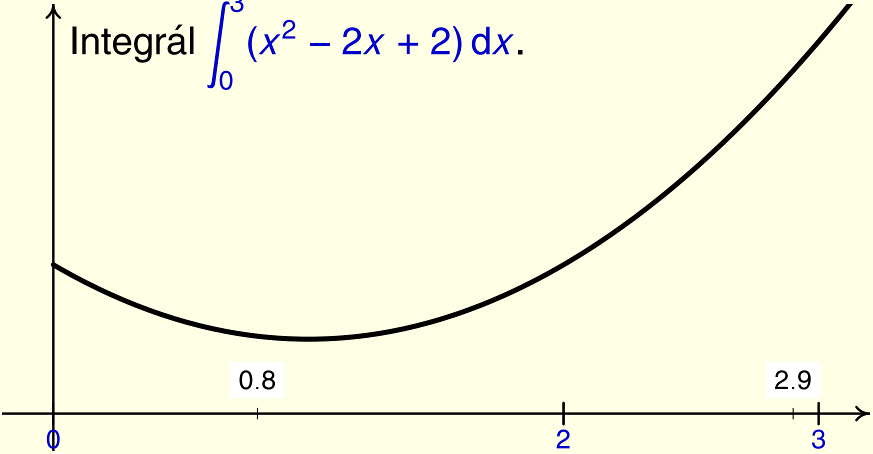
Na následujících stranách si vysvětlíme geometricky hlavní myšlenky definice Riemannova integrálu.

Integrál $\int_0^3 (x^2 - 2x + 2)\,\mathrm{d}x$.



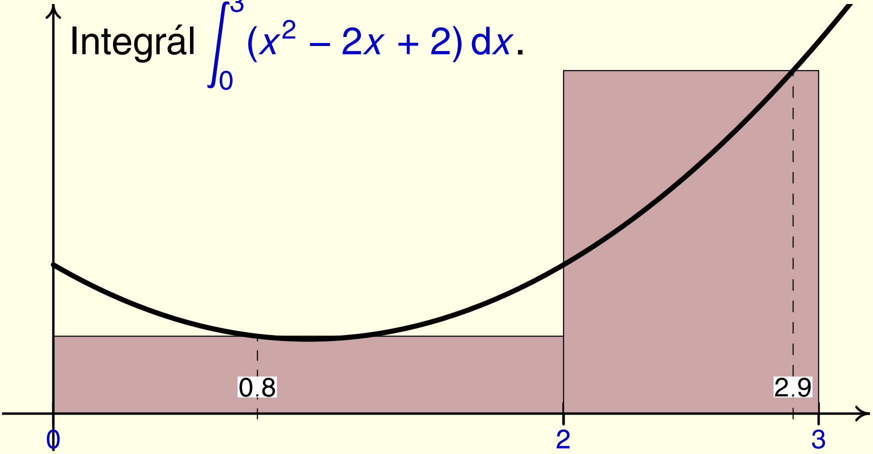
Křivka na obrázku je grafem funkce $y = x^2 - 2x + 2$
Rozdělíme interval. Norma dělení je 2.

Integrál $\int_0^3 (x^2 - 2x + 2)\,dx$.



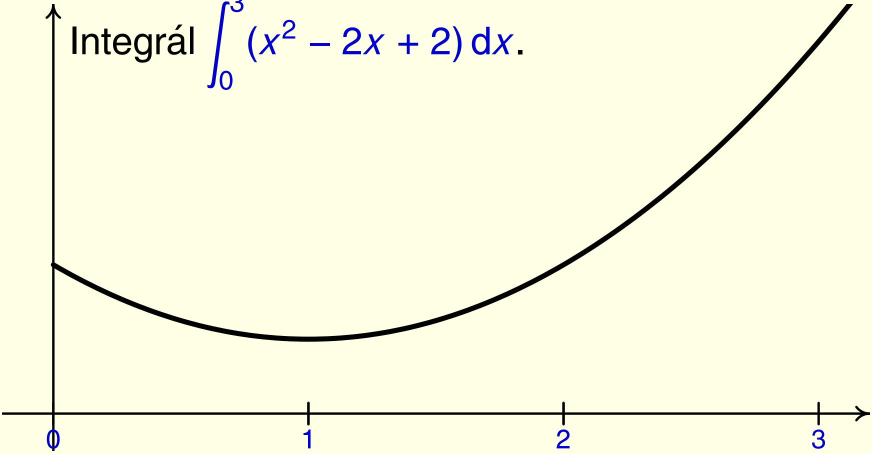
Křivka na obrázku je grafem funkce $y = x^2 - 2x + 2$
Rozdělíme interval. Norma dělení je 2.
Zvolíme reprezentanty v každém podintervalu.

Integrál $\int_0^3 (x^2 - 2x + 2)\,dx$.



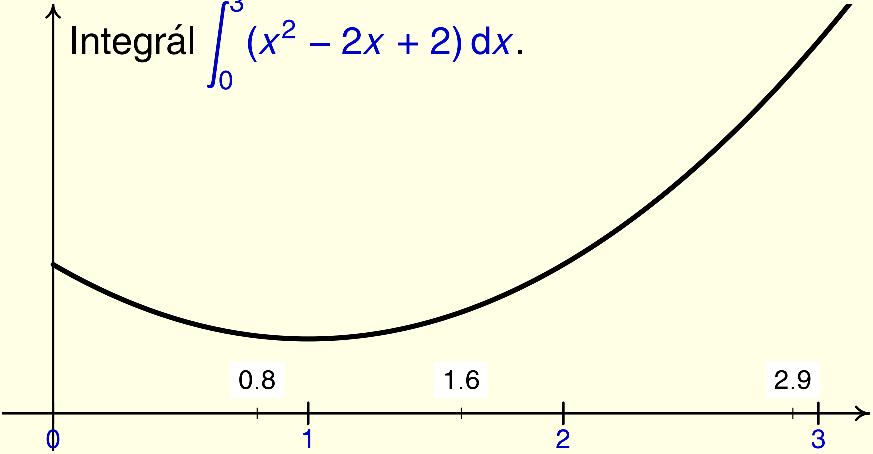
Křivka na obrázku je grafem funkce $y = x^2 - 2x + 2$
Rozdělíme interval. Norma dělení je 2.
Zvolíme reprezentanty v každém podintervalu.
Nakreslíme integrální součet – plocha červeného obrazce.

Integrál $\int_0^3 (x^2 - 2x + 2)\,\mathrm{d}x$.



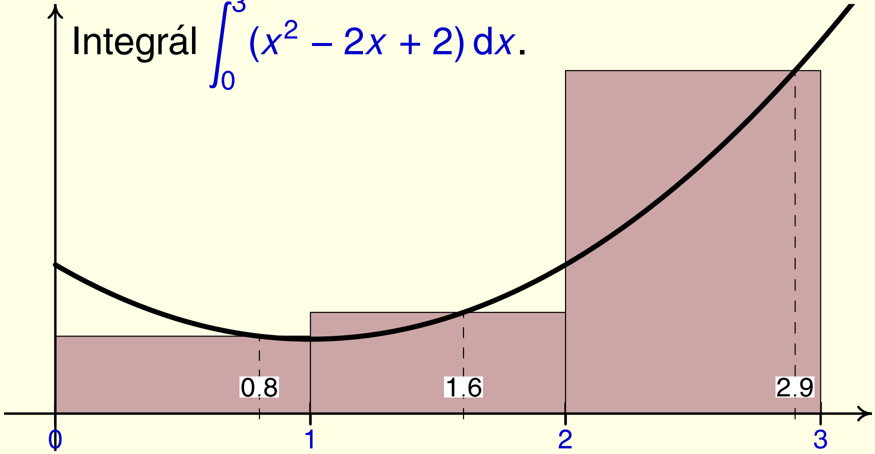
Zjemníme dělení. Norma tohoto dělení je 1.

Integrál $\int_0^3 (x^2 - 2x + 2)\,\mathrm{d}x$.



