Celočíselné kořeny a metoda půlení intervalu.

Robert Mařík

9. května 2008

Obsah

Řešte v oboru celých čísel $x^5 + x^4 - 5x^3 - 9x^2 - 24x - 36 = 0.$

Řešte v oboru celých čísel $x^5 + x^4 - 5x^3 - 9x^2 - 24x - 36 = 0$.

Dělitelé čísla 36 jsou ± 1, ± 2, ± 3, ± 4, ± 6, ± 9, ± 12, ± 18 a ± 36.

Vypíšeme dělitele čísla 36 (i záporné).

Řešte v oboru celých čísel $x^5 + x^4 - 5x^3 - 9x^2 - 24x - 36 = 0.$

Dělitelé čísla 36 jsou ±1, ±2, ±3, ±4, ±6, ±9, ±12, ±18 a ±36.

1	1	-5	-9	-24	-36

Budeme počítat hodnoty pomocí Hornerova schematu. Připravíme si proto koeficienty polynomu z levé strany rovnice do tabulky.

Řešte v oboru celých čísel $x^5 + x^4 - 5x^3 - 9x^2 - 24x - 36 = 0.$

Dělitelé čísla 36 jsou ± 1, ± 2, ± 3, ± 4, ± 6, ± 9, ± 12, ± 18 a ± 36.

$$\begin{array}{c|cccccc} & 1 & 1 & -5 & -9 & -24 & -36 \\ \hline 1 & 1 & 2 & -3 & -12 & -36 & -72 \end{array}$$

Dosadíme $x = 1$. Je-li $P(x)$ polynom z pravé strany rovnice, vidíme, že $P(1) = -72$ a toto číslo $x = 1$ není kořenem.

Řešte v oboru celých čísel $x^5 + x^4 - 5x^3 - 9x^2 - 24x - 36 = 0.$

Dělitelé čísla 36 jsou ± 1, ± 2, ± 3, ± 4, ± 6, ± 9, ± 12, ± 18 a ± 36.

	1	1	−5	−9	−24	−36
1	1	2	−3	−12	−36	−72
−1	1	0	−5	−4	−20	−16

Podobně ani $x = -1$ není kořenem.

Řešte v oboru celých čísel $x^5 + x^4 - 5x^3 - 9x^2 - 24x - 36 = 0.$

Dělitelé čísla 36 jsou ± 1, ± 2, ± 3, ± 4, ± 6, ± 9, ± 12, ± 18 a ± 36.

	1	1	−5	−9	−24	−36
1	1	2	−3	−12	−36	−72
−1	1	0	−5	−4	−20	−16
2	1	3	1	−7	−38	$\neq 0$

Ani $x = 2$ není kořenem.

Řešte v oboru celých čísel $x^5 + x^4 - 5x^3 - 9x^2 - 24x - 36 = 0$.

Dělitelé čísla 36 jsou ± 1, ± 2, ± 3, ± 4, ± 6, ± 9, ± 12, ± 18 a ± 36.

	1	1	-5	-9	-24	-36
1	1	2	-3	-12	-36	-72
-1	1	0	-5	-4	-20	-16
2	1	3	1	-7	-38	$\neq 0$
$\boxed{-2}$	1	-1	-3	-3	-18	$\Vert\ 0$

Nyní jsme zjistili, že $x = -2$ je kořenem. Levou stranu rovnice je tedy možno přepsat do tvaru

$$(x+2)(x^4 - x^3 - 3x^2 - 3x - 18) = 0.$$

Dál zkoumáme jenom polynom, který stojí v tomto součinu jako druhý.

Řešte v oboru celých čísel $x^5 + x^4 - 5x^3 - 9x^2 - 24x - 36 = 0.$

Dělitelé čísla 36 jsou ± 1, ± 2, ± 3, ± 4, ± 6, ± 9, ± 12, ± 18 a ± 36.

	1	1	-5	-9	-24	-36
1	1	2	-3	-12	-36	-72
-1	1	0	-5	-4	-20	-16
2	1	3	1	-7	-38	$\neq 0$
$\boxed{-2}$	1	-1	-3	-3	-18	$\parallel 0$
$\boxed{-2}$	1	-3	3	-9	$\parallel 0$	

Dosadíme opět $x = -2$. Opět je toto číslo kořenem.

