

Lineární algebra

Teorie a řešené příklady

Robert Mařík

23. listopadu 2009

Obsah

1	Hodnost	4
	Úloha 1	7
	Úloha 2	20
	Úloha 3	32
2	Soustavy lineárních rovnic	41
	Úloha 4	46
	Úloha 5	70
	Úloha 6	92
	Úloha 7	115
	Úloha 8	140
3	Determinant	160
	Úloha 9	161
	Úloha 10	162
	Úloha 11	165
	Úloha 12	168
	Úloha 13	171
	Úloha 14	181

4	Inverzní matice	189
	Úloha 15	190
	Úloha 16	195
	Úloha 17	207
5	Shrnutí	220

1 Hodnost

Definice (hodnost matice). Bud' A matice. *Hodností matice* rozumíme maximální počet lineárně nezávislých řádků matice. Hodnost matice A označujeme $h(A)$.

Poznámka 1 (lineární závislost a nezávislost algebraických vektorů). Bud' A matice o m řádcích.

- Je-li $h(A) = m$, jsou řádky tvořeny lineárně nezávislými vektory.
- Je-li $h(A) < m$, jsou řádky tvořeny lineárně závislými vektory.
- $h(A) > m$ nenastane.

Definice (schodovitý tvar). Řekneme, že matice A je ve *schodovitém tvaru*, jestliže případné nulové řádky jsou uspořádány na konci matice a nenulové jsou uspořádány tak, že každý následující řádek začíná větším počtem nul než řádek předchozí.

Věta 1 (hodnost matice ve schodovitém tvaru). Hodnost matice, která je ve schodovitém tvaru je rovna počtu jejích nenulových řádků.

Příklad 1. Matice $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ je ve schodovitém tvaru a $h(A) =$

3. Matice $B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ není ve schodovitém tvaru a její hodnost na první pohled nepoznáme.

Věta 2 (operace zachovávající hodnotu matice). Následující operace nemění hodnotu matice:

- vynechání řádku složeného ze samých nul, nebo vynechání řádku, který je totožný s jiným řádkem, nebo vynechání řádku, který je násobkem jiného řádku
- vynásobení nebo vydělení libovolného řádku nenulovým číslem
- záměna pořadí libovolného počtu řádků
- ponechání jednoho řádku beze změny a opakované přičtení libovolných násobků tohoto řádku k nenulovým násobkům ostatních řádků matice

Věta 3. Libovolnou matici lze konečným počtem úprav z Věty 2 převést do schodovitého tvaru.

Věta 4. Transponování nemění hodnotu matice.

Najděte hodnotu matice A .

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -1 & 2 & -3 \\ 3 & -2 & -1 & 1 & -2 \\ 2 & -5 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

Najděte hodnotu matice A .

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 1 & -2 \\ \textcircled{2} & 1 & -1 & 2 & -3 \\ 3 & -2 & -1 & 1 & -2 \\ 2 & -5 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 & -3 \\ & & & & \end{pmatrix}$$

- Zvolíme červený řádek jako klíčový.
- Tento řádek zůstává a píšeme ho jako první.

Najděte hodnotu matice A .

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -1 & 2 & -3 \\ 3 & -2 & -1 & 1 & -2 \\ 2 & -5 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \stackrel{\substack{2 \\ (-3)}}{\sim} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & -5 & 3 & -4 & 5 \end{pmatrix}$$

$$2R_1 - 3R_2 = \dots$$

Najděte hodnotu matice A .

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -1 & 2 & -3 \\ 3 & -2 & -1 & 1 & -2 \\ 2 & -5 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[2]{(-3)} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & -5 & 3 & -4 & 5 \\ 0 & -7 & 1 & -4 & 5 \end{pmatrix}$$

$$2R_3 - 3R_2 = \dots$$

Najděte hodnotu matice A .

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 1 & -2 \\ \textcircled{2} & 1 & -1 & 2 & -3 \\ 3 & -2 & -1 & 1 & -2 \\ \textcircled{2} & -5 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{(-1)} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & -5 & 3 & -4 & 5 \\ 0 & -7 & 1 & -4 & 5 \\ 0 & -6 & 2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$$

$$R_4 - R_2 = \dots$$

Najděte hodnotu matice A .

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -1 & 2 & -3 \\ 3 & -2 & -1 & 1 & -2 \\ 2 & -5 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & -5 & 3 & -4 & 5 \\ 0 & -7 & 1 & -4 & 5 \\ 0 & -6 & 2 & -4 & 5 \end{pmatrix} \sim$$
$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

První řádek zůstává.

Najděte hodnotu matice A .

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -1 & 2 & -3 \\ 3 & -2 & -1 & 1 & -2 \\ 2 & -5 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & -5 & 3 & -4 & 5 \\ 0 & -7 & 1 & -4 & 5 \\ 0 & -6 & 2 & -4 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & -5 & 3 & -4 & 5 \end{pmatrix}$$

- Další klíčový řádek bude jeden z červených řádků.
- Protože by vytváření dalších nul bylo složitější, uděláme mezikrok – vytvoříme nejprve jedničku.
- Druhý řádek ponecháme na svém místě.

Najděte hodnotu matice A .

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -1 & 2 & -3 \\ 3 & -2 & -1 & 1 & -2 \\ 2 & -5 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & -5 & 3 & -4 & 5 \\ 0 & -7 & 1 & -4 & 5 \\ 0 & -6 & 2 & -4 & 5 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ (-1) \\ \end{matrix}$$
$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & -5 & 3 & -4 & 5 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Zvolíme červený řádek jako klíčový a provedeme $R_2 - R_3 = \dots$

Najděte hodnotu matice A .

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -1 & 2 & -3 \\ 3 & -2 & -1 & 1 & -2 \\ 2 & -5 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & -5 & 3 & -4 & 5 \\ 0 & -7 & 1 & -4 & 5 \\ 0 & -6 & 2 & -4 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & -5 & 3 & -4 & 5 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

The matrix transformation shows the following steps:
1. The original matrix A is transformed into a matrix where the first row is $(2, 1, -1, 2, -3)$.
2. The second row is $(0, -5, 3, -4, 5)$, with -5 circled in red.
3. The third row is $(0, -7, 1, -4, 5)$.
4. The fourth row is $(0, -6, 2, -4, 5)$, with -6 circled in yellow.
5. A blue arrow points from the -5 in the second row to the -6 in the fourth row, labeled (-1) , indicating the operation $R_4 - R_2$.
6. The final matrix has rows $(2, 1, -1, 2, -3)$, $(0, -5, 3, -4, 5)$, $(0, 2, 2, 0, 0)$, and $(0, 1, 1, 0, 0)$.

Vytvoříme jedničku i v dalším řádku: $R_2 - R_4 = \dots$

Najděte hodnotu matice A .

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -1 & 2 & -3 \\ 3 & -2 & -1 & 1 & -2 \\ 2 & -5 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & -5 & 3 & -4 & 5 \\ 0 & -7 & 1 & -4 & 5 \\ 0 & -6 & 2 & -4 & 5 \end{pmatrix} \sim$$
$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & -5 & 3 & -4 & 5 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Řádek R_3 je násobkem řádku R_4 .
- Jeden z nich můžeme tedy odstranit.

Najděte hodnotu matice A .