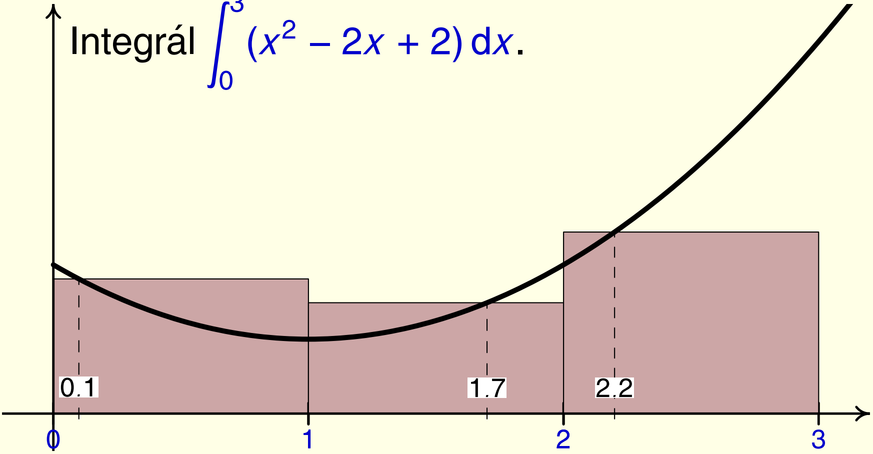
Zjemníme dělení. Norma tohoto dělení je 1.
Zvolíme reprezentanty v každém podintervalu.

Integrál $\int_0^3 (x^2 - 2x + 2)\,\mathrm{d}x$.



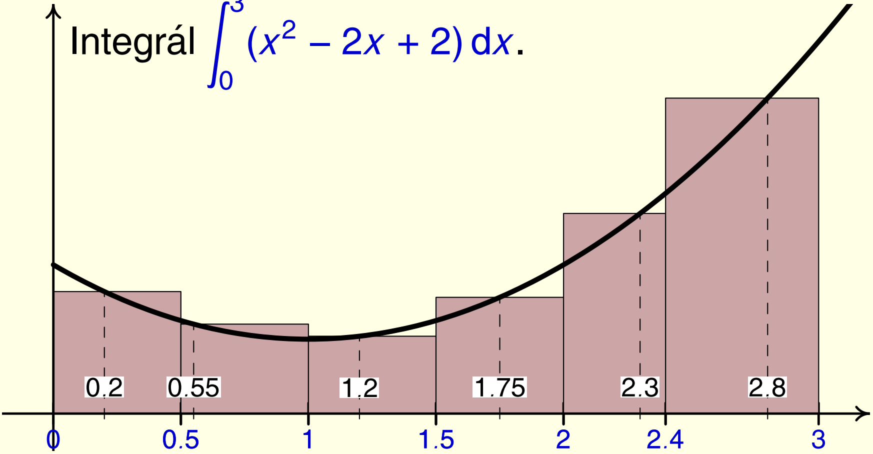
Zjemníme dělení. Norma tohoto dělení je 1.
Zvolíme reprezentanty v každém podintervalu.
Nakreslíme integrální součet – plocha červeného obrazce.

Integrál $\int_0^3 (x^2 - 2x + 2)\,\mathrm{d}x$.



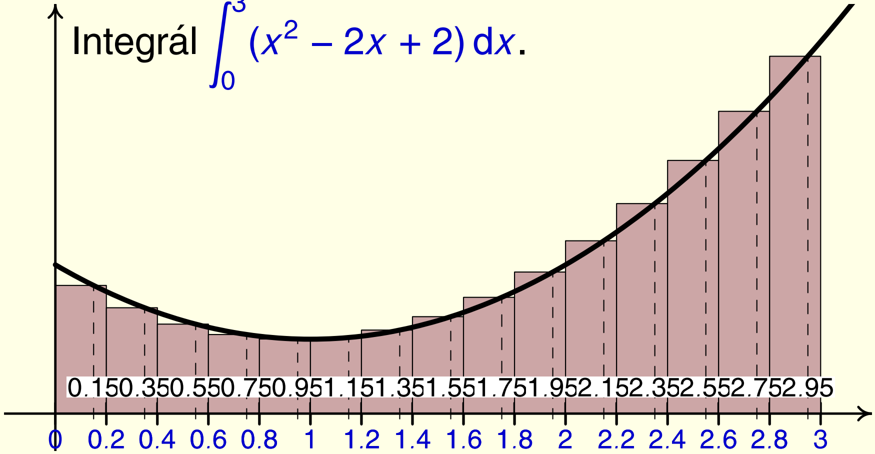
Ponecháme dělení. Norma dělení je pořád 1.
Zvolíme reprezentanty v každém podintervalu, ale jinak, než v předchozím kroku.
Nakreslíme integrální součet – plocha červeného obrazce.
Integrální součet závisí na výběru reprezentantů.

Integrál $\int_0^3 (x^2 - 2x + 2)\,dx$.



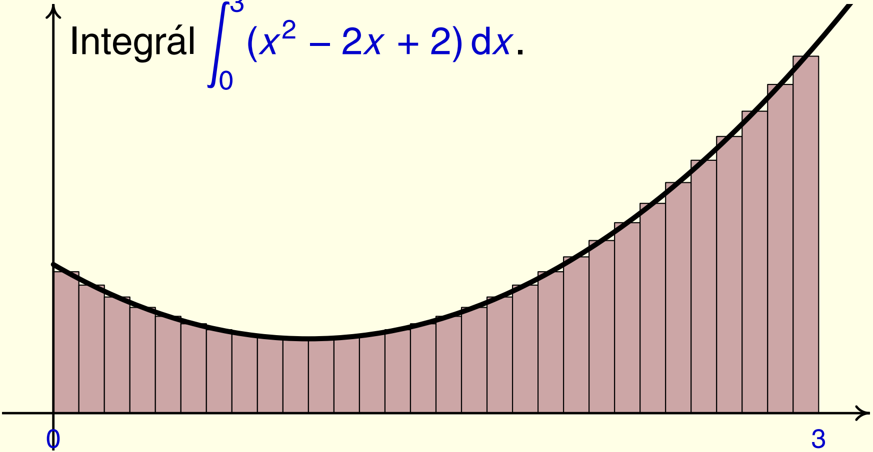
Zjemníme dělení. Norma tohoto dělení je 0.6 (nejdelší interval je ten poslední).
Zvolíme reprezentanty a určíme integrální součet – plocha červeného obrazce.

Integrál $\int_0^3 (x^2 - 2x + 2)\,dx$.



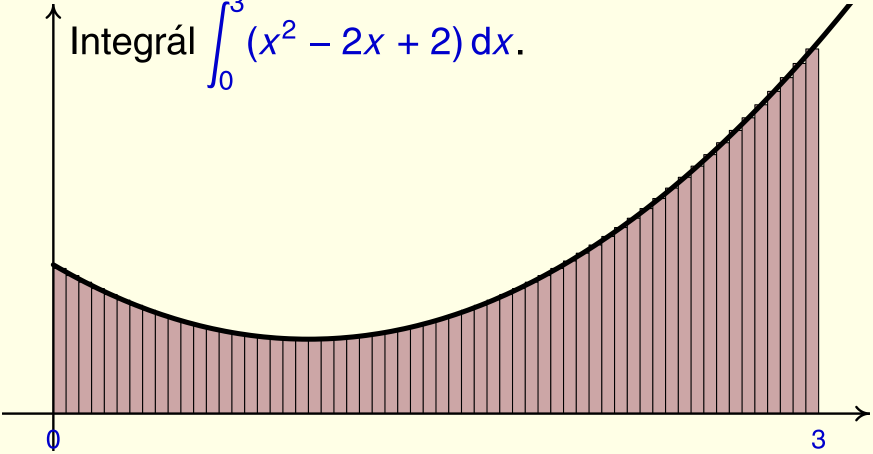
Opět zjemníme dělení. Norma tohoto dělení je 0.2
Zvolíme reprezentanty a určíme integrální součet.