Řešte v oboru celých čísel $x^5 + x^4 - 5x^3 - 9x^2 - 24x - 36 = 0.$

Dělitelé čísla 36 jsou ± 1, ± 2, ± 3, ± 4, ± 6, ± 9, ± 12, ± 18 a ± 36.

	1	1	−5	−9	−24	−36
1	1	2	−3	−12	−36	−72
−1	1	0	−5	−4	−20	−16
2	1	3	1	−7	−38	$\neq 0$
$\boxed{-2}$	1	−1	−3	−3	−18	$\Vert\ 0$
$\boxed{-2}$	1	−3	3	−9	$\Vert\ 0$	
−2	1	−5	13	−35		

- Dosadíme opět $x = -2$. Nyní již se o kořen nejedná.
- Protože na konci polynomu, do kterého nyní dosazujeme, stojí číslo 9, zajímáme se jen o dělitele tohoto čísla.

Řešte v oboru celých čísel $x^5 + x^4 - 5x^3 - 9x^2 - 24x - 36 = 0.$

Dělitelé čísla 36 jsou ±1, ±2, ±3, ±4, ±6, ±9, ±12, ±18 a ±36.

	1	1	-5	-9	-24	-36
1	1	2	-3	-12	-36	-72
-1	1	0	-5	-4	-20	-16
2	1	3	1	-7	-38	$\neq 0$
$\boxed{-2}$	1	-1	-3	-3	-18	$\Vert\ 0$
$\boxed{-2}$	1	-3	3	-9	$\Vert\ 0$	
-2	1	-5	13	-35		
$\boxed{3}$	1	0	3	$\Vert\ 0$		

- Vyškrtneme čísla která nedělí číslo 9 a dosazujeme další na řadě, $x = 3.$
- Vidíme, že $x = 3$ je kořenem.

Řešte v oboru celých čísel $x^5 + x^4 - 5x^3 - 9x^2 - 24x - 36 = 0.$

Dělitelé čísla 36 jsou ± 1, ± 2, ± 3, ± 4, ± 6, ± 9, ± 12, ± 18 a ± 36.

	1	1	-5	-9	-24	-36
1	1	2	-3	-12	-36	-72
-1	1	0	-5	-4	-20	-16
2	1	3	1	-7	-38	$\neq 0$
$\boxed{-2}$	1	-1	-3	-3	-18	$\parallel 0$
$\boxed{-2}$	1	-3	3	-9	$\parallel 0$	
-2	1	-5	13	-35		
$\boxed{3}$	1	0	3	$\parallel 0$		
-3	1	-3	12			

Dál se zabýváme jenom děliteli posledního koeficientu — čísla 3. Navíc posloupnost koeficientů polynomu nemá žádnou znaménkovou změnu a podle Descartovy věty polynom nemá kladný kořen. Zbývá tedy již jen číslo $x = -3$, které není kořenem.

Řešte v oboru celých čísel $x^5 + x^4 - 5x^3 - 9x^2 - 24x - 36 = 0.$

Dělitelé čísla 36 jsou ±1, ±2, ±3, ±4, ±6, ±9, ±12, ±18 a ±36.

	1	1	-5	-9	-24	-36
1	1	2	-3	-12	-36	-72
-1	1	0	-5	-4	-20	-16
2	1	3	1	-7	-38	$\neq 0$
$\boxed{-2}$	1	-1	-3	-3	-18	$\parallel 0$
$\boxed{-2}$	1	-3	3	-9	$\parallel 0$	
-2	1	-5	13	-35		
$\boxed{3}$	1	0	3	$\parallel 0$		
-3	1	-3	12			

- Polynom má dvojnásobný kořen $x = -2$, jednoduchý kořen $x = 3$ a nemá žádný další celočíselný kořen.
- Polynom, který zůstal, má koeficienty $1, 0, 3$, jedná se tedy o polynom $x^2 + 0x + 3$.

