

Celočíselné kořeny a metoda půlení intervalu.

Robert Mařík

9. května 2008

Obsah

Celočíselné kořeny	2
Metoda půlení intervalu	15

Řešte v oboru celých čísel $x^5 + x^4 - 5x^3 - 9x^2 - 24x - 36 = 0$.

Řešte v oboru celých čísel $x^5 + x^4 - 5x^3 - 9x^2 - 24x - 36 = 0$.

Dělitelé čísla 36 jsou $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 9, \pm 12, \pm 18$ a ± 36 .

Vypíšeme dělitele čísla 36 (i záporné).

Řešte v oboru celých čísel $x^5 + x^4 - 5x^3 - 9x^2 - 24x - 36 = 0$.

Dělitelé čísla 36 jsou $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 9, \pm 12, \pm 18$ a ± 36 .

1 1 -5 -9 -24 -36

Budeme počítat hodnoty pomocí Hornerova schematu. Připravíme si proto koeficienty polynomu z levé strany rovnice do tabulky.

Řešte v oboru celých čísel $x^5 + x^4 - 5x^3 - 9x^2 - 24x - 36 = 0$.

Dělitelé čísla 36 jsou $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 9, \pm 12, \pm 18$ a ± 36 .

	1	1	-5	-9	-24	-36
1	1	2	-3	-12	-36	-72

Dosadíme $x = 1$. Je-li $P(x)$ polynom z pravé strany rovnice, vidíme, že $P(1) = -72$ a toto číslo $x = 1$ není kořenem.

Řešte v oboru celých čísel $x^5 + x^4 - 5x^3 - 9x^2 - 24x - 36 = 0$.

Dělitelé čísla 36 jsou $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 9, \pm 12, \pm 18$ a ± 36 .

	1	1	-5	-9	-24	-36
1	1	2	-3	-12	-36	-72
-1	1	0	-5	-4	-20	-16

Podobně ani $x = -1$ není kořenem.

Řešte v oboru celých čísel $x^5 + x^4 - 5x^3 - 9x^2 - 24x - 36 = 0$.

Dělitelé čísla 36 jsou $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 9, \pm 12, \pm 18$ a ± 36 .

	1	1	-5	-9	-24	-36
1	1	2	-3	-12	-36	-72
-1	1	0	-5	-4	-20	-16
2	1	3	1	-7	-38	$\neq 0$

Ani $x = 2$ není kořenem.

Řešte v oboru celých čísel $x^5 + x^4 - 5x^3 - 9x^2 - 24x - 36 = 0$.

Dělitelé čísla 36 jsou $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 9, \pm 12, \pm 18$ a ± 36 .

	1	1	-5	-9	-24	-36
1	1	2	-3	-12	-36	-72
-1	1	0	-5	-4	-20	-16
2	1	3	1	-7	-38	$\neq 0$
-2	1	-1	-3	-3	-18	$\parallel 0$

Nyní jsme zjistili, že $x = -2$ je kořenem. Levou stranu rovnice je tedy možno přepsat do tvaru

$$(x + 2)(x^4 - x^3 - 3x^2 - 3x - 18) = 0.$$

Dál zkoumáme jenom polynom, který stojí v tomto součinu jako druhý.

Řešte v oboru celých čísel $x^5 + x^4 - 5x^3 - 9x^2 - 24x - 36 = 0$.

Dělitelé čísla 36 jsou $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 9, \pm 12, \pm 18$ a ± 36 .

	1	1	-5	-9	-24	-36
1	1	2	-3	-12	-36	-72
-1	1	0	-5	-4	-20	-16
2	1	3	1	-7	-38	$\neq 0$
-2	1	-1	-3	-3	-18	$\parallel 0$
-2	1	-3	3	-9	$\parallel 0$	

Dosadíme opět $x = -2$. Opět je toto číslo kořenem.

Řešte v oboru celých čísel $x^5 + x^4 - 5x^3 - 9x^2 - 24x - 36 = 0$.

Dělitelé čísla 36 jsou $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 9, \pm 12, \pm 18$ a ± 36 .

	1	1	-5	-9	-24	-36
1	1	2	-3	-12	-36	-72
-1	1	0	-5	-4	-20	-16
2	1	3	1	-7	-38	$\neq 0$
-2	1	-1	-3	-3	-18	$\parallel 0$
-2	1	-3	3	-9	$\parallel 0$	
-2	1	-5	13	-35		

- Dosadíme opět $x = -2$. Nyní již se o kořen nejedná.
- Protože na konci polynomu, do kterého nyní dosazujeme, stojí číslo 9, zajímáme se jen o dělitele tohoto čísla.