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -1 & 2 & -3 \\ 3 & -2 & -1 & 1 & -2 \\ 2 & -5 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & -5 & 3 & -4 & 5 \\ 0 & -7 & 1 & -4 & 5 \\ 0 & -6 & 2 & -4 & 5 \end{pmatrix} \sim$$
$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & -5 & 3 & -4 & 5 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Odstranili jsme třetí řádek.
- První řádek zůstává.
- Nový klíčový řádek bude řádek s jedničkou. Píšeme jej jako druhý.

Najděte hodnotu matice A .

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -1 & 2 & -3 \\ 3 & -2 & -1 & 1 & -2 \\ 2 & -5 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & -5 & 3 & -4 & 5 \\ 0 & -7 & 1 & -4 & 5 \\ 0 & -6 & 2 & -4 & 5 \end{pmatrix} \sim$$
$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & -5 & 3 & -4 & 5 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & -4 & 5 \end{pmatrix}$$

Vytvoříme nulu místo čísla -5 . Provedeme tedy $5R_3 + R_2 = \dots$

Najděte hodnotu matice A .

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -1 & 2 & -3 \\ 3 & -2 & -1 & 1 & -2 \\ 2 & -5 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & -5 & 3 & -4 & 5 \\ 0 & -7 & 1 & -4 & 5 \\ 0 & -6 & 2 & -4 & 5 \end{pmatrix} \sim$$
$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & -5 & 3 & -4 & 5 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & -4 & 5 \end{pmatrix}$$

$$h(A) = 3$$

- Matice je ve schodovitém tvaru.
- Schodovitý tvar má tři řádky.
- $h(A) = 3$.

Najděte hodnotu matice B .

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & -4 & 6 & -2 \\ -1 & 2 & -1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 3 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

Najděte hodnotu matice B .

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & -4 & 6 & -2 \\ -1 & 2 & -1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 3 & -4 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 1 & -2 \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \end{pmatrix}$$

- Řádek R_1 bude klíčový.
- Zůstane jako první a pomocí něj budeme nulovat zbylá čísla v prvním sloupci.

Najděte hodnotu matice B .

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & -4 & 6 & -2 \\ -1 & 2 & -1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 3 & -4 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 1 & -2 \\ 0 & -5 & 11 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Vynulujeme prvek b_{21} . Provedeme $-3R_1 + R_2$.

Najděte hodnotu matice B .

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & -4 & 6 & -2 \\ -1 & 2 & -1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 3 & -4 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 1 & -2 \\ 0 & -5 & 11 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & -6 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Vynulujeme prvek b_{31} . Provedeme $R_1 + R_3$.

Najděte hodnotu matice B .

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & -4 & 6 & -2 \\ -1 & 2 & -1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 3 & -4 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 1 & -2 \\ 0 & -5 & 11 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & -6 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

Prvek b_{41} je nulový a tento řádek tedy stačí pouze opsat.

Najděte hodnotu matice B .

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & -4 & 6 & -2 \\ -1 & 2 & -1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 3 & -4 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 1 & -2 \\ 0 & -5 & 11 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & -6 & 2 & 4 \\ 0 & \color{red}{1} & \color{red}{3} & \color{red}{-4} & \color{red}{1} \end{pmatrix}$$
$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

- První řádek (původně klíčový) zůstane.
- Červeně označený řádek obsahuje jedničku na začátku a zvolíme jej jako další klíčový řádek. To je nejšikovníjší, protože $b_{42} = 1$, zatímco $b_{22} = -5$ a $b_{23} = 4$.

Najděte hodnotu matice B .

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & -4 & 6 & -2 \\ -1 & 2 & -1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 3 & -4 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 1 & -2 \\ 0 & -5 & 11 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & -6 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & -4 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{5} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 26 & -17 & 9 \end{pmatrix}$$

Vynulujeme prvek b_{22} . Provedeme $5R_4 + R_2$.

Najděte hodnost matice B .

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & -4 & 6 & -2 \\ -1 & 2 & -1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 3 & -4 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 1 & -2 \\ 0 & -5 & 11 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & -6 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & -4 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{-4R_4}$$
$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 26 & -17 & 9 \\ 0 & 0 & -18 & 18 & 0 \end{pmatrix}$$

Vynulujeme prvek b_{32} . Provedeme $-4R_4 + R_2$.

Najděte hodnotu matice B .

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & -4 & 6 & -2 \\ -1 & 2 & -1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 3 & -4 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 1 & -2 \\ 0 & -5 & 11 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & -6 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 26 & -17 & 9 \\ 0 & 0 & -18 & 18 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 26 & -17 & 9 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- Poslední řádek můžeme vydělit číslem 18.
- Ostatní řádky zůstanou.

Najděte hodnotu matice B .

$$\begin{aligned} B &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & -4 & 6 & -2 \\ -1 & 2 & -1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 3 & -4 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 1 & -2 \\ 0 & -5 & 11 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & -6 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & -4 & 1 \end{pmatrix} \\ &\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 26 & -17 & 9 \\ 0 & 0 & -18 & 18 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 26 & -17 & 9 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

- První dva řádky zůstanou.
- Prvek $b_{34} = -1$ je šikovnější pro další úpravy, než $b_{33} = 26$. Proto jako další klíčový volíme řádek R_4 .

Najděte hodnotu matice B .

$$\begin{aligned} B &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & -4 & 6 & -2 \\ -1 & 2 & -1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 3 & -4 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 1 & -2 \\ 0 & -5 & 11 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & -6 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & -4 & 1 \end{pmatrix} \\ &\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 26 & -17 & 9 \\ 0 & 0 & -18 & 18 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 26 & -17 & 9 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \uparrow_{26} \\ \end{matrix} \\ &\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9 & 9 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Vynulujeme prvek b_{33} . Provedeme $26R_4 + R_3$.

Najděte hodnotu matice B .

$$\begin{aligned} B &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & -4 & 6 & -2 \\ -1 & 2 & -1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 3 & -4 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 1 & -2 \\ 0 & -5 & 11 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & -6 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & -4 & 1 \end{pmatrix} \\ &\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 26 & -17 & 9 \\ 0 & 0 & -18 & 18 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 26 & -17 & 9 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9 & 9 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$h(B) = 4$$

- Matice je ve schodovitém tvaru.
- Schodovitý tvar má čtyři řádky. Hodnota je čtyři.

Určete, zda jsou následující vektory lineárně závislé či nezávislé.

$$\vec{a} = (2, 1, 3, 2), \vec{b} = (3, 3, 2, 5), \vec{c} = (1, 3, 1, 4), \vec{d} = (1, 1, -3, 2)$$

Určete, zda jsou následující vektory lineárně závislé či nezávislé.

$$\vec{a} = (2, 1, 3, 2), \vec{b} = (3, 3, 2, 5), \vec{c} = (1, 3, 1, 4), \vec{d} = (1, 1, -3, 2)$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

Lineární závislost a nezávislost posoudíme tak, že z vektorů sestavíme matici a rozhodneme, zda je její hodnost stejná (nezávislé) nebo menší (závislé) jako počet vektorů.

Určete, zda jsou následující vektory lineárně závislé či nezávislé.

$$\vec{a} = (2, 1, 3, 2), \vec{b} = (3, 3, 2, 5), \vec{c} = (1, 3, 1, 4), \vec{d} = (1, 1, -3, 2)$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & -1 & 9 & -2 \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix}$$

Poslední řádek bude klíčový a využijeme tento řádek k vynulování prvku na začátku prvního řádku.