Řešte v oboru celých čísel $x^5 + x^4 - 5x^3 - 9x^2 - 24x - 36 = 0.$

Dělitelé čísla 36 jsou ± 1, ± 2, ± 3, ± 4, ± 6, ± 9, ± 12, ± 18 a ± 36.

	1	1	-5	-9	-24	-36
1	1	2	-3	-12	-36	-72
-1	1	0	-5	-4	-20	-16
2	1	3	1	-7	-38	$\neq 0$
$\boxed{-2}$	1	-1	-3	-3	-18	$\Vert\ 0$
$\boxed{-2}$	1	-3	3	-9	$\Vert\ 0$	
-2	1	-5	13	-35		
$\boxed{3}$	1	0	3	$\Vert\ 0$		
-3	1	-3	12			

Rozklad na součin je $(x+2)^2(x-3)(x^2+3) = 0.$

Řešte rovnici $P(x) = x^3 + x - 1 = 0$ s chybou nejvýše 0.03.

Řešte rovnici $P(x) = x^3 + x - 1 = 0$ s chybou nejvýše 0.03.

Všechna řešení jsou v intervalu $(-2, 2)$.

- Všechny koeficienty jsou plus nebo minus jedna.
- Největší koeficient (v absolutní hodnotě) je tedy také jedna.
- Všechny kořeny splňují odhad

$$|x_i| < 1 + \frac{1}{1} = 2.$$

Řešte rovnici $P(x) = x^3 + x - 1 = 0$ s chybou nejvýše 0.03.

Všechna řešení jsou v intervalu $(-2, 2)$.

$+ \quad + \quad -$, jeden kladný kořen

- Napíšeme posloupnost znamének.
- Je zde jedna znaménková změna.
- Rovnice má tedy jeden kladný kořen.

Řešte rovnici $P(x) = x^3 + x - 1 = 0$ s chybou nejvýše 0.03.

Všechna řešení jsou v intervalu $(-2, 2)$.
$+ \ + \ -$, jeden kladný kořen
$P(-x) = (-x)^3 + (-x) + 1 = -x^3 - x - 1$

- Hledejme počet záporných kořenů.
- Nalezneme pomocný polynom $P(-x)$ a určíme počet znaménkových změn.

Řešte rovnici $P(x) = x^3 + x - 1 = 0$ s chybou nejvýše 0.03.

Všechna řešení jsou v intervalu $(-2, 2)$.

$+ \ + \ -$, jeden kladný kořen

$P(-x) = (-x)^3 + (-x) + 1 = -x^3 - x - 1$

$- \ - \ -$, není záporný kořen

Znaménková změna není žádná a polynom tedy nemá záporný kořen.

Řešte rovnici $P(x) = x^3 + x - 1 = 0$ s chybou nejvýše 0.03.

Všechna řešení jsou v intervalu $(-2, 2)$.

$+ \ + \ -$, jeden kladný kořen

$P(-x) = (-x)^3 + (-x) + 1 = -x^3 - x - 1$

$- \ - \ -$, není záporný kořen

$P(0) = -1;$

$P(1) = 1 + 1 - 1 = 1;$

$P(2) = 8 + 2 - 1 = 9;$

- Kořen je v intervalu $(0, 2)$.
- Výpočtem funkčních hodnot polynomu v celých číslech kořen můžeme lokalizovat do intervalu délky 1.

Řešte rovnici $P(x) = x^3 + x - 1 = 0$ s chybou nejvýše 0.03.

Všechna řešení jsou v intervalu $(-2, 2)$.

$+ \ + \ -$, jeden kladný kořen

$P(-x) = (-x)^3 + (-x) + 1 = -x^3 - x - 1$

$- \ - \ -$, není záporný kořen

$P(0) = -1;$

$P(1) = 1 + 1 - 1 = 1;$

$P(2) = 8 + 2 - 1 = 9;$ Kořen je v intervalu $(0, 1)$

- Lokalizovali jsme kořen.
- Nyní tuto lokalizaci zpřesníme na požadovanou přesnost. (Stávající přesnost je 0.5.)

Řešte rovnici $P(x) = x^3 + x - 1 = 0$ s chybou nejvýše 0.03.