Integrál $\int_0^3 (x^2 - 2x + 2)\,\mathrm{d}x$.



Pokračujeme ve zjemňování dělení. Nyní je norma 0.1.

Integrál $\int_0^3 (x^2 - 2x + 2)\,dx$.



Pokračujeme ve zjemňování dělení ad infimum. Nyní je norma 0.05.
Pokud se hodnota integrálních součtů ustálí (integrální součty mají limitu při normě dělení jdoucí k nule) a pokud tato limita nezávisí ani na konkrétním výběru reprezentantů ani na způsobu, jak dělení zjmeňujeme, říkáme, že funkce je Riemannovsky integrovatelná a její Riemannův (= určitý) integrál je ona limita integrálních součtů.

Definice (dělení intervalu). Buď $[a, b]$ uzavřený interval $-\infty < a < b < \infty$. *Dělením intervalu* $[a, b]$ rozumíme konečnou posloupnost $D = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ bodů z intervalu $[a, b]$ s vlastností

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b.$$

Čísla x_i nazýváme *dělící body*. *Normou dělení* D rozumíme maximální číslo, které udává vzdálenost sousedních dělících bodů. Normu dělení D označujeme $\nu(D)$. Je tedy $\nu(D) = \max\{x_i - x_{i-1}, 1 \leq i \leq n\}$.

Definice (integrální součet). Buď $[a, b]$ uzavřený interval a f funkce definovaná a ohraničená na $[a, b]$. Buď D dělení intervalu $[a, b]$. Buď $R = \{\xi_1, \dots, \xi_n\}$ posloupnost čísel z intervalu $[a, b]$ splňující $x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i$ pro $i = 1..n$. Potom součet

$$\sigma(f, D, R) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$$

nazýváme *integrálním součtem funkce f* příslušným dělení D a *výběru reprezentantů* R.

Definice (Riemannův integrál). Buď $[a, b]$ uzavřený interval a f funkce definovaná a ohraničená na $[a, b]$. Buď D_n posloupnost dělení intervalu $[a, b]$ a R_n posloupnost reprezentantů. Řekneme, že funkce f je *Riemannovsky integrovatelná* na intervalu $[a, b]$, jestliže existuje číslo $I \in \mathbb{R}$ s vlastností

$$\lim_{n\to\infty} \sigma(f, D_n, R_n) = I$$

pro libovolnou posloupnost dělení D_n, splňující $\lim_{n\to\infty} \nu(D_n) = 0$ při libovolné volbě reprezentantů R_n. Číslo I nazýváme *Riemannův integrál funkce f na intervalu $[a, b]$* a označujeme

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Definice (horní a dolní mez). Číslo a v definici Riemannova integrálu se nazývá *dolní mez* a číslo b *horní mez* Riemannova integrálu.

Věta 1 (postačující podmínky pro integrovatelnost funkce).

1. Funkce spojitá na intervalu $[a, b]$ je na tomto intervalu Riemannovsky integrovatelná.
2. Funkce ohraničená na $[a, b]$, která má na tomto intervalu konečný počet bodů nespojitosti je Riemannovsky integrovatelná.
3. Funkce monotonní na $[a, b]$ je na tomto intervalu Riemannovsky integrovatelná.

Věta 2 (linearita určitého integrálu vzhledem k funkci). Nechť f, g jsou funkce integrovatelné na $[a, b]$, c nechť je reálné číslo. Pak platí

$$\int_a^b [f(x) + g(x)]\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x,$$

$$\int_a^b cf(x)\,\mathrm{d}x = c\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Věta 3 (aditivita určitého integrálu vzhledem k mezím). Nechť f je funkce integrovatelná na $[a, b]$. Buď $c \in (a, b)$ libovolné. Pak je f integrovatelná na intervalech $[a, c]$ a $[c, b]$ a platí

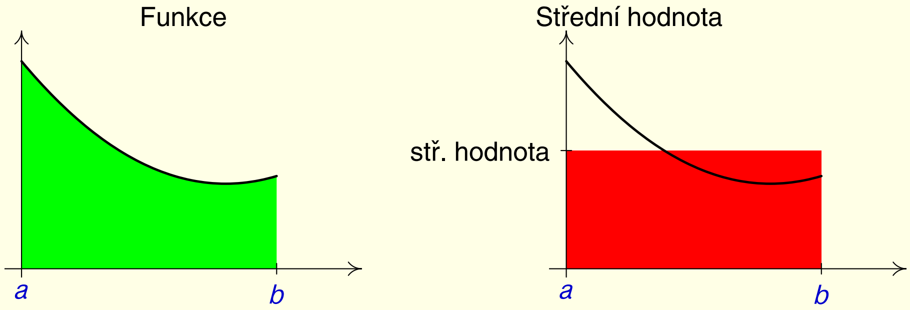
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Věta 4 (monotonie vzhledem k funkci). Buďte f a g funkce integrovatelné na $[a,b]$ takové, že $f(x) \leq g(x)$ pro $x \in (a,b)$. Pak platí $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.

Definice (střední hodnota). Buď f funkce (Riemannovsky) integrovatelná na intervalu $[a,b]$. Číslo

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

se nazývá *střední hodnota funkce f na intervalu* $[a,b]$.



2 Výpočet — Newtonova–Leibnizova věta.

Věta 5 (Newtonova–Leibnizova věta). Nechť funkce $f(x)$ je Riemannovsky integrovatelná na $[a,b]$. Nechť $F(x)$ je funkce spojitá na $[a,b]$, která je intervalu (a,b) primitivní k funkci $f(x)$. Pak platí

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a).}$$

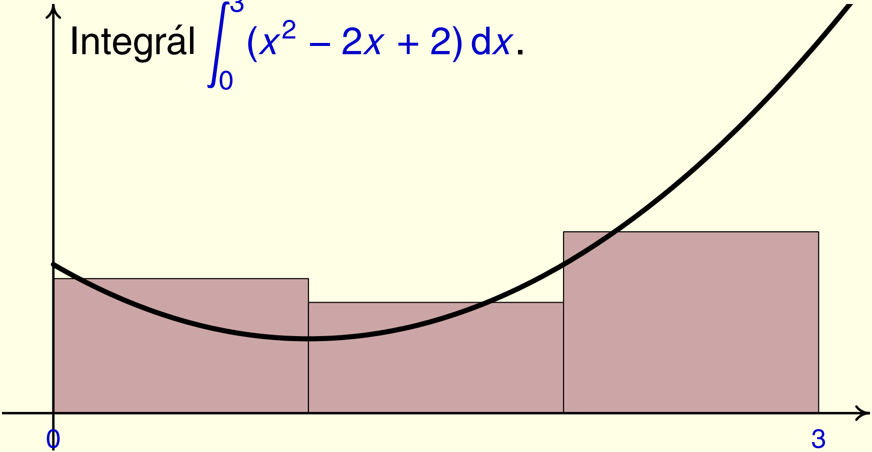
Příklad.

$$\begin{aligned}\int_0^3 (x^2 - 2x + 2)\,\mathrm{d}x &= \left[\frac{x^3}{3} - x^2 + 2x\right]_0^3\\ &= \frac{3^3}{3} - 3^2 + 2.3 - \left[\frac{0^3}{3} - 0^2 + 2.0\right]\\ &= 3^2 - 3^2 + 6 - 0\\ &= 6\end{aligned}$$

3 Numerický odhad — Lichoběžníkové pravidlo

- Vrátíme se k definici Riemannova integrálu a k integrálním součtům.
- Budeme se snažit co nejlépe aproximovat plochu pod křivkou.
- Pro větší početní komfort budeme interval dělit na stejně dlouhé dílky.

Integrál $\int_0^3 (x^2 - 2x + 2)\,dx$.