Určete, zda jsou následující vektory lineárně závislé či nezávislé.

$$\vec{a} = (2, 1, 3, 2), \vec{b} = (3, 3, 2, 5), \vec{c} = (1, 3, 1, 4), \vec{d} = (1, 1, -3, 2)$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & -1 & 9 & -2 \\ 0 & 0 & 11 & -1 \end{pmatrix}$$

Vynulujeme prvek na začátku druhého řádku.

Určete, zda jsou následující vektory lineárně závislé či nezávislé.

$$\vec{a} = (2, 1, 3, 2), \vec{b} = (3, 3, 2, 5), \vec{c} = (1, 3, 1, 4), \vec{d} = (1, 1, -3, 2)$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & -1 & 9 & -2 \\ 0 & 0 & 11 & -1 \\ 0 & 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

Vynulujeme prvek na začátku třetího řádku.

Určete, zda jsou následující vektory lineárně závislé či nezávislé.

$$\vec{a} = (2, 1, 3, 2), \vec{b} = (3, 3, 2, 5), \vec{c} = (1, 3, 1, 4), \vec{d} = (1, 1, -3, 2)$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & -1 & 9 & -2 \\ 0 & 0 & 11 & -1 \\ 0 & 2 & 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & -1 & 9 & -2 \\ 0 & 0 & 11 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Vydělíme poslední řádek dvěma

Určete, zda jsou následující vektory lineárně závislé či nezávislé.

$$\vec{a} = (2, 1, 3, 2), \vec{b} = (3, 3, 2, 5), \vec{c} = (1, 3, 1, 4), \vec{d} = (1, 1, -3, 2)$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & -1 & 9 & -2 \\ 0 & 0 & 11 & -1 \\ 0 & 2 & 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & -1 & 9 & -2 \\ 0 & 0 & 11 & -1 \\ 0 & 2 & 4 & 2 \end{pmatrix} =$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 11 & -1 \end{pmatrix}$$

Zvolíme nový klíčový řádek a opíšeme řádky, které nemusíme upravovat.

Určete, zda jsou následující vektory lineárně závislé či nezávislé.

$$\vec{a} = (2, 1, 3, 2), \vec{b} = (3, 3, 2, 5), \vec{c} = (1, 3, 1, 4), \vec{d} = (1, 1, -3, 2)$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & -1 & 9 & -2 \\ 0 & 0 & 11 & -1 \\ 0 & 2 & 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & -1 & 9 & -2 \\ 0 & 0 & 11 & -1 \\ 0 & 2 & 4 & 2 \end{pmatrix} =$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 11 & -1 \\ 0 & 0 & 11 & -1 \end{pmatrix}$$

Vynulujeme prvek ve druhém řádku.

Určete, zda jsou následující vektory lineárně závislé či nezávislé.

$$\vec{a} = (2, 1, 3, 2), \vec{b} = (3, 3, 2, 5), \vec{c} = (1, 3, 1, 4), \vec{d} = (1, 1, -3, 2)$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & -1 & 9 & -2 \\ 0 & 0 & 11 & -1 \\ 0 & 2 & 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & -1 & 9 & -2 \\ 0 & 0 & 11 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} =$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 11 & -1 \\ 0 & 0 & 11 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 11 & -1 \\ 0 & 0 & 11 & -1 \end{pmatrix}$$

- Poslední řádek se shoduje s předposledním a můžeme ho vynechat.
- **Vektory jsou lineárně závislé.**
- Matice po vynechání posledního řádku již bude ve schodovitém tvaru a vidíme, že její hodnost je 3.

2 Soustavy lineárních rovnic

Uvažujme následující tři problémy: Najděte všechna reálná čísla x_1 , x_2 , splňující:

Úloha 1 :

$$\begin{aligned}4x_1 + 5x_2 &= 7 \\ x_1 - 2x_2 &= 4\end{aligned}$$

Úloha 2 :

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix} x_2 = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Úloha 3

$$\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Všechny problémy jsou ekvivalentní a jedná se o jiný zápis téhož.

Definice (soustava lineárních rovnic). *Soustavou m lineárních rovnic o n neznámých* nazýváme soustavu rovnic

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2$$

$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \cdots + a_{3n}x_n = b_3$$

\vdots

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m$$

(S)

Proměnné x_1, x_2, \dots, x_n nazýváme *neznámé*. Reálná čísla a_{ij} nazýváme *koeficienty levých stran*, reálná čísla b_j *koeficienty pravých stran* soustavy rovnic. *Řešením soustavy rovnic* rozumíme uspořádanou n -tici reálných čísel $[t_1, t_2, \dots, t_n]$ po jejichž dosazení za neznámé (v tomto pořadí) do soustavy dostaneme ve všech rovnicích identity.

Definice (matice soustavy). Matici

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad (1)$$

nazýváme *maticí soustavy* (S). Matici

$$A_r = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array} \right) \quad (2)$$

nazýváme *rozšířenou maticí soustavy* (S).

Poznámka 2 (vektorový zápis soustavy lineárních rovnic).

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} x_2 + \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ \vdots \\ a_{m3} \end{pmatrix} x_3 + \cdots + \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} x_n = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Poznámka 3 (maticový zápis soustavy lineárních rovnic).

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

$$A\vec{x} = \vec{b}.$$

Věta 5 (Frobeniova věta, Kronecker–Capelliho věta). Soustava (S) je řešitelná právě tehdy, když její matice soustavy (1) a rozšířená matice soustavy (2) mají stejnou hodnost, tj. $h(A) = h(A_r)$.

- Soustava nemá řešení, pokud $h(A) \neq h(A_r)$.
- Soustava má právě jedno řešení, pokud $h(A) = h(A_r) = n$.
- Soustava má nekonečně mnoho řešení, pokud $h(A) = h(A_r) < n$. Tato řešení lze vyjádřit pomocí $(n - h(A))$ nezávislých parametrů.

Definice (homogenní soustava lineárních rovnic). Platí-li v soustavě (S)

$$b_1 = b_2 = \dots = b_m = 0,$$

nazývá se soustava (S) *homogenní*.

Poznámka 4 (triviální řešení). Homogenní soustava lineárních rovnic je vždy řešitelná. Po dosazení okamžitě vidíme, že n -tice $x_1 = 0, x_2 = 0, \dots, x_n = 0$ je řešením. Toto řešení nazýváme *triviální*. U homogenních soustav lineárních rovnic tedy buď existuje pouze triviální řešení, nebo existuje nekonečně mnoho řešení.

Řešte soustavu

$$6x_1 + 2x_2 - x_3 + 7x_4 = 0$$

$$4x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 5x_4 = -4$$

$$x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0$$

$$x_1 + x_3 = 3$$

Řešte soustavu

$$6x_1 + 2x_2 - x_3 + 7x_4 = 0$$

$$4x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 5x_4 = -4$$

$$x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0$$

$$x_1 + x_3 = 3$$

$$A_r \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 6 & 2 & -1 & 7 & 0 \\ 4 & 2 & -3 & 5 & -4 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 3 \end{array} \right)$$

Napišeme rozšířenou matici soustavy A_r .