Kořen je v intervalu $(0, 1)$

a	$c = \dfrac{a+b}{2}$	b	$P(a)$	$P(c)$	$P(b)$	$\varepsilon = \dfrac{b-a}{2}$
0		1	$-$		$+$	

- Sestavíme tabulku a zapíšeme do ní dosažený odhad kořene.
- U funkčních hodnot stačí zapisovat znaménka.

Řešte rovnici $P(x) = x^3 + x - 1 = 0$ s chybou nejvýše 0.03.

Kořen je v intervalu $(0, 1)$

a	$c = \frac{a+b}{2}$	b	$P(a)$	$P(c)$	$P(b)$	$\varepsilon = \frac{b-a}{2}$
0	0.5	1	−		+	

Vypočteme polovinu intervalu $[a, b]$.

Řešte rovnici $P(x) = x^3 + x - 1 = 0$ s chybou nejvýše 0.03.

Kořen je v intervalu $(0, 1)$

a	$c = \frac{a+b}{2}$	b	$P(a)$	$P(c)$	$P(b)$	$\varepsilon = \frac{b-a}{2}$
0	0.5	1	$-$	-0.37	$+$	

$(0.5)^3 + 0.5 - 1 = -0.375$

Vypočteme funkční hodnotu v polovině intervalu.

Řešte rovnici $P(x) = x^3 + x - 1 = 0$ s chybou nejvýše 0.03.

Kořen je v intervalu $(0, 1)$

a	$c = \dfrac{a+b}{2}$	b	$P(a)$	$P(c)$	$P(b)$	$\varepsilon = \dfrac{b-a}{2}$
0	0.5	1	$-$	-0.37	$+$	
0.5		1	$-$		$+$	

- Hledáme tu polovinu intervalu, ve které dochází ke znaménkové změně (červeně vyznačeno).
- Kraje této poloviny budou novou aproximací kořene.

Řešte rovnici $P(x) = x^3 + x - 1 = 0$ s chybou nejvýše 0.03.

Kořen je v intervalu $(0, 1)$

a	$c = \frac{a+b}{2}$	b	$P(a)$	$P(c)$	$P(b)$	$\varepsilon = \frac{b-a}{2}$
0	0.5	1	$-$	-0.37	$+$	
0.5	0.75	1	$-$		$+$	

Opět rozpůlíme interval. Číslo v polovině intervalu je kořenem s přesností

$$\varepsilon = \frac{1 - 0.5}{2} = 0.25,$$

což je více, než potřebujeme.

Řešte rovnici $P(x) = x^3 + x - 1 = 0$ s chybou nejvýše 0.03.

Kořen je v intervalu $(0, 1)$

a	$c = \frac{a+b}{2}$	b	$P(a)$	$P(c)$	$P(b)$	$\varepsilon = \frac{b-a}{2}$
0	0.5	1	$-$	-0.37	$+$	
0.5	0.75	1	$-$	$+0.17$	$+$	

$(0.75)^3 + 0.75 - 1 = 0.171875$

Vypočteme funkční hodnotu v polovině intervalu.

Řešte rovnici $P(x) = x^3 + x - 1 = 0$ s chybou nejvýše 0.03.

Kořen je v intervalu $(0, 1)$

a	$c = \dfrac{a+b}{2}$	b	$P(a)$	$P(c)$	$P(b)$	$\varepsilon = \dfrac{b-a}{2}$
0	0.5	1	$-$	-0.37	$+$	
0.5	0.75	1	$-$	$+0.17$	$+$	
0.5		0.75	$-$		$+$	

- Hledáme tu polovinu intervalu, ve které dochází ke znaménkové změně (červeně vyznačeno).
- Kraje této poloviny budou novou aproximací kořene.

Řešte rovnici $P(x) = x^3 + x - 1 = 0$ s chybou nejvýše 0.03.

Kořen je v intervalu $(0, 1)$

a	$c = \frac{a+b}{2}$	b	$P(a)$	$P(c)$	$P(b)$	$\varepsilon = \frac{b-a}{2}$
0	0.5	1	$-$	-0.37	$+$	
0.5	0.75	1	$-$	$+0.17$	$+$	
0.5	0.625	0.75	$-$		$+$	

Opět rozpůlíme interval.