Řešte v oboru celých čísel $x^5 + x^4 - 5x^3 - 9x^2 - 24x - 36 = 0$.

Dělitelé čísla 36 jsou $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 9, \pm 12, \pm 18$ a ± 36 .

	1	1	-5	-9	-24	-36
1	1	2	-3	-12	-36	-72
-1	1	0	-5	-4	-20	-16
2	1	3	1	-7	-38	$\neq 0$
-2	1	-1	-3	-3	-18	$\parallel 0$
-2	1	-3	3	-9	$\parallel 0$	
-2	1	-5	13	-35		
3	1	0	3	$\parallel 0$		

- Vyškrtneme čísla která nedělí číslo 9 a dosazujeme další na řadě, $x = 3$.
- Vidíme, že $x = 3$ je kořenem.

Řešte v oboru celých čísel $x^5 + x^4 - 5x^3 - 9x^2 - 24x - 36 = 0$.

Dělitelé čísla 36 jsou $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 9, \pm 12, \pm 18$ a ± 36 .

	1	1	-5	-9	-24	-36
1	1	2	-3	-12	-36	-72
-1	1	0	-5	-4	-20	-16
2	1	3	1	-7	-38	$\neq 0$
-2	1	-1	-3	-3	-18	0
-2	1	-3	3	-9	0	
-2	1	-5	13	-35		
3	1	0	3	0		
-3	1	-3	12			

Dál se zabýváme jenom děliteli posledního koeficientu — čísla 3. Navíc posloupnost koeficientů polynomu nemá žádnou znaménkovou změnu a podle Descartovy věty polynom nemá kladný kořen. Zbývá tedy již jen číslo $x = -3$, které není kořenem.

Řešte v oboru celých čísel $x^5 + x^4 - 5x^3 - 9x^2 - 24x - 36 = 0$.

Dělitelé čísla 36 jsou $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 9, \pm 12, \pm 18$ a ± 36 .

	1	1	-5	-9	-24	-36
1	1	2	-3	-12	-36	-72
-1	1	0	-5	-4	-20	-16
2	1	3	1	-7	-38	$\neq 0$
-2	1	-1	-3	-3	-18	$\parallel 0$
-2	1	-3	3	-9	$\parallel 0$	
-2	1	-5	13	-35		
3	1	0	3	$\parallel 0$		
-3	1	-3	12			

- Polynom má dvojnásobný kořen $x = -2$, jednoduchý kořen $x = 3$ a nemá žádný další celočíselný kořen.
- Polynom, který zůstal, má koeficienty $1, 0, 3$, jedná se tedy o polynom $x^2 + 0x + 3$.

Řešte v oboru celých čísel $x^5 + x^4 - 5x^3 - 9x^2 - 24x - 36 = 0$.

Dělitelé čísla 36 jsou $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 9, \pm 12, \pm 18$ a ± 36 .

	1	1	-5	-9	-24	-36
1	1	2	-3	-12	-36	-72
-1	1	0	-5	-4	-20	-16
2	1	3	1	-7	-38	$\neq 0$
-2	1	-1	-3	-3	-18	0
-2	1	-3	3	-9	0	
-2	1	-5	13	-35		
3	1	0	3	0		
-3	1	-3	12			

Rozklad na součin je $(x + 2)^2(x - 3)(x^2 + 3) = 0$.

Řešte rovnici $P(x) = x^3 + x - 1 = 0$ s chybou nejvýše 0.03.

Řešte rovnici $P(x) = x^3 + x - 1 = 0$ s chybou nejvýše 0.03.

Všechna řešení jsou v intervalu $(-2, 2)$.

- Všechny koeficienty jsou plus nebo minus jedna.
- Největší koeficient (v absolutní hodnotě) je tedy také jedna.
- Všechny kořeny splňují odhad

$$|x_i| < 1 + \frac{1}{1} = 2.$$

Řešte rovnici $P(x) = x^3 + x - 1 = 0$ s chybou nejvýše 0.03.

Všechna řešení jsou v intervalu $(-2, 2)$.

+ + -, jeden kladný kořen

- Napíšeme posloupnost znamének.
- Je zde jedna znaménková změna.
- Rovnice má tedy jeden kladný kořen.

Řešte rovnici $P(x) = x^3 + x - 1 = 0$ s chybou nejvýše 0.03.

Všechna řešení jsou v intervalu $(-2, 2)$.

+ + -, jeden kladný kořen

$$P(-x) = (-x)^3 + (-x) + 1 = -x^3 - x + 1$$

- Hledejme počet záporných kořenů.
- Nalezneme pomocný polynom $P(-x)$ a určíme počet znaménkových změn.