Řešte soustavu

$$6x_1 + 2x_2 - x_3 + 7x_4 = 0$$

$$4x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 5x_4 = -4$$

$$x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0$$

$$x_1 + x_3 = 3$$

$$A_r \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 6 & 2 & -1 & 7 & 0 \\ 4 & 2 & -3 & 5 & -4 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ \textcircled{1} & 0 & 1 & 0 & 3 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 3 \end{array} \right)$$

- Jako klíčový řádek zvolíme řádek poslední.
- Tento řádek napíšeme jako první.

Řešte soustavu

$$6x_1 + 2x_2 - x_3 + 7x_4 = 0$$

$$4x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 5x_4 = -4$$

$$x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0$$

$$x_1 + x_3 = 3$$

$$A_r \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 6 & 2 & -1 & 7 & 0 \\ 4 & 2 & -3 & 5 & -4 \\ \mathbf{1} & 1 & -1 & -1 & 0 \\ \mathbf{(1)} & 0 & 1 & 0 & \mathbf{3} \end{array} \right) \xrightarrow{(-1)} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & -3 \end{array} \right)$$

$$R_3 - R_4 = \dots$$

Řešte soustavu

$$6x_1 + 2x_2 - x_3 + 7x_4 = 0$$

$$4x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 5x_4 = -4$$

$$x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0$$

$$x_1 + x_3 = 3$$

$$A_r \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 6 & 2 & -1 & 7 & 0 \\ 4 & 2 & -3 & 5 & -4 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 3 \end{array} \right) \xrightarrow{(-4)} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & -3 \\ 0 & 2 & -7 & 5 & -16 \end{array} \right)$$

$$R_2 - 4R_4 = \dots$$

Řešte soustavu

$$6x_1 + 2x_2 - x_3 + 7x_4 = 0$$

$$4x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 5x_4 = -4$$

$$x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0$$

$$x_1 + x_3 = 3$$

$$A_r \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 6 & 2 & -1 & 7 & 0 \\ 4 & 2 & -3 & 5 & -4 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ \textcircled{1} & 0 & 1 & 0 & 3 \end{array} \right) \xrightarrow{(-6)} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & -3 \\ 0 & 2 & -7 & 5 & -16 \\ 0 & 2 & -7 & 7 & -18 \end{array} \right)$$

$$R_1 - 6R_4 = \dots$$

Řešte soustavu

$$6x_1 + 2x_2 - x_3 + 7x_4 = 0$$

$$4x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 5x_4 = -4$$

$$x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0$$

$$x_1 + x_3 = 3$$

$$A_r \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 6 & 2 & -1 & 7 & 0 \\ 4 & 2 & -3 & 5 & -4 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 3 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & -3 \\ 0 & 2 & -7 & 5 & -16 \\ 0 & 2 & -7 & 7 & -18 \end{array} \right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & -3 \end{array} \right)$$

První řádek zůstane a druhý řádek bude novým klíčovým řádkem.

Řešte soustavu

$$6x_1 + 2x_2 - x_3 + 7x_4 = 0$$

$$4x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 5x_4 = -4$$

$$x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0$$

$$x_1 + x_3 = 3$$

$$A_r \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 6 & 2 & -1 & 7 & 0 \\ 4 & 2 & -3 & 5 & -4 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 3 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & -3 \\ 0 & 2 & -7 & 5 & -16 \\ 0 & 2 & -7 & 7 & -18 \end{array} \right) \xrightarrow{(-2)}$$
$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & -3 & 7 & -10 \end{array} \right)$$

$$-2R_2 + R_3 = \dots$$

Řešte soustavu

$$6x_1 + 2x_2 - x_3 + 7x_4 = 0$$

$$4x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 5x_4 = -4$$

$$x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0$$

$$x_1 + x_3 = 3$$

$$A_r \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 6 & 2 & -1 & 7 & 0 \\ 4 & 2 & -3 & 5 & -4 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 3 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & \textcircled{1} & -2 & -1 & -3 \\ 0 & 2 & -7 & 5 & -16 \\ 0 & \textcircled{2} & -7 & 7 & -18 \end{array} \right) \begin{array}{l} \\ (-2) \\ \end{array}$$
$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & -3 & 7 & -10 \\ 0 & 0 & -3 & 9 & -12 \end{array} \right)$$

$$-2R_2 + R_4 = \dots$$

Řešte soustavu

$$6x_1 + 2x_2 - x_3 + 7x_4 = 0$$

$$4x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 5x_4 = -4$$

$$x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0$$

$$x_1 + x_3 = 3$$

$$A_r \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 6 & 2 & -1 & 7 & 0 \\ 4 & 2 & -3 & 5 & -4 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 3 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & -3 \\ 0 & 2 & -7 & 5 & -16 \\ 0 & 2 & -7 & 7 & -18 \end{array} \right) \sim$$
$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & -3 & 7 & -10 \\ 0 & 0 & -3 & 9 & -12 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & -3 & 7 & -10 \end{array} \right)$$

- První dva řádky zůstanou.
- Třetí řádek bude novým klíčovým řádkem a zůstane také.

Řešte soustavu

$$6x_1 + 2x_2 - x_3 + 7x_4 = 0$$

$$4x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 5x_4 = -4$$

$$x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0$$

$$x_1 + x_3 = 3$$

$$A_r \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 6 & 2 & -1 & 7 & 0 \\ 4 & 2 & -3 & 5 & -4 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 3 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & -3 \\ 0 & 2 & -7 & 5 & -16 \\ 0 & 2 & -7 & 7 & -18 \end{array} \right) \sim$$
$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & -3 & 7 & -10 \\ 0 & 0 & -3 & 9 & -12 \end{array} \right) \xrightarrow{(-1)} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & -3 & 7 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -2 \end{array} \right)$$

$$-R_3 + R_4 = \dots$$

Řešte soustavu

$$6x_1 + 2x_2 - x_3 + 7x_4 = 0$$

$$4x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 5x_4 = -4$$

$$x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0$$

$$x_1 + x_3 = 3$$

$$A_r \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & -3 & 7 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -2 \end{array} \right)$$

Rozšířená matice soustavy je řádkově ekvivalentní modré matici, která je ve schodovitém tvaru.

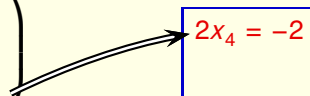
Řešte soustavu

$$6x_1 + 2x_2 - x_3 + 7x_4 = 0$$

$$4x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 5x_4 = -4$$

$$x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0$$

$$x_1 + x_3 = 3$$

$$A_r \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & -3 & 7 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -2 \end{array} \right)$$


$$2x_4 = -2$$

- Soustava má řešení, neboť $h(A) = h(A_r) = 4$. Navíc $n = 4$ (počet neznámých) a soustava má tedy jediné řešení (nula parametrů).
- Začneme dopočítávat neznámé. Napíšeme rovnici odpovídající poslednímu řádku ...

Řešte soustavu

$$6x_1 + 2x_2 - x_3 + 7x_4 = 0$$

$$4x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 5x_4 = -4$$

$$x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0$$

$$x_1 + x_3 = 3$$

$$A_r \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & -3 & 7 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -2 \end{array} \right)$$

$$2x_4 = -2$$

$$x_4 = -1$$

a řešíme vzhledem k x_4 .