Řešte rovnici $P(x) = x^3 + x - 1 = 0$ s chybou nejvýše 0.03.

Kořen je v intervalu $(0, 1)$

a	$c = \frac{a+b}{2}$	b	$P(a)$	$P(c)$	$P(b)$	$\varepsilon = \frac{b-a}{2}$
0	0.5	1	$-$	-0.37	$+$	
0.5	0.75	1	$-$	$+0.17$	$+$	
0.5	0.625	0.75	$-$	-0.13	$+$	

$$(0.625)^3 + 0.625 - 1 = -0.130859$$

Vypočteme funkční hodnotu v polovině intervalu.

Řešte rovnici $P(x) = x^3 + x - 1 = 0$ s chybou nejvýše 0.03.

Kořen je v intervalu $(0, 1)$

a	$c = \dfrac{a+b}{2}$	b	$P(a)$	$P(c)$	$P(b)$	$\varepsilon = \dfrac{b-a}{2}$
0	0.5	1	$-$	-0.37	$+$	
0.5	0.75	1	$-$	$+0.17$	$+$	
0.5	0.625	0.75	$-$	-0.13	$+$	
0.625		0.75	$-$		$+$	

- Hledáme tu polovinu intervalu, ve které dochází ke znaménkové změně (červeně vyznačeno).
- Kraje této poloviny budou novou aproximací kořene.

Řešte rovnici $P(x) = x^3 + x - 1 = 0$ s chybou nejvýše 0.03.

Kořen je v intervalu $(0, 1)$

a	$c = \frac{a+b}{2}$	b	$P(a)$	$P(c)$	$P(b)$	$\varepsilon = \frac{b-a}{2}$
0	0.5	1	$-$	-0.37	$+$	
0.5	0.75	1	$-$	$+0.17$	$+$	
0.5	0.625	0.75	$-$	-0.13	$+$	
0.625		0.75	$-$		$+$	0.062

Určíme dosaženou přesnost.

Řešte rovnici $P(x) = x^3 + x - 1 = 0$ s chybou nejvýše 0.03.

Kořen je v intervalu $(0, 1)$

a	$c = \frac{a+b}{2}$	b	$P(a)$	$P(c)$	$P(b)$	$\varepsilon = \frac{b-a}{2}$
0	0.5	1	$-$	-0.37	$+$	
0.5	0.75	1	$-$	$+0.17$	$+$	
0.5	0.625	0.75	$-$	-0.13	$+$	
0.625	0.6875	0.75	$-$		$+$	0.062

Rozpůlíme interval.

Řešte rovnici $P(x) = x^3 + x - 1 = 0$ s chybou nejvýše 0.03.

Kořen je v intervalu $(0,1)$

a	$c = \dfrac{a+b}{2}$	b	$P(a)$	$P(c)$	$P(b)$	$\varepsilon = \dfrac{b-a}{2}$
0	0.5	1	$-$	-0.37	$+$	
0.5	0.75	1	$-$	$+0.17$	$+$	
0.5	0.625	0.75	$-$	-0.13	$+$	
0.625	0.6875	0.75	$-$	$+0.01$	$+$	0.062

$(0.6875)^3 + 0.6875 - 1 = 0.0124511$

Vypočteme funkční hodnotu v polovině intervalu.

Řešte rovnici $P(x) = x^3 + x - 1 = 0$ s chybou nejvýše 0.03.

Kořen je v intervalu $(0, 1)$

a	$c = \dfrac{a+b}{2}$	b	$P(a)$	$P(c)$	$P(b)$	$\varepsilon = \dfrac{b-a}{2}$
0	0.5	1	$-$	-0.37	$+$	
0.5	0.75	1	$-$	$+0.17$	$+$	
0.5	0.625	0.75	$-$	-0.13	$+$	
0.625	0.6875	0.75	$-$	$+0.01$	$+$	0.062
0.625		0.6875	$-$		$+$	

- Hledáme tu polovinu intervalu, ve které dochází ke znaménkové změně (červeně vyznačeno).
- Kraje této poloviny budou novou aproximací kořene.

Řešte rovnici $P(x) = x^3 + x - 1 = 0$ s chybou nejvýše 0.03.