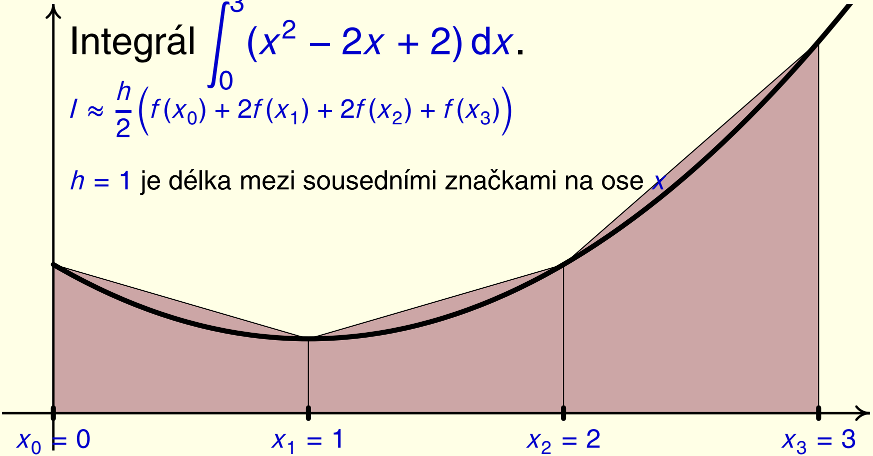


Dělení a integrální součet

Integrál $\int_0^3 (x^2 - 2x + 2)\,\mathrm{d}x$.

$$I \approx \frac{h}{2}\Big(f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + f(x_3)\Big)$$

$h = 1$ je délka mezi sousedními značkami na ose x

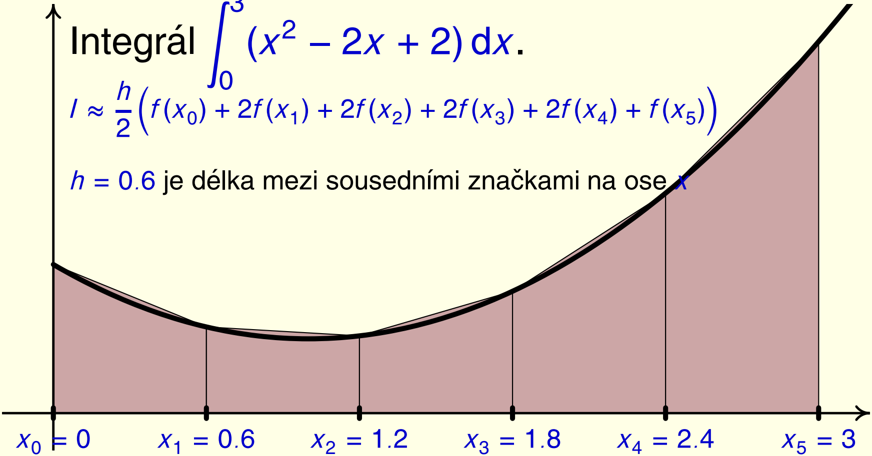


Nahradíme každý obdélník lichoběžníkem. Aproximace je lepší a výpočet se moc nezhorší.

Integrál $\int_0^3 (x^2 - 2x + 2)\,\mathrm{d}x$.

$$I \approx \frac{h}{2}\Big(f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + 2f(x_3) + 2f(x_4) + f(x_5)\Big)$$

$h = 0.6$ je délka mezi sousedními značkami na ose x

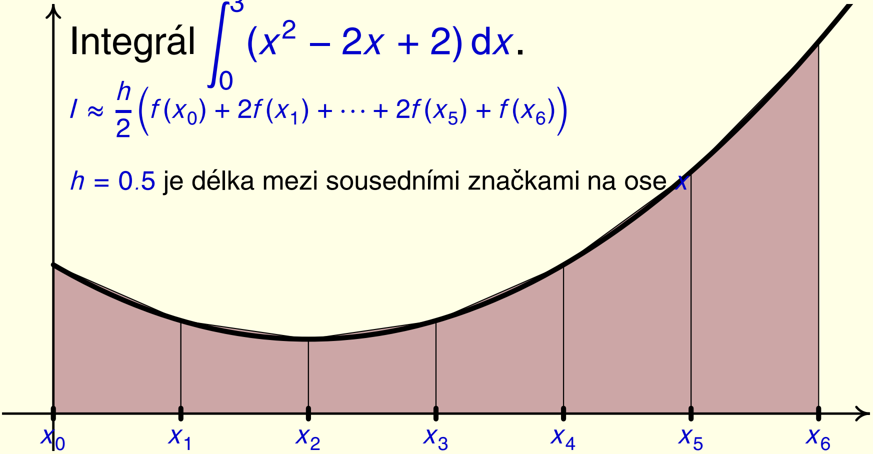


Volíme kratší výšku lichoběžníků a aproximace je ještě lepší, počítání je však delší.

Integrál $\int_0^3 (x^2 - 2x + 2)\,dx$.

$$I \approx \frac{h}{2}\Big(f(x_0) + 2f(x_1) + \cdots + 2f(x_5) + f(x_6)\Big)$$

$h = 0.5$ je délka mezi sousedními značkami na ose x



Pro jemnější dělení je aproximace ještě lepší.
Chyba, které se dopustíme, je malá jestliže

- použijeme “dostatečně jemné” dělení,
- funkce se “příliš neliší” od lineární funkce (to ale neovlivníme).

Příklad. Hledejme $\int_1^2 \frac{\sin x}{x}\, dx$.

Příklad. Hledejme $\int_1^2 \frac{\sin x}{x}\,dx$. $n = 10$, $h = 0.1$.

i	$x_i = a + hi$	$y_i = \frac{\sin x_i}{x_i}$	m	my_i
0	1			
1	1.1			
2	1.2			
3	1.3			
4	1.4			
5	1.5			
6	1.6			
7	1.7			
8	1.8			
9	1.9			

- Rozdělíme interval na 10 dílků, $n = 10$. Délka jednoho dílku bude $h = \frac{b-a}{n} = \frac{2-1}{10} = 0.1$.
- Výpočet zaznamenáme v následující tabulce (budeme zaokrouhlovat na 6 desetinných míst).

Příklad. Hledejme $\int_1^2 \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$. $n = 10$, $h = 0.1$.

i	$x_i = a + hi$	$y_i = \frac{\sin x_i}{x_i}$	m	my_i
0	1	0.841471		
1	1.1	0.810189		
2	1.2	0.776699		
3	1.3	0.741199		
4	1.4	0.703893		
5	1.5	0.664997		
6	1.6	0.624734		
7	1.7	0.583332		
8	1.8	0.541026		
9	1.9	0.498053		
10	2	0.454649		

Příklad. Hledejme $\int_1^2 \frac{\sin x}{x}\,dx$. $n = 10$, $h = 0.1$.

i	$x_i = a + hi$	$y_i = \frac{\sin x_i}{x_i}$	m	my_i
0	1	0.841471	1	0.841471
1	1.1	0.810189	2	1.620377
2	1.2	0.776699	2	1.553398
3	1.3	0.741199	2	1.482397
4	1.4	0.703893	2	1.407785
5	1.5	0.664997	2	1.329993
6	1.6	0.624734	2	1.249467
7	1.7	0.583332	2	1.166664
8	1.8	0.541026	2	1.082053
9	1.9	0.498053	2	0.996105
10	2	0.454649	1	0.454649

Příklad. Hledejme $\int_1^2 \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$. $n = 10$, $h = 0.1$.

i	$x_i = a + hi$	$y_i = \frac{\sin x_i}{x_i}$	m	my_i
0	1	0.841471	1	0.841471
1	1.1	0.810189	2	1.620377
2	1.2	0.776699	2	1.553398
3	1.3	0.741199	2	1.482397
4	1.4	0.703893	2	1.407785
5	1.5	0.664997	2	1.329993
6	1.6	0.624734	2	1.249467
7	1.7	0.583332	2	1.166664
8	1.8	0.541026	2	1.082053
9	1.9	0.498053	2	0.996105
10	2	0.454649	1	0.454649