Řešte soustavu

$$6x_1 + 2x_2 - x_3 + 7x_4 = 0$$

$$4x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 5x_4 = -4$$

$$x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0$$

$$x_1 + x_3 = 3$$

$$A_r \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & -3 & 7 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -2 \end{array} \right)$$

$$-3x_3 + 7x_4 = -10$$

$$2x_4 = -2$$

$$x_4 = -1$$

Napišeme rovnici odpovídající předposlednímu řádku.

Řešte soustavu

$$\begin{aligned} 6x_1 + 2x_2 - x_3 + 7x_4 &= 0 \\ 4x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 5x_4 &= -4 \\ x_1 + x_2 - x_3 - x_4 &= 0 \\ x_1 + x_3 &= 3 \end{aligned}$$

$$A_r \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & -3 & 7 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -2 \end{array} \right)$$

$$2x_4 = -2$$

$$x_4 = -1$$

$$-3x_3 + 7x_4 = -10$$

$$-3x_3 - 7 = -10$$

Dosadíme $x_4 = -1 \dots$

Řešte soustavu

$$6x_1 + 2x_2 - x_3 + 7x_4 = 0$$

$$4x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 5x_4 = -4$$

$$x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0$$

$$x_1 + x_3 = 3$$

$$A_r \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & -3 & 7 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -2 \end{array} \right)$$

$$-3x_3 + 7x_4 = -10$$

$$-3x_3 - 7 = -10$$

$$x_3 = 1$$

$$2x_4 = -2$$

$$x_4 = -1$$

a řešíme vzhledem k x_3 .

Řešte soustavu

$$6x_1 + 2x_2 - x_3 + 7x_4 = 0$$

$$4x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 5x_4 = -4$$

$$x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0$$

$$x_1 + x_3 = 3$$

$$A_r \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & -3 & 7 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -2 \end{array} \right)$$

$$2x_4 = -2$$

$$x_4 = -1$$

$$-3x_3 + 7x_4 = -10$$

$$-3x_3 - 7 = -10$$

$$x_3 = 1$$

$$x_2 - 2x_3 - x_4 = -3$$

Napišeme rovnici odpovídající druhému řádku.

Řešte soustavu

$$6x_1 + 2x_2 - x_3 + 7x_4 = 0$$

$$4x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 5x_4 = -4$$

$$x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0$$

$$x_1 + x_3 = 3$$

$$A_r \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & -3 & 7 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -2 \end{array} \right)$$

$$2x_4 = -2$$

$$x_4 = -1$$

$$-3x_3 + 7x_4 = -10$$

$$-3x_3 - 7 = -10$$

$$x_3 = 1$$

$$x_2 - 2x_3 - x_4 = -3$$

$$x_2 - 2 + 1 = -3$$

Dosadíme $x_4 = -1$ a $x_3 = 1$...

Řešte soustavu

$$6x_1 + 2x_2 - x_3 + 7x_4 = 0$$

$$4x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 5x_4 = -4$$

$$x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0$$

$$x_1 + x_3 = 3$$

$$A_r \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & -3 & 7 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -2 \end{array} \right)$$

$$2x_4 = -2$$

$$x_4 = -1$$

$$-3x_3 + 7x_4 = -10$$

$$-3x_3 - 7 = -10$$

$$x_3 = 1$$

$$x_2 - 2x_3 - x_4 = -3$$

$$x_2 - 2 + 1 = -3$$

$$x_2 = -2$$

a vyřešíme vzhledem k x_2 .

Řešte soustavu

$$6x_1 + 2x_2 - x_3 + 7x_4 = 0$$

$$4x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 5x_4 = -4$$

$$x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0$$

$$x_1 + x_3 = 3$$

$$A_r \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & -3 & 7 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -2 \end{array} \right)$$

$$-3x_3 + 7x_4 = -10$$

$$-3x_3 - 7 = -10$$

$$x_3 = 1$$

$$x_2 - 2x_3 - x_4 = -3$$

$$x_2 - 2 + 1 = -3$$

$$x_2 = -2$$

$$2x_4 = -2$$

$$x_4 = -1$$

$$x_1 + x_3 = 3$$

Napišeme rovnici odpovídající prvnímu řádku.

Řešte soustavu

$$6x_1 + 2x_2 - x_3 + 7x_4 = 0$$

$$4x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 5x_4 = -4$$

$$x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0$$

$$x_1 + x_3 = 3$$

$$A_r \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & -3 & 7 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -2 \end{array} \right)$$

$$2x_4 = -2$$

$$x_4 = -1$$

$$-3x_3 + 7x_4 = -10$$

$$-3x_3 - 7 = -10$$

$$x_3 = 1$$

$$x_2 - 2x_3 - x_4 = -3$$

$$x_2 - 2 + 1 = -3$$

$$x_2 = -2$$

$$x_1 + x_3 = 3$$

$$x_1 + 1 = 3$$

Dosadíme $x_3 = 1$.

Řešte soustavu

$$6x_1 + 2x_2 - x_3 + 7x_4 = 0$$

$$4x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 5x_4 = -4$$

$$x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0$$

$$x_1 + x_3 = 3$$

$$A_r \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & -3 & 7 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -2 \end{array} \right)$$

$$2x_4 = -2$$

$$x_4 = -1$$

$$-3x_3 + 7x_4 = -10$$

$$-3x_3 - 7 = -10$$

$$x_3 = 1$$

$$x_2 - 2x_3 - x_4 = -3$$

$$x_2 - 2 + 1 = -3$$

$$x_2 = -2$$

$$x_1 + x_3 = 3$$

$$x_1 + 1 = 3$$

$$x_1 = 2$$

Najdeme $x_1 = 2$.

Řešte soustavu

$$6x_1 + 2x_2 - x_3 + 7x_4 = 0$$

$$4x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 5x_4 = -4$$

$$x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0$$

$$x_1 + x_3 = 3$$

$$A_r \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & -3 & 7 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -2 \end{array} \right)$$

$$2x_4 = -2$$

$$x_4 = -1$$

$$-3x_3 + 7x_4 = -10$$

$$-3x_3 - 7 = -10$$

$$x_3 = 1$$

$$x_2 - 2x_3 - x_4 = -3$$

$$x_2 - 2 + 1 = -3$$

$$x_2 = -2$$

$$x_1 + x_3 = 3$$

$$x_1 + 1 = 3$$

$$x_1 = 2$$

Jediné řešení je $[x_1 = 2, x_2 = -2, x_3 = 1, x_4 = -1]$.

Vypočítali jsme všechny neznámé.

Řešte soustavu rovnic

$$3x_1 - 2x_2 + 6x_3 + 2x_4 - 4x_5 = 5$$

$$x_1 + 2x_3 - x_4 + 2x_5 = 3$$

$$x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 1$$

$$2x_1 - 6x_2 + 4x_3 + 2x_4 - 4x_5 = 5$$

Řešte soustavu rovnic

$$3x_1 - 2x_2 + 6x_3 + 2x_4 - 4x_5 = 5$$

$$x_1 + 2x_3 - x_4 + 2x_5 = 3$$

$$x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 1$$

$$2x_1 - 6x_2 + 4x_3 + 2x_4 - 4x_5 = 5$$

$$A_r \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 3 & -2 & 6 & 2 & -4 & 5 \\ 1 & 0 & 2 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & -6 & 4 & 2 & -4 & 5 \end{array} \right)$$

Napišeme rozšířenou matici soustavy.