Kořen je v intervalu $(0, 1)$

a	$c = \frac{a+b}{2}$	b	$P(a)$	$P(c)$	$P(b)$	$\varepsilon = \frac{b-a}{2}$
0	0.5	1	$-$	-0.37	$+$	
0.5	0.75	1	$-$	$+0.17$	$+$	
0.5	0.625	0.75	$-$	-0.13	$+$	
0.625	0.6875	0.75	$-$	$+0.01$	$+$	0.062
0.625	0.6563	0.6875	$-$		$+$	0.0312

Určíme polovinu intervalu a dosaženou přesnost.

Řešte rovnici $P(x) = x^3 + x - 1 = 0$ s chybou nejvýše 0.03.

Kořen je v intervalu $(0,1)$

a	$c = \dfrac{a+b}{2}$	b	$P(a)$	$P(c)$	$P(b)$	$\varepsilon = \dfrac{b-a}{2}$
0	0.5	1	$-$	-0.37	$+$	
0.5	0.75	1	$-$	$+0.17$	$+$	
0.5	0.625	0.75	$-$	-0.13	$+$	
0.625	0.6875	0.75	$-$	$+0.01$	$+$	0.062
0.625	0.6563	0.6875	$-$	-0.06	$+$	0.0312

Vypočteme funkční hodnotu v polovině intervalu.

Řešte rovnici $P(x) = x^3 + x - 1 = 0$ s chybou nejvýše 0.03.

Kořen je v intervalu $(0, 1)$

a	$c = \dfrac{a+b}{2}$	b	$P(a)$	$P(c)$	$P(b)$	$\varepsilon = \dfrac{b-a}{2}$
0	0.5	1	$-$	-0.37	$+$	
0.5	0.75	1	$-$	$+0.17$	$+$	
0.5	0.625	0.75	$-$	-0.13	$+$	
0.625	0.6875	0.75	$-$	$+0.01$	$+$	0.062
0.625	0.6563	0.6875	$-$	-0.06	$+$	0.0312
0.6563		0.6875				

- Hledáme tu polovinu intervalu, ve které dochází ke znaménkové změně (červeně vyznačeno).
- Kraje této poloviny budou novou aproximací kořene.

Řešte rovnici $P(x) = x^3 + x - 1 = 0$ s chybou nejvýše 0.03.

Kořen je v intervalu $(0,1)$

a	$c = \dfrac{a+b}{2}$	b	$P(a)$	$P(c)$	$P(b)$	$\varepsilon = \dfrac{b-a}{2}$
0	0.5	1	$-$	-0.37	$+$	
0.5	0.75	1	$-$	$+0.17$	$+$	
0.5	0.625	0.75	$-$	-0.13	$+$	
0.625	0.6875	0.75	$-$	$+0.01$	$+$	0.062
0.625	0.6563	0.6875	$-$	-0.06	$+$	0.0312
0.6563	0.6719	0.6875				0.0156

- Přesnost je nyní dostatečná.
- Stačí již jen rozpůlit interval.

Řešte rovnici $P(x) = x^3 + x - 1 = 0$ s chybou nejvýše 0.03.

Kořen je v intervalu $(0, 1)$

a	$c = \dfrac{a+b}{2}$	b	$P(a)$	$P(c)$	$P(b)$	$\varepsilon = \dfrac{b-a}{2}$
0	0.5	1	$-$	-0.37	$+$	
0.5	0.75	1	$-$	$+0.17$	$+$	
0.5	0.625	0.75	$-$	-0.13	$+$	
0.625	0.6875	0.75	$-$	$+0.01$	$+$	0.062
0.625	0.6563	0.6875	$-$	-0.06	$+$	0.0312
0.6563	0.6719	0.6875				0.0156

Kořen je $x = 0.67 \pm 0.02$. Leží tedy uvnitř intervalu $(0.65, 0.69)$.

- Chybu zokrouhlíme nahoru (vždy nahoru) na jednu platnou číslici a odhad kořene na stejný počet desetinných míst.
- Zkontrolujeme, že i po zaokrouhlení jsou poslední hodnoty odhadů a a b uvnitř intervalu, ve kterém deklarujeme existenci kořene.