Součet v posledním sloupci je $S = 13.184361$ a proto

$$\int_1^2 \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x \approx \frac{hS}{2} = \frac{S}{20} = 0.659218.$$

Příklad. Hledejme $\int_1^2 \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$. $n = 10$, $h = 0.1$.

i	$x_i = a + hi$	$y_i = \frac{\sin x_i}{x_i}$	m	my_i
0	1	0.841471	1	0.841471
1	1.1	0.810189	2	1.620377
2	1.2	0.776699	2	1.553398
3	1.3	0.741199	2	1.482397
4	1.4	0.703893	2	1.407785
5	1.5	0.664997	2	1.329993
6	1.6	0.624734	2	1.249467
7	1.7	0.583332	2	1.166664
8	1.8	0.541026	2	1.082053
9	1.9	0.498053	2	0.996105
10	2	0.454649	1	0.454649

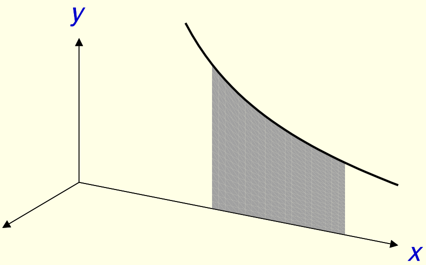
Součet v posledním sloupci je $S = 13.184361$ a proto

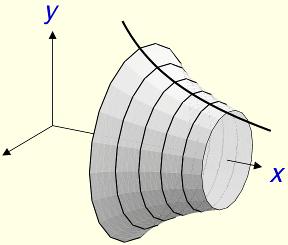
$$\int_1^2 \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x \approx \frac{hS}{2} = \frac{S}{20} = 0.659218.$$

Použití přesnějších metod vede k přesnější hodnotě $I \doteq 0.659329906435512$, od které jsme se odchýlili na čtvrtém desetinném místě.

4 Aplikace – výpočet objemů a obsahů

Obsah křivočarého lichoběžníku a objem rotačního tělesa

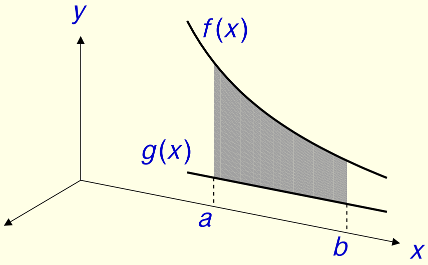


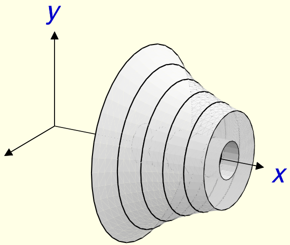


$$S = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x$$

Obsah množiny mezi křivkami a objem tělesa, vzniklého rotací této množiny





$$S = \int_a^b [f(x) - g(x)]\,\mathrm{d}x$$

$$V = \pi \int_a^b \left[f^2(x) - g^2(x)\right]\mathrm{d}x$$

Určete obsah množiny mezi křivkami $y = 1 - (x - 1)^2$ a $x + y = 0$.

Určete obsah množiny mezi křivkami $y = 1 - (x - 1)^2$ a $x + y = 0$.

$$1 - (x - 1)^2 = -x$$

- První z křivek je parabola, druhá z křivek je přímka $y = -x$.
- Křivky se protínají v bodě, jehož x-ová splňuje rovnici

$$1 - (x - 1)^2 = -x$$

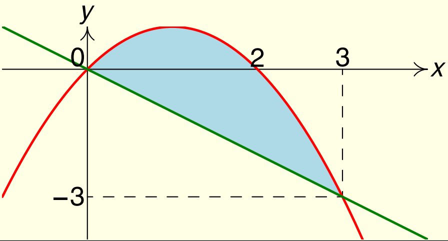
Určete obsah množiny mezi křivkami $y = 1 - (x-1)^2$ a $x + y = 0$.

$$\begin{aligned} 1 - (x-1)^2 &= -x \\ 1 - (x^2 - 2x + 1) &= -x \\ 1 - x^2 + 2x - 1 &= -x \\ 3x - x^2 &= 0 \\ (3 - x)x &= 0 \end{aligned}$$

Průsečíky křivek jsou body $[0, 0]$ a $[3, -3]$.

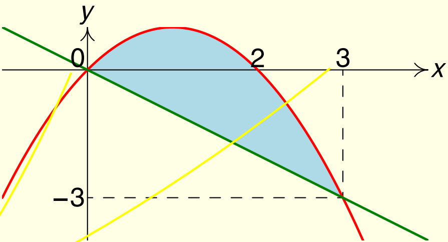
Určete obsah množiny mezi křivkami $y = 1 - (x-1)^2$ a $x + y = 0$.

$$1 - (x-1)^2 = -x$$
$$1 - (x^2 - 2x + 1) = -x$$
$$1 - x^2 + 2x - 1 = -x$$
$$3x - x^2 = 0$$
$$(3 - x)x = 0$$



$$y = 1 - (x-1)^2 = 1 - (x^2 - 2x + 1) = 2x - x^2 = x(2 - x)$$

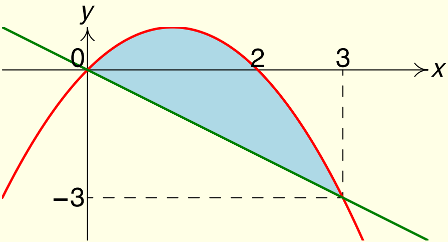
Určete obsah množiny mezi křivkami $y = 1 - (x-1)^2$ a $x + y = 0$.



$$S = \int_0^3 1 - (x-1)^2 - (-x)\,\mathrm{d}x$$

$$x + y = 0 \iff y = -x$$

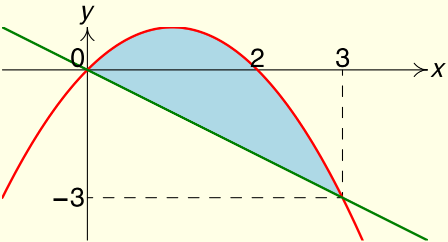
Určete obsah množiny mezi křivkami $y = 1 - (x-1)^2$ a $x + y = 0$.



$$S = \int_0^3 1 - (x-1)^2 - (-x)\,dx = \int_0^3 1 - (x^2 - 2x + 1) + x\,dx$$

Umocníme.

Určete obsah množiny mezi křivkami $y = 1 - (x-1)^2$ a $x + y = 0$.

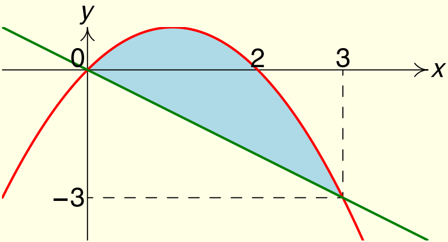


$$S = \int_0^3 1 - (x-1)^2 - (-x)\,\mathrm{d}x = \int_0^3 1 - (x^2 - 2x + 1) + x\,\mathrm{d}x$$

$$= \int_0^3 -x^2 + 3x\,\mathrm{d}x$$

Upravíme integrand.

Určete obsah množiny mezi křivkami $y = 1 - (x-1)^2$ a $x + y = 0$.

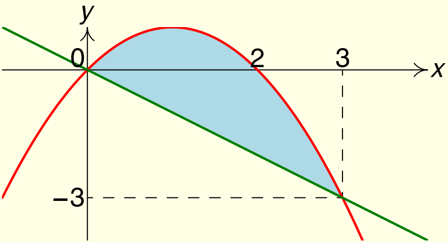


$$S = \int_0^3 1 - (x-1)^2 - (-x)\,\mathrm{d}x = \int_0^3 1 - (x^2 - 2x + 1) + x\,\mathrm{d}x$$

$$= \int_0^3 -x^2 + 3x\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{x^3}{3} + 3\frac{x^2}{2}\right]_0^3$$

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Určete obsah množiny mezi křivkami $y = 1 - (x-1)^2$ a $x + y = 0$.