Řešte rovnici $P(x) = x^3 + x - 1 = 0$ s chybou nejvýše 0.03.

Všechna řešení jsou v intervalu $(-2, 2)$.

+ + -, jeden kladný kořen

$$P(-x) = (-x)^3 + (-x) + 1 = -x^3 - x - 1$$

- - -, není záporný kořen

Znaménková změna není žádná a polynom tedy nemá záporný kořen.

Řešte rovnici $P(x) = x^3 + x - 1 = 0$ s chybou nejvýše 0.03.

Všechna řešení jsou v intervalu $(-2, 2)$.

+ + -, jeden kladný kořen

$$P(-x) = (-x)^3 + (-x) + 1 = -x^3 - x + 1$$

- - -, není záporný kořen

$$P(0) = -1;$$

$$P(1) = 1 + 1 - 1 = 1;$$

$$P(2) = 8 + 2 - 1 = 9;$$

- Kořen je v intervalu $(0, 2)$.
- Výpočtem funkčních hodnot polynomu v celých číslech kořen můžeme lokalizovat do intervalu délky 1.

Řešte rovnici $P(x) = x^3 + x - 1 = 0$ s chybou nejvýše 0.03.

Všechna řešení jsou v intervalu $(-2, 2)$.

+ + -, jeden kladný kořen

$$P(-x) = (-x)^3 + (-x) + 1 = -x^3 - x + 1$$

- - -, není záporný kořen

$$P(0) = -1;$$

$$P(1) = 1 + 1 - 1 = 1;$$

$$P(2) = 8 + 2 - 1 = 9; \text{ Kořen je v intervalu } (0, 1)$$

- Lokalizovali jsme kořen.
- Nyní tuto lokalizaci zpřesníme na požadovanou přesnost. (Stávající přesnost je 0.5.)

Řešte rovnici $P(x) = x^3 + x - 1 = 0$ s chybou nejvýše 0.03.

Kořen je v intervalu $(0, 1)$

a	$c = \frac{a+b}{2}$	b	$P(a)$	$P(c)$	$P(b)$	$\varepsilon = \frac{b-a}{2}$
0		1	-		+	

- Sestavíme tabulku a zapíšeme do ní dosažený odhad kořene.
- U funkčních hodnot stačí zapisovat znaménka.

Řešte rovnici $P(x) = x^3 + x - 1 = 0$ s chybou nejvýše 0.03.

Kořen je v intervalu $(0, 1)$

a	$c = \frac{a+b}{2}$	b	$P(a)$	$P(c)$	$P(b)$	$\varepsilon = \frac{b-a}{2}$
0	0.5	1	-		+	

Vypočteme polovinu intervalu $[a, b]$.

Řešte rovnici $P(x) = x^3 + x - 1 = 0$ s chybou nejvýše 0.03.

Kořen je v intervalu $(0, 1)$

a	$c = \frac{a+b}{2}$	b	$P(a)$	$P(c)$	$P(b)$	$\varepsilon = \frac{b-a}{2}$
0	0.5	1	-	-0.37	+	

$$(0.5)^3 + 0.5 - 1 = -0.375$$

Vypočteme funkční hodnotu v polovině intervalu.

Řešte rovnici $P(x) = x^3 + x - 1 = 0$ s chybou nejvýše 0.03.

Kořen je v intervalu $(0, 1)$

a	$c = \frac{a+b}{2}$	b	$P(a)$	$P(c)$	$P(b)$	$\varepsilon = \frac{b-a}{2}$
0	0.5	1	-	-0.37	+	
0.5		1	-		+	

- Hledáme tu polovinu intervalu, ve které dochází ke znaménkové změně (červeně vyznačeno).
- Kraje této poloviny budou novou aproximací kořene.

Řešte rovnici $P(x) = x^3 + x - 1 = 0$ s chybou nejvýše 0.03.

Kořen je v intervalu $(0, 1)$

a	$c = \frac{a+b}{2}$	b	$P(a)$	$P(c)$	$P(b)$	$\varepsilon = \frac{b-a}{2}$
0	0.5	1	-	-0.37	+	
0.5	0.75	1	-		+	

Opět rozpůlíme interval. Číslo v polovině intervalu je kořenem s přesností

$$\varepsilon = \frac{1 - 0.5}{2} = 0.25,$$

což je více, než potřebujeme.

Řešte rovnici $P(x) = x^3 + x - 1 = 0$ s chybou nejvýše 0.03.