Řešte soustavu rovnic

$$3x_1 - 2x_2 + 6x_3 + 2x_4 - 4x_5 = 5$$

$$x_1 + 2x_3 - x_4 + 2x_5 = 3$$

$$x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 1$$

$$2x_1 - 6x_2 + 4x_3 + 2x_4 - 4x_5 = 5$$

$$A_r \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 3 & -2 & 6 & 2 & -4 & 5 \\ \textcircled{1} & 0 & 2 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & -6 & 4 & 2 & -4 & 5 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 & 2 & 3 \end{array} \right)$$

Druhý řádek bude klíčový a opišeme jej na první místo.

Řešte soustavu rovnic

$$3x_1 - 2x_2 + 6x_3 + 2x_4 - 4x_5 = 5$$

$$x_1 + 2x_3 - x_4 + 2x_5 = 3$$

$$x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 1$$

$$2x_1 - 6x_2 + 4x_3 + 2x_4 - 4x_5 = 5$$

$$A_r \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 3 & -2 & 6 & 2 & -4 & 5 \\ 1 & 0 & 2 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & -6 & 4 & 2 & -4 & 5 \end{array} \right) \xrightarrow{(-3)} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & 0 & 5 & -10 & -4 \end{array} \right)$$

Spravíme první řádek.

Řešte soustavu rovnic

$$3x_1 - 2x_2 + 6x_3 + 2x_4 - 4x_5 = 5$$

$$x_1 + 2x_3 - x_4 + 2x_5 = 3$$

$$x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 1$$

$$2x_1 - 6x_2 + 4x_3 + 2x_4 - 4x_5 = 5$$

$$A_r \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 3 & -2 & 6 & 2 & -4 & 5 \\ \textcircled{1} & 0 & 2 & -1 & 2 & 3 \\ \textcircled{1} & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & -6 & 4 & 2 & -4 & 5 \end{array} \right) \xrightarrow{(-1)} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & 0 & 5 & -10 & -4 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & -2 & -2 \end{array} \right)$$

Spravíme třetí řádek.

Řešte soustavu rovnic

$$3x_1 - 2x_2 + 6x_3 + 2x_4 - 4x_5 = 5$$

$$x_1 + 2x_3 - x_4 + 2x_5 = 3$$

$$x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 1$$

$$2x_1 - 6x_2 + 4x_3 + 2x_4 - 4x_5 = 5$$

$$A_r \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 3 & -2 & 6 & 2 & -4 & 5 \\ \textcircled{1} & 0 & 2 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ \textcircled{2} & -6 & 4 & 2 & -4 & 5 \end{array} \right) \xrightarrow{(-2)} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & 0 & 5 & -10 & -4 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & -6 & 0 & 4 & -8 & -1 \end{array} \right)$$

Spravíme poslední řádek.

Řešte soustavu rovnic

$$3x_1 - 2x_2 + 6x_3 + 2x_4 - 4x_5 = 5$$

$$x_1 + 2x_3 - x_4 + 2x_5 = 3$$

$$x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 1$$

$$2x_1 - 6x_2 + 4x_3 + 2x_4 - 4x_5 = 5$$

$$A_r \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 3 & -2 & 6 & 2 & -4 & 5 \\ 1 & 0 & 2 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & -6 & 4 & 2 & -4 & 5 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & 0 & 5 & -10 & -4 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & -6 & 0 & 4 & -8 & -1 \end{array} \right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & -2 & -2 \end{array} \right)$$

- První řádek zůstane.
- Červený řádek bude nový klíčový řádek a napíšeme jej jako druhý.

Řešte soustavu rovnic

$$3x_1 - 2x_2 + 6x_3 + 2x_4 - 4x_5 = 5$$

$$x_1 + 2x_3 - x_4 + 2x_5 = 3$$

$$x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 1$$

$$2x_1 - 6x_2 + 4x_3 + 2x_4 - 4x_5 = 5$$

$$A_r \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 3 & -2 & 6 & 2 & -4 & 5 \\ 1 & 0 & 2 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & -6 & 4 & 2 & -4 & 5 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & 0 & 5 & -10 & -4 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & -6 & 0 & 4 & -8 & -1 \end{array} \right) \sim$$
$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & -12 & -6 \end{array} \right)$$

Spravíme druhý řádek.

Řešte soustavu rovnic

$$3x_1 - 2x_2 + 6x_3 + 2x_4 - 4x_5 = 5$$

$$x_1 + 2x_3 - x_4 + 2x_5 = 3$$

$$x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 1$$

$$2x_1 - 6x_2 + 4x_3 + 2x_4 - 4x_5 = 5$$

$$A_r \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 3 & -2 & 6 & 2 & -4 & 5 \\ 1 & 0 & 2 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & -6 & 4 & 2 & -4 & 5 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & 0 & 5 & -10 & -4 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & -6 & 0 & 4 & -8 & -1 \end{array} \right) \sim$$
$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & -12 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & -14 & -7 \end{array} \right)$$

Spravíme poslední řádek.

Řešte soustavu rovnic

$$3x_1 - 2x_2 + 6x_3 + 2x_4 - 4x_5 = 5$$

$$x_1 + 2x_3 - x_4 + 2x_5 = 3$$

$$x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 1$$

$$2x_1 - 6x_2 + 4x_3 + 2x_4 - 4x_5 = 5$$

$$A_r \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 3 & -2 & 6 & 2 & -4 & 5 \\ 1 & 0 & 2 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & -6 & 4 & 2 & -4 & 5 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & 0 & 5 & -10 & -4 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & -6 & 0 & 4 & -8 & -1 \end{array} \right) \sim$$
$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & -12 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & -14 & -7 \end{array} \right) \begin{array}{l} \sim \\ \div 6 \\ \div 7 \end{array} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & -1 \end{array} \right)$$

Zelené řádky můžeme vydělit čísly 6 a 7.

Řešte soustavu rovnic

$$3x_1 - 2x_2 + 6x_3 + 2x_4 - 4x_5 = 5$$

$$x_1 + 2x_3 - x_4 + 2x_5 = 3$$

$$x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 1$$

$$2x_1 - 6x_2 + 4x_3 + 2x_4 - 4x_5 = 5$$

$$A_r \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 3 & -2 & 6 & 2 & -4 & 5 \\ 1 & 0 & 2 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & -6 & 4 & 2 & -4 & 5 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & 0 & 5 & -10 & -4 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & -6 & 0 & 4 & -8 & -1 \end{array} \right) \sim$$
$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & -12 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & -14 & -7 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & -1 \end{array} \right)$$

Poslední dva řádky jsou stejné a stačí dále pracovat jenom s jedním z nich.