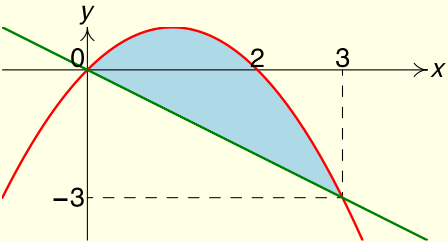


$$S = \int_0^3 1 - (x-1)^2 - (-x)\,\mathrm{d}x = \int_0^3 1 - (x^2 - 2x + 1) + x\,\mathrm{d}x$$

$$= \int_0^3 -x^2 + 3x\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{x^3}{3} + 3\frac{x^2}{2}\right]_0^3 = \left[-\frac{3^3}{3} + 3\frac{3^2}{2}\right] - \left[-\frac{0^3}{3} + 3\frac{0^2}{2}\right]$$

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Určete obsah množiny mezi křivkami $y = 1 - (x-1)^2$ a $x + y = 0$.



$$S = \int_0^3 1 - (x-1)^2 - (-x)\,\mathrm{d}x = \int_0^3 1 - (x^2 - 2x + 1) + x\,\mathrm{d}x$$

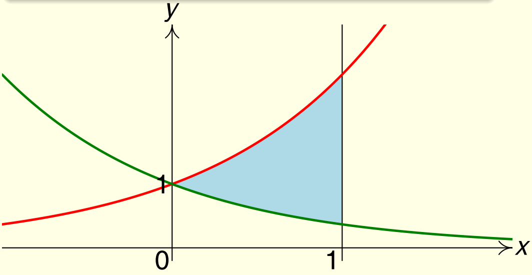
$$= \int_0^3 -x^2 + 3x\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{x^3}{3} + 3\frac{x^2}{2}\right]_0^3 = \left[-\frac{3^3}{3} + 3\frac{3^2}{2}\right] - \left[-\frac{0^3}{3} + 3\frac{0^2}{2}\right]$$

$$= -9 + \frac{27}{2} = \frac{9}{2}$$

Dopočítáme obsah množiny.

Určete obsah množiny mezi křivkami $y = e^x$ a $y = e^{-x}$ pro $x \in [0, 1]$ a objem tělesa, které vznikne rotací této množiny okolo osy x.

$y = e^x$, $y = e^{-x}$, $x \in [0, 1]$, $S = ?$, $V = ?$.

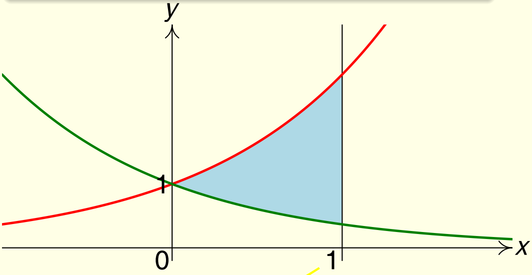


$$S = \int_a^b \Big(f(x) - g(x)\Big)\,\mathrm{d}x$$

$$V = \pi \int_a^b \Big(f^2(x) - g^2(x)\Big)\,\mathrm{d}x$$

Zakreslíme křivky.

$y = e^x$, $y = e^{-x}$, $x \in [0, 1]$, $S = ?$, $V = ?$.



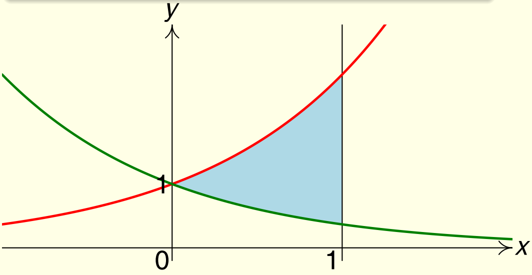
$$S = \int_a^b \Big(f(x) - g(x)\Big)\,\mathrm{d}x$$

$$V = \pi \int_a^b \Big(f^2(x) - g^2(x)\Big)\,\mathrm{d}x$$

$$S = \int_0^1 e^x - e^{-x}\,\mathrm{d}x$$

Vyjádříme obsah plochy jako určitý integrál.

$y = e^x$, $y = e^{-x}$, $x \in [0, 1]$, $S = ?$, $V = ?$.



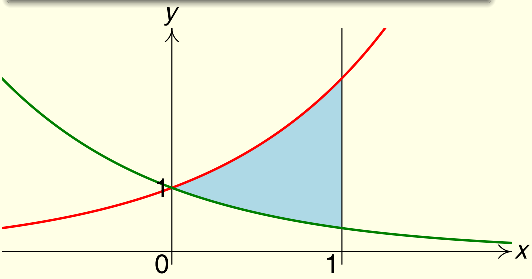
$$S = \int_a^b \Big(f(x) - g(x)\Big)\,dx$$

$$V = \pi \int_a^b \Big(f^2(x) - g^2(x)\Big)\,dx$$

$$S = \int_0^1 e^x - e^{-x}\,dx = \left[e^x + e^{-x}\right]_0^1$$

Vypočteme neurčitý integrál.

$y = e^x$, $y = e^{-x}$, $x \in [0, 1]$, $S = ?$, $V = ?$.



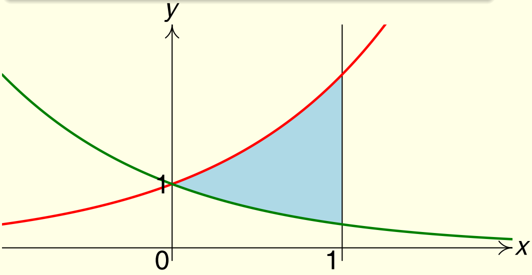
$$S = \int_a^b \big(f(x) - g(x)\big)\,\mathrm{d}x$$

$$V = \pi \int_a^b \big(f^2(x) - g^2(x)\big)\,\mathrm{d}x$$

$$S = \int_0^1 e^x - e^{-x}\,\mathrm{d}x = \left[e^x + e^{-x}\right]_0^1 = e^1 + e^{-1} - \left[e^0 + e^0\right]$$

Vypočítáme určitý integrál pomocí Newtonovy–Leignizovy formule. Dosadíme tedy meze.

$y = e^x$, $y = e^{-x}$, $x \in [0, 1]$, $S = ?$, $V = ?$.



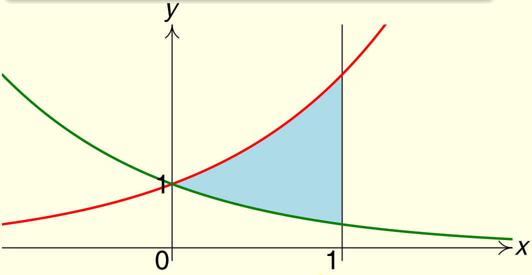
$$S = \int_a^b \Big(f(x) - g(x)\Big)\,\mathrm{d}x$$

$$V = \pi \int_a^b \Big(f^2(x) - g^2(x)\Big)\,\mathrm{d}x$$

$$S = \int_0^1 e^x - e^{-x}\,\mathrm{d}x = \left[e^x + e^{-x}\right]_0^1 = e^1 + e^{-1} - \left[e^0 + e^0\right] = e + \frac{1}{e} - 2$$

Dopočítáme numericky.