Kořen je v intervalu $(0, 1)$

a	$c = \frac{a+b}{2}$	b	$P(a)$	$P(c)$	$P(b)$	$\varepsilon = \frac{b-a}{2}$
0	0.5	1	-	-0.37	+	
0.5	0.75	1	-	+0.17	+	

$$(0.75)^3 + 0.75 - 1 = 0.171875$$

Vypočteme funkční hodnotu v polovině intervalu.

Řešte rovnici $P(x) = x^3 + x - 1 = 0$ s chybou nejvýše 0.03.

Kořen je v intervalu $(0, 1)$

a	$c = \frac{a+b}{2}$	b	$P(a)$	$P(c)$	$P(b)$	$\varepsilon = \frac{b-a}{2}$
0	0.5	1	-	-0.37	+	
0.5	0.75	1	-	+0.17	+	
0.5		0.75	-		+	

- Hledáme tu polovinu intervalu, ve které dochází ke znaménkové změně (červeně vyznačeno).
- Kraje této poloviny budou novou aproximací kořene.

Řešte rovnici $P(x) = x^3 + x - 1 = 0$ s chybou nejvýše 0.03.

Kořen je v intervalu $(0, 1)$

a	$c = \frac{a+b}{2}$	b	$P(a)$	$P(c)$	$P(b)$	$\varepsilon = \frac{b-a}{2}$
0	0.5	1	-	-0.37	+	
0.5	0.75	1	-	+0.17	+	
0.5	0.625	0.75	-		+	

Opět rozpůlíme interval.

Řešte rovnici $P(x) = x^3 + x - 1 = 0$ s chybou nejvýše 0.03.

Kořen je v intervalu $(0, 1)$

a	$c = \frac{a+b}{2}$	b	$P(a)$	$P(c)$	$P(b)$	$\varepsilon = \frac{b-a}{2}$
0	0.5	1	-	-0.37	+	
0.5	0.75	1	-	+0.17	+	
0.5	0.625	0.75	-	-0.13	+	

$$(0.625)^3 + 0.625 - 1 = -0.130859$$

Vypočteme funkční hodnotu v polovině intervalu.

Řešte rovnici $P(x) = x^3 + x - 1 = 0$ s chybou nejvýše 0.03.

Kořen je v intervalu $(0, 1)$

a	$c = \frac{a+b}{2}$	b	$P(a)$	$P(c)$	$P(b)$	$\varepsilon = \frac{b-a}{2}$
0	0.5	1	-	-0.37	+	
0.5	0.75	1	-	+0.17	+	
0.5	0.625	0.75	-	-0.13	+	
0.625		0.75	-		+	

- Hledáme tu polovinu intervalu, ve které dochází ke znaménkové změně (červeně vyznačeno).
- Kraje této poloviny budou novou aproximací kořene.

Řešte rovnici $P(x) = x^3 + x - 1 = 0$ s chybou nejvýše 0.03.

Kořen je v intervalu $(0, 1)$

a	$c = \frac{a+b}{2}$	b	$P(a)$	$P(c)$	$P(b)$	$\varepsilon = \frac{b-a}{2}$
0	0.5	1	-	-0.37	+	
0.5	0.75	1	-	+0.17	+	
0.5	0.625	0.75	-	-0.13	+	
0.625		0.75	-		+	0.062

Určíme dosaženou přesnost.

Řešte rovnici $P(x) = x^3 + x - 1 = 0$ s chybou nejvýše 0.03.

Kořen je v intervalu $(0, 1)$

a	$c = \frac{a+b}{2}$	b	$P(a)$	$P(c)$	$P(b)$	$\varepsilon = \frac{b-a}{2}$
0	0.5	1	-	-0.37	+	
0.5	0.75	1	-	+0.17	+	
0.5	0.625	0.75	-	-0.13	+	
0.625	0.6875	0.75	-		+	0.062

Rozpůlíme interval.

Řešte rovnici $P(x) = x^3 + x - 1 = 0$ s chybou nejvýše 0.03.

Kořen je v intervalu $(0, 1)$

a	$c = \frac{a+b}{2}$	b	$P(a)$	$P(c)$	$P(b)$	$\varepsilon = \frac{b-a}{2}$
0	0.5	1	-	-0.37	+	
0.5	0.75	1	-	+0.17	+	
0.5	0.625	0.75	-	-0.13	+	
0.625	0.6875	0.75	-	+0.01	+	0.062

$$(0.6875)^3 + 0.6875 - 1 = 0.0124511$$

Vypočteme funkční hodnotu v polovině intervalu.

Řešte rovnici $P(x) = x^3 + x - 1 = 0$ s chybou nejvýše 0.03.