Řešte soustavu rovnic

$$3x_1 - 2x_2 + 6x_3 + 2x_4 - 4x_5 = 5$$

$$x_1 + 2x_3 - x_4 + 2x_5 = 3$$

$$x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 1$$

$$2x_1 - 6x_2 + 4x_3 + 2x_4 - 4x_5 = 5$$

$$A_r \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & -1 \end{array} \right)$$

- Rozšířená matice soustavy má hodnost **3**, matice soustavy také. Systém proto má řešení.
- Počet parametrů je

$$\text{neznámé} - \text{hodnost} = 5 - 3 = 2.$$

Řešte soustavu rovnic

$$3x_1 - 2x_2 + 6x_3 + 2x_4 - 4x_5 = 5$$

$$x_1 + 2x_3 - x_4 + 2x_5 = 3$$

$$x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 1$$

$$2x_1 - 6x_2 + 4x_3 + 2x_4 - 4x_5 = 5$$

$$A_r \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & -1 \end{array} \right)$$

$$x_4 - 2x_5 = -1$$

Napišeme rovnici příslušnou poslednímu řádku.

Řešte soustavu rovnic

$$3x_1 - 2x_2 + 6x_3 + 2x_4 - 4x_5 = 5$$

$$x_1 + 2x_3 - x_4 + 2x_5 = 3$$

$$x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 1$$

$$2x_1 - 6x_2 + 4x_3 + 2x_4 - 4x_5 = 5$$

$$A_r \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & -1 \end{array} \right)$$

$$x_4 - 2x_5 = -1$$

$$x_5 = t$$

$$x_4 = 2t - 1$$

- Jsou zde dvě neznámé, ale jenom jedna rovnice. Jednu z neznámých volíme rovnu parametru.
- Buď tedy $x_5 = t$, kde t je libovolné reálné číslo. Vypočteme x_4 .

Řešte soustavu rovnic

$$3x_1 - 2x_2 + 6x_3 + 2x_4 - 4x_5 = 5$$

$$x_1 + 2x_3 - x_4 + 2x_5 = 3$$

$$x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 1$$

$$2x_1 - 6x_2 + 4x_3 + 2x_4 - 4x_5 = 5$$

$$A_r \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \end{array} \right)$$

$$x_4 - 2x_5 = -1$$

$$x_5 = t$$

$$x_4 = 2t - 1$$

$$2x_2 + x_4 - 2x_5 = -2$$

Napišeme rovnici odpovídající dalšímu řádku.

Řešte soustavu rovnic

$$3x_1 - 2x_2 + 6x_3 + 2x_4 - 4x_5 = 5$$

$$x_1 + 2x_3 - x_4 + 2x_5 = 3$$

$$x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 1$$

$$2x_1 - 6x_2 + 4x_3 + 2x_4 - 4x_5 = 5$$

$$A_r \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & -1 \end{array} \right)$$

$$x_4 - 2x_5 = -1$$

$$x_5 = t$$

$$x_4 = 2t - 1$$

$$2x_2 + x_4 - 2x_5 = -2$$

$$2x_2 + (2t - 1) - 2t = -2$$

Dosadíme za x_4 a x_5 . Zůstává pouze neznámá x_2 .

Řešte soustavu rovnic

$$3x_1 - 2x_2 + 6x_3 + 2x_4 - 4x_5 = 5$$

$$x_1 + 2x_3 - x_4 + 2x_5 = 3$$

$$x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 1$$

$$2x_1 - 6x_2 + 4x_3 + 2x_4 - 4x_5 = 5$$

$$A_r \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & -1 \end{array} \right)$$

$$x_4 - 2x_5 = -1$$

$$x_5 = t$$

$$x_4 = 2t - 1$$

$$2x_2 + x_4 - 2x_5 = -2$$

$$2x_2 + (2t - 1) - 2t = -2$$

$$x_2 = -\frac{1}{2}$$

Nalezneme x_2 . Dostáváme $2x_2 = -2 - 2t + 1 + 2t$ a odsud určíme x_2 .

Řešte soustavu rovnic

$$3x_1 - 2x_2 + 6x_3 + 2x_4 - 4x_5 = 5$$

$$x_1 + 2x_3 - x_4 + 2x_5 = 3$$

$$x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 1$$

$$2x_1 - 6x_2 + 4x_3 + 2x_4 - 4x_5 = 5$$

$$A_r \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & -1 \end{array} \right)$$

$$x_4 - 2x_5 = -1$$

$$x_5 = t$$

$$x_4 = 2t - 1$$

$$2x_2 + x_4 - 2x_5 = -2$$

$$2x_2 + (2t - 1) - 2t = -2$$

$$x_2 = -\frac{1}{2}$$

$$x_1 + 2x_3 - x_4 + 2x_5 = 3$$

Napišeme rovnici odpovídající prvnímu řádku.

Řešte soustavu rovnic

$$3x_1 - 2x_2 + 6x_3 + 2x_4 - 4x_5 = 5$$

$$x_1 + 2x_3 - x_4 + 2x_5 = 3$$

$$x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 1$$

$$2x_1 - 6x_2 + 4x_3 + 2x_4 - 4x_5 = 5$$

$$A_r \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & -1 \end{array} \right)$$

$$x_4 - 2x_5 = -1$$

$$x_5 = t$$

$$x_4 = 2t - 1$$

$$2x_2 + x_4 - 2x_5 = -2$$

$$2x_2 + (2t - 1) - 2t = -2$$

$$x_2 = -\frac{1}{2}$$

$$x_1 + 2x_3 - x_4 + 2x_5 = 3$$

$$x_1 + 2x_3 - (2t - 1) + 2t = 3$$

$$x_3 = u$$

- Dosadíme. Po dosazení zůstanou neznámé x_1 a x_3 . Jedna z těchto neznámých musí být parametr.
- Volme např. $x_3 = u$, kde u je libovolné reálné číslo.

Řešte soustavu rovnic

$$3x_1 - 2x_2 + 6x_3 + 2x_4 - 4x_5 = 5$$

$$x_1 + 2x_3 - x_4 + 2x_5 = 3$$

$$x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 1$$

$$2x_1 - 6x_2 + 4x_3 + 2x_4 - 4x_5 = 5$$

$$A_r \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & -1 \end{array} \right)$$

$$x_4 - 2x_5 = -1$$

$$x_5 = t$$

$$x_4 = 2t - 1$$

$$2x_2 + x_4 - 2x_5 = -2$$

$$2x_2 + (2t - 1) - 2t = -2$$

$$x_2 = -\frac{1}{2}$$

$$x_1 + 2x_3 - x_4 + 2x_5 = 3$$

$$x_1 + 2x_3 - (2t - 1) + 2t = 3$$

$$x_3 = u$$

$$x_1 + 2u - (2t - 1) + 2t = 3$$

Vypočteme x_1 .

Řešte soustavu rovnic

$$3x_1 - 2x_2 + 6x_3 + 2x_4 - 4x_5 = 5$$

$$x_1 + 2x_3 - x_4 + 2x_5 = 3$$

$$x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 1$$

$$2x_1 - 6x_2 + 4x_3 + 2x_4 - 4x_5 = 5$$

$$A_r \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & -1 \end{array} \right)$$

$$x_4 - 2x_5 = -1$$

$$x_5 = t$$

$$x_4 = 2t - 1$$

$$2x_2 + x_4 - 2x_5 = -2$$

$$2x_2 + (2t - 1) - 2t = -2$$

$$x_2 = -\frac{1}{2}$$

$$x_1 + 2x_3 - x_4 + 2x_5 = 3$$

$$x_1 + 2x_3 - (2t - 1) + 2t = 3$$

$$x_3 = u$$

$$x_1 + 2u - (2t - 1) + 2t = 3$$

$$x_1 = 2 - 2u$$

Řešení je $[2 - 2u, -\frac{1}{2}, u, 2t - 1, t]$, kde t a u jsou parametry.