$y = e^x$, $y = e^{-x}$, $x \in [0, 1]$, $S = ?$, $V = ?$.



$$S = \int_a^b \Big(f(x) - g(x)\Big)\,\mathrm{d}x$$

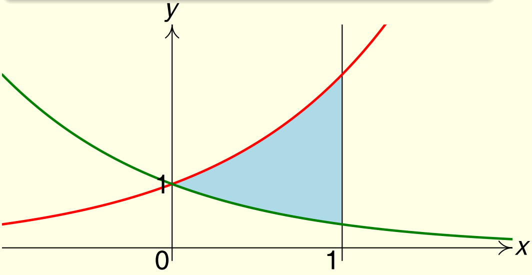
$$V = \pi \int_a^b \Big(f^2(x) - g^2(x)\Big)\,\mathrm{d}x$$

$$S = \int_0^1 e^x - e^{-x}\,\mathrm{d}x = \left[e^x + e^{-x}\right]_0^1 = e^1 + e^{-1} - \left[e^0 + e^0\right] = e + \frac{1}{e} - 2$$

$$V = \pi \int_0^1 (e^x)^2 - (e^{-x})^2\,\mathrm{d}x$$

Vyjádříme objem tělesa jako určitý integrál.

$y = e^x$, $y = e^{-x}$, $x \in [0, 1]$, $S = ?$, $V = ?$.



$$S = \int_a^b \Big(f(x) - g(x)\Big)\,\mathrm{d}x$$

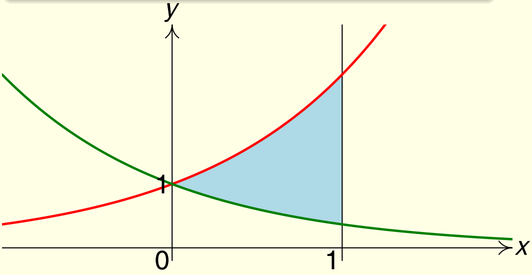
$$V = \pi \int_a^b \Big(f^2(x) - g^2(x)\Big)\,\mathrm{d}x$$

$$S = \int_0^1 e^x - e^{-x}\,\mathrm{d}x = \left[e^x + e^{-x}\right]_0^1 = e^1 + e^{-1} - \left[e^0 + e^0\right] = e + \frac{1}{e} - 2$$

$$V = \pi \int_0^1 (e^x)^2 - (e^{-x})^2\,\mathrm{d}x = \pi \int_0^1 e^{2x} - e^{-2x}\,\mathrm{d}x$$

Upravíme, abychom mohli použít vzorec.

$y = e^x$, $y = e^{-x}$, $x \in [0, 1]$, $S = ?$, $V = ?$.



$$S = \int_a^b \Big(f(x) - g(x)\Big)\,\mathrm{d}x$$

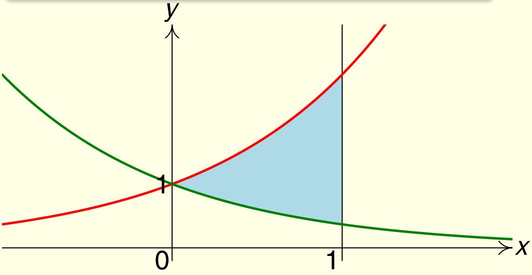
$$V = \pi \int_a^b \Big(f^2(x) - g^2(x)\Big)\,\mathrm{d}x$$

$$S = \int_0^1 e^x - e^{-x}\,\mathrm{d}x = \left[e^x + e^{-x}\right]_0^1 = e^1 + e^{-1} - \left[e^0 + e^0\right] = e + \frac{1}{e} - 2$$

$$V = \pi \int_0^1 (e^x)^2 - (e^{-x})^2\,\mathrm{d}x = \pi \int_0^1 e^{2x} - e^{-2x}\,\mathrm{d}x = \pi \left[\frac{1}{2}e^{2x} + \frac{1}{2}e^{-2x}\right]_0^1$$

Vypočteme neurčitý integrál.

$y = e^x$, $y = e^{-x}$, $x \in [0, 1]$, $S = ?$, $V = ?$.



$$S = \int_a^b \Big(f(x) - g(x)\Big)\,\mathrm{d}x$$

$$V = \pi \int_a^b \Big(f^2(x) - g^2(x)\Big)\,\mathrm{d}x$$

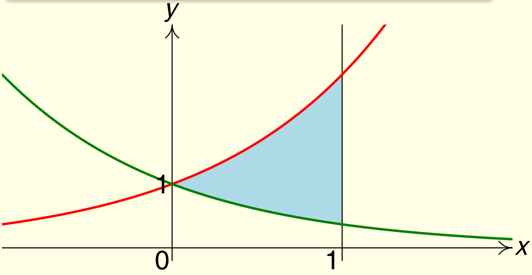
$$S = \int_0^1 e^x - e^{-x}\,\mathrm{d}x = \left[e^x + e^{-x}\right]_0^1 = e^1 + e^{-1} - \left[e^0 + e^0\right] = e + \frac{1}{e} - 2$$

$$V = \pi \int_0^1 (e^x)^2 - (e^{-x})^2\,\mathrm{d}x = \pi \int_0^1 e^{2x} - e^{-2x}\,\mathrm{d}x = \pi \left[\frac{1}{2}e^{2x} + \frac{1}{2}e^{-2x}\right]_0^1$$

$$= \pi \left[\frac{1}{2}e^2 + \frac{1}{2}e^{-2} - \left(\frac{1}{2}e^0 + \frac{1}{2}e^0\right)\right]$$

Použijeme Newtonovu–Leibnizovu formuli. Dosadíme tedy meze.

$y = e^x$, $y = e^{-x}$, $x \in [0,1]$, $S = ?$, $V = ?$.



$$S = \int_a^b \left(f(x) - g(x)\right) \mathrm{d}x$$

$$V = \pi \int_a^b \left(f^2(x) - g^2(x)\right) \mathrm{d}x$$

$$S = \int_0^1 e^x - e^{-x} \,\mathrm{d}x = \left[e^x + e^{-x}\right]_0^1 = e^1 + e^{-1} - \left[e^0 + e^0\right] = e + \frac{1}{e} - 2$$

$$V = \pi \int_0^1 (e^x)^2 - (e^{-x})^2 \,\mathrm{d}x = \pi \int_0^1 e^{2x} - e^{-2x} \,\mathrm{d}x = \pi \left[\frac{1}{2}e^{2x} + \frac{1}{2}e^{-2x}\right]_0^1$$

$$= \pi \left[\frac{1}{2}e^2 + \frac{1}{2}e^{-2} - \left(\frac{1}{2}e^0 + \frac{1}{2}e^0\right)\right] = \pi \left[\frac{1}{2}e^2 + \frac{1}{2e^2} - 1\right]$$

Upravíme.

Určete objem tělesa, vzniklého rotací množiny pod grafem funkce $y = e^{\sqrt{x}}$ pro $x \in [0, 1]$ okolo osy x.

$V = ?,\ x \in [0,1],\ y = e^{\sqrt{x}}$

$$y(0) = e^{\sqrt{0}} = e^0 = 1$$

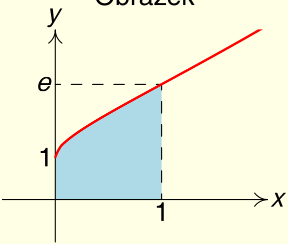
$$y(1) = e^{\sqrt{1}} = e^1 \approx 2.72$$

$$y' = \frac{1}{2} \cdot \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} \geq 0$$

$$y'' = \frac{1}{2} \cdot \frac{e^{\sqrt{x}} \frac{1}{2\sqrt{x}} \sqrt{x} - e^{\sqrt{x}} \frac{1}{2\sqrt{x}}}{x}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot e^{\sqrt{x}} \cdot \frac{\sqrt{x} - 1}{x\sqrt{x}}$$

Obrázek



- Odhadneme průběh funkce $y = e^{\sqrt{x}}$.
- Doma si spočíteje obsah tohoto obrazce (postup je podobný jako postup uvedený níže, výsledek je $S = 2$).

$V = ?,\ x \in [0,1],\ y = e^{\sqrt{x}}$

$$V = \pi \int_0^1 \left(e^{\sqrt{x}}\right)^2 \mathrm{d}x$$

Užijeme vzorec pro objem.

$$V = ?,\ x \in [0,1],\ y = e^{\sqrt{x}}$$

$$V = \pi \int_0^1 \left(e^{\sqrt{x}}\right)^2 \mathrm{d}x$$

$$\int \left(e^{\sqrt{x}}\right)^2 \mathrm{d}x$$

Vypočítáme bokem neurčitý integrál.