Kořen je v intervalu $(0, 1)$

a	$c = \frac{a+b}{2}$	b	$P(a)$	$P(c)$	$P(b)$	$\varepsilon = \frac{b-a}{2}$
0	0.5	1	-	-0.37	+	
0.5	0.75	1	-	+0.17	+	
0.5	0.625	0.75	-	-0.13	+	
0.625	0.6875	0.75	-	+0.01	+	0.062
0.625		0.6875	-		+	

- Hledáme tu polovinu intervalu, ve které dochází ke znaménkové změně (červeně vyznačeno).
- Kraje této poloviny budou novou aproximací kořene.

Řešte rovnici $P(x) = x^3 + x - 1 = 0$ s chybou nejvýše 0.03.

Kořen je v intervalu $(0, 1)$

a	$c = \frac{a+b}{2}$	b	$P(a)$	$P(c)$	$P(b)$	$\varepsilon = \frac{b-a}{2}$
0	0.5	1	-	-0.37	+	
0.5	0.75	1	-	+0.17	+	
0.5	0.625	0.75	-	-0.13	+	
0.625	0.6875	0.75	-	+0.01	+	0.062
0.625	0.6563	0.6875	-		+	0.0312

Určíme polovinu intervalu a dosaženou přesnost.

Řešte rovnici $P(x) = x^3 + x - 1 = 0$ s chybou nejvýše 0.03.

Kořen je v intervalu $(0, 1)$

a	$c = \frac{a+b}{2}$	b	$P(a)$	$P(c)$	$P(b)$	$\varepsilon = \frac{b-a}{2}$
0	0.5	1	-	-0.37	+	
0.5	0.75	1	-	+0.17	+	
0.5	0.625	0.75	-	-0.13	+	
0.625	0.6875	0.75	-	+0.01	+	0.062
0.625	0.6563	0.6875	-	-0.06	+	0.0312

Vypočteme funkční hodnotu v polovině intervalu.

Řešte rovnici $P(x) = x^3 + x - 1 = 0$ s chybou nejvýše 0.03.

Kořen je v intervalu $(0, 1)$

a	$c = \frac{a+b}{2}$	b	$P(a)$	$P(c)$	$P(b)$	$\varepsilon = \frac{b-a}{2}$
0	0.5	1	-	-0.37	+	
0.5	0.75	1	-	+0.17	+	
0.5	0.625	0.75	-	-0.13	+	
0.625	0.6875	0.75	-	+0.01	+	0.062
0.625	0.6563	0.6875	-	-0.06	+	0.0312
0.6563		0.6875				

- Hledáme tu polovinu intervalu, ve které dochází ke znaménkové změně (červeně vyznačeno).
- Kraje této poloviny budou novou aproximací kořene.

Řešte rovnici $P(x) = x^3 + x - 1 = 0$ s chybou nejvýše 0.03.

Kořen je v intervalu $(0, 1)$

a	$c = \frac{a+b}{2}$	b	$P(a)$	$P(c)$	$P(b)$	$\varepsilon = \frac{b-a}{2}$
0	0.5	1	-	-0.37	+	
0.5	0.75	1	-	+0.17	+	
0.5	0.625	0.75	-	-0.13	+	
0.625	0.6875	0.75	-	+0.01	+	0.062
0.625	0.6563	0.6875	-	-0.06	+	0.0312
0.6563	0.6719	0.6875				0.0156

- Přesnost je nyní dostatečná.
- Stačí již jen rozpůlit interval.

Řešte rovnici $P(x) = x^3 + x - 1 = 0$ s chybou nejvýše 0.03.

Kořen je v intervalu $(0, 1)$

a	$c = \frac{a+b}{2}$	b	$P(a)$	$P(c)$	$P(b)$	$\varepsilon = \frac{b-a}{2}$
0	0.5	1	-	-0.37	+	
0.5	0.75	1	-	+0.17	+	
0.5	0.625	0.75	-	-0.13	+	
0.625	0.6875	0.75	-	+0.01	+	0.062
0.625	0.6563	0.6875	-	-0.06	+	0.0312
0.6563	0.6719	0.6875				0.0156

Kořen je $x = 0.67 \pm 0.02$. Leží tedy uvnitř intervalu $(0.65, 0.69)$.

- Chybu zokrouhlíme nahoru (vždy nahoru) na jednu platnou číslici a odhad kořene na stejný počet desetinných míst.
- Zkontrolujeme, že i po zaokrouhlení jsou poslední hodnoty odhadů a a b uvnitř intervalu, ve kterém deklarujeme existenci kořene.