$V=?,\ x\in[0,1],\ y=e^{\sqrt{x}}$

$$V=\pi\int_0^1\left(e^{\sqrt{x}}\right)^2\,\mathrm{d}x$$

$$\int\left(e^{\sqrt{x}}\right)^2\,\mathrm{d}x=\int e^{2\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$$

Upravíme funkci.

$V = ?,\ x \in [0,1],\ y = e^{\sqrt{x}}$

$$V = \pi \int_0^1 \left(e^{\sqrt{x}}\right)^2 \mathrm{d}x$$

$$\int \left(e^{\sqrt{x}}\right)^2 \mathrm{d}x = \int e^{2\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$$

$$\boxed{\begin{aligned} 2\sqrt{x} &= t \\ 4x &= t^2 \\ 4\,\mathrm{d}x &= 2t\,\mathrm{d}t \\ \mathrm{d}x &= \frac{1}{2}t\,\mathrm{d}t \end{aligned}}$$

Použijeme substituci.

$$V = ?,\ x \in [0,1],\ y = e^{\sqrt{x}}$$

$$V = \pi \int_0^1 \left(e^{\sqrt{x}}\right)^2 \mathrm{d}x$$

$$\int \left(e^{\sqrt{x}}\right)^2 \mathrm{d}x = \int e^{2\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x \quad \boxed{\begin{aligned} 2\sqrt{x} &= t \\ 4x &= t^2 \\ 4\,\mathrm{d}x &= 2t\,\mathrm{d}t \\ \mathrm{d}x &= \frac{1}{2}t\,\mathrm{d}t \end{aligned}} \quad = \frac{1}{2}\int t \cdot e^t\,\mathrm{d}t$$

Použijeme substituci.

$$\boxed{V=?,\ x\in[0,1],\ y=e^{\sqrt{x}}}$$

$$V=\pi\int_0^1\left(e^{\sqrt{x}}\right)^2\,\mathrm{d}x$$

$$\int\left(e^{\sqrt{x}}\right)^2\mathrm{d}x=\int e^{2\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x\ \boxed{\begin{aligned}2\sqrt{x}&=t\\4x&=t^2\\4\,\mathrm{d}x&=2t\,\mathrm{d}t\\\mathrm{d}x&=\frac{1}{2}t\,\mathrm{d}t\end{aligned}}=\frac{1}{2}\int t\cdot e^t\,\mathrm{d}t$$

$$\boxed{\begin{matrix}u=t & u'=1\\ v'=e^t & v=e^t\end{matrix}}=\frac{1}{2}\left(t\cdot e^t-\int 1\cdot e^t\,\mathrm{d}t\right)$$

Použijeme metodu per-partés

$$\int u\cdot v'\,\mathrm{d}x=u\cdot v-\int u'\cdot v\,\mathrm{d}x$$

$V = ?,\ x \in [0,1],\ y = e^{\sqrt{x}}$

$$V = \pi \int_0^1 \left(e^{\sqrt{x}}\right)^2 \mathrm{d}x$$

$$\int \left(e^{\sqrt{x}}\right)^2 \mathrm{d}x = \int e^{2\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x \; \boxed{\begin{aligned} 2\sqrt{x} &= t \\ 4x &= t^2 \\ 4\,\mathrm{d}x &= 2t\,\mathrm{d}t \\ \mathrm{d}x &= \frac{1}{2}t\,\mathrm{d}t \end{aligned}} = \frac{1}{2}\int t\cdot e^t\,\mathrm{d}t$$

$$\boxed{\begin{matrix} u = t & u' = 1 \\ v' = e^t & v = e^t \end{matrix}} = \frac{1}{2}\left(t\cdot e^t - \int 1\cdot e^t\,\mathrm{d}t\right) = \frac{1}{2}\left(te^t - e^t\right)$$

Dokončíme integraci.

$$\boxed{V = ?,\ x \in [0,1],\ y = e^{\sqrt{x}}}$$

$$V = \pi \int_0^1 \left(e^{\sqrt{x}}\right)^2 \mathrm{d}x$$

$$\int \left(e^{\sqrt{x}}\right)^2 \mathrm{d}x = \int e^{2\sqrt{x}} \mathrm{d}x \boxed{\begin{aligned} 2\sqrt{x} &= t \\ 4x &= t^2 \\ 4\,\mathrm{d}x &= 2t\,\mathrm{d}t \\ \mathrm{d}x &= \frac{1}{2} t\,\mathrm{d}t \end{aligned}} = \frac{1}{2} \int t \cdot e^t \,\mathrm{d}t$$

$$\boxed{\begin{matrix} u = t & u' = 1 \\ v' = e^t & v = e^t \end{matrix}} = \frac{1}{2}\left(t \cdot e^t - \int 1 \cdot e^t \,\mathrm{d}t\right) = \frac{1}{2}\left(te^t - e^t\right)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot e^t \cdot (t-1)$$

Vytkneme

$$\boxed{V=?,\ x\in[0,1],\ y=e^{\sqrt{x}}}$$

$$V=\pi\int_0^1\left(e^{\sqrt{x}}\right)^2\,\mathrm{d}x$$

$$\int\left(e^{\sqrt{x}}\right)^2\,\mathrm{d}x=\int e^{2\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x\ \boxed{\begin{aligned}2\sqrt{x}&=t\\4x&=t^2\\4\,\mathrm{d}x&=2t\,\mathrm{d}t\\\mathrm{d}x&=\frac{1}{2}t\,\mathrm{d}t\end{aligned}}=\frac{1}{2}\int t\cdot e^t\,\mathrm{d}t$$

$$\boxed{\begin{matrix}u=t & u'=1\\ v'=e^t & v=e^t\end{matrix}}=\frac{1}{2}\left(t\cdot e^t-\int 1\cdot e^t\,\mathrm{d}t\right)=\frac{1}{2}\left(te^t-e^t\right)$$

$$=\frac{1}{2}\cdot e^t\cdot(t-1)=\frac{1}{2}\cdot e^{2\sqrt{x}}\cdot\left(2\sqrt{x}-1\right)$$

Použijeme zpětnou substituci pro návrat k proměnné x. Integrační konstanta může být libovolná, volíme ji například nulovou.

$V = ?,\ x \in [0, 1],\ y = e^{\sqrt{x}}$

$$V = \pi \int_0^1 \left(e^{\sqrt{x}}\right)^2 \mathrm{d}x$$

$$\int \left(e^{\sqrt{x}}\right)^2 \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \cdot e^{2\sqrt{x}} \cdot (2\sqrt{x} - 1)$$

$$V = \pi \left[\frac{1}{2} e^{2\sqrt{x}} (2\sqrt{x} - 1)\right]_0^1$$

$$= \pi \left[\frac{1}{2} e^{2} (2 - 1) - \frac{1}{2} e^{0} (0 - 1)\right]$$

Použijeme Newtonovu–Leibnizovu větu.

$$V = ?,\ x \in [0,1],\ y = e^{\sqrt{x}}$$

$$V = \pi \int_0^1 \left(e^{\sqrt{x}}\right)^2 \mathrm{d}x$$

$$\int \left(e^{\sqrt{x}}\right)^2 \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \cdot e^{2\sqrt{x}} \cdot (2\sqrt{x} - 1)$$

$$\begin{aligned} V &= \pi \left[\frac{1}{2} e^{2\sqrt{x}} (2\sqrt{x} - 1)\right]_0^1 \\ &= \pi \left[\frac{1}{2} e^2 (2-1) - \frac{1}{2} e^0 (0-1)\right] \\ &= \pi \left[\frac{e^2}{2} + \frac{1}{2}\right] \\ &= \pi \frac{e^2 + 1}{2} \end{aligned}$$

KONEC