Vyřešeno! Jsme šikovní.

Řešte soustavu rovnic

$$3x_1 - 2x_2 + 6x_3 + 2x_4 - 4x_5 = 5$$

$$x_1 + 2x_3 - x_4 + 2x_5 = 3$$

$$x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 1$$

$$2x_1 - 6x_2 + 4x_3 + 2x_4 - 4x_5 = 5$$

$$A_r \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & -1 \end{array} \right)$$

$$x_4 - 2x_5 = -1$$

$$x_5 = t$$

$$x_4 = 2t - 1$$

$$2x_2 + x_4 - 2x_5 = -2$$

$$2x_2 + (2t - 1) - 2t = -2$$

$$x_2 = -\frac{1}{2}$$

$$x_1 + 2x_3 - x_4 + 2x_5 = 3$$

$$x_1 + 2x_3 - (2t - 1) + 2t = 3$$

$$x_3 = u$$

$$x_1 + 2u - (2t - 1) + 2t = 3$$

$$x_1 = 2 - 2u$$

Řešení je $[2 - 2u, -\frac{1}{2}, u, 2t - 1, t]$, kde t a u jsou parametry.

Řešte soustavu

$$2x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = 1$$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 1$$

$$3x_1 + 4x_2 - x_3 + 2x_4 = 5$$

$$x_1 + 3x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 4$$

Řešte soustavu

$$2x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = 1$$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 1$$

$$3x_1 + 4x_2 - x_3 + 2x_4 = 5$$

$$x_1 + 3x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 4$$

$$A_r \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 2 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & -2 & 1 \\ 3 & 4 & -1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 3 & -2 & 4 \end{array} \right)$$

Řešte soustavu

$$2x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = 1$$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 1$$

$$3x_1 + 4x_2 - x_3 + 2x_4 = 5$$

$$x_1 + 3x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 4$$

$$A_r \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 2 & -2 & 1 & 1 \\ \textcircled{1} & 2 & 1 & -2 & 1 \\ 3 & 4 & -1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 3 & -2 & 4 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -2 & 1 \end{array} \right)$$

Druhý řádek bude klíčový, protože $a_{21} = 1$.

Řešte soustavu

$$2x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = 1$$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 1$$

$$3x_1 + 4x_2 - x_3 + 2x_4 = 5$$

$$x_1 + 3x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 4$$

$$A_r \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 2 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & -2 & 1 \\ 3 & 4 & -1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 3 & -2 & 4 \end{array} \right) \xrightarrow{(-2)} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & -4 & 5 & -1 \end{array} \right)$$

$$(-2)R_2 + R_1$$

Řešte soustavu

$$2x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = 1$$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 1$$

$$3x_1 + 4x_2 - x_3 + 2x_4 = 5$$

$$x_1 + 3x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 4$$

$$A_r \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 2 & -2 & 1 & 1 \\ \textcircled{1} & 2 & 1 & -2 & 1 \\ \textcircled{3} & 4 & -1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 3 & -2 & 4 \end{array} \right) \xrightarrow{(-3)} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & -4 & 5 & -1 \\ 0 & -2 & -4 & 8 & 2 \end{array} \right)$$

$$(-3)R_2 + R_3$$

Řešte soustavu

$$2x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = 1$$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 1$$

$$3x_1 + 4x_2 - x_3 + 2x_4 = 5$$

$$x_1 + 3x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 4$$

$$A_r \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 2 & -2 & 1 & 1 \\ \textcircled{1} & 2 & 1 & -2 & 1 \\ 3 & 4 & -1 & 2 & 5 \\ \textcircled{1} & 3 & 3 & -2 & 4 \end{array} \right) \xrightarrow{(-1)} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & -4 & 5 & -1 \\ 0 & -2 & -4 & 8 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 3 \end{array} \right)$$

$$(-1)R_2 + R_4$$

Řešte soustavu

$$2x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = 1$$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 1$$

$$3x_1 + 4x_2 - x_3 + 2x_4 = 5$$

$$x_1 + 3x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 4$$

$$A_r \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 2 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & -2 & 1 \\ 3 & 4 & -1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 3 & -2 & 4 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & -4 & 5 & -1 \\ 0 & -2 & -4 & 8 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 3 \end{array} \right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 3 \end{array} \right)$$

Dalším klíčovým řádkem bude poslední řádek, protože $a_{42} = 1$ je lepší než $a_{22} = a_{23} = -2$.

Řešte soustavu

$$2x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = 1$$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 1$$

$$3x_1 + 4x_2 - x_3 + 2x_4 = 5$$

$$x_1 + 3x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 4$$

$$A_r \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 2 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & -2 & 1 \\ 3 & 4 & -1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 3 & -2 & 4 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & -4 & 5 & -1 \\ 0 & -2 & -4 & 8 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 3 \end{array} \right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 5 \end{array} \right)$$

$$2R_4 + R_2$$

Řešte soustavu

$$2x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = 1$$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 1$$

$$3x_1 + 4x_2 - x_3 + 2x_4 = 5$$

$$x_1 + 3x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 4$$

$$A_r \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 2 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & -2 & 1 \\ 3 & 4 & -1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 3 & -2 & 4 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & -4 & 5 & -1 \\ 0 & -2 & -4 & 8 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 3 \end{array} \right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & 8 \end{array} \right)$$

$$2R_4 + R_3$$

Řešte soustavu

$$2x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = 1$$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 1$$

$$3x_1 + 4x_2 - x_3 + 2x_4 = 5$$

$$x_1 + 3x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 4$$

$$A_r \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 2 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & -2 & 1 \\ 3 & 4 & -1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 3 & -2 & 4 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & -4 & 5 & -1 \\ 0 & -2 & -4 & 8 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 3 \end{array} \right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & 8 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 3 \end{array} \right)$$

První dva řádky zůstanou.

Řešte soustavu

$$2x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = 1$$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 1$$

$$3x_1 + 4x_2 - x_3 + 2x_4 = 5$$

$$x_1 + 3x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 4$$

$$A_r \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 2 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & -2 & 1 \\ 3 & 4 & -1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 3 & -2 & 4 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & -4 & 5 & -1 \\ 0 & -2 & -4 & 8 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 3 \end{array} \right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & 8 \end{array} \right) \begin{array}{l} \sim \\ +5 \\ +8 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

Poslední řádky můžeme vydělit.

Řešte soustavu

$$2x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = 1$$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 1$$

$$3x_1 + 4x_2 - x_3 + 2x_4 = 5$$

$$x_1 + 3x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 4$$

$$A_r \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 2 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & -2 & 1 \\ 3 & 4 & -1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 3 & -2 & 4 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & -4 & 5 & -1 \\ 0 & -2 & -4 & 8 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 3 \end{array} \right) \sim$$
$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & 8 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

Poslední dva řádky jsou stejné a stačí uvažovat pouze jeden z nich. Vynecháme tedy poslední řádek.

Řešte soustavu

$$2x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = 1$$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 1$$

$$3x_1 + 4x_2 - x_3 + 2x_4 = 5$$

$$x_1 + 3x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 4$$

$$A_r \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

- Rozšířená matice soustavy je ve schodovitém tvaru.
- $h(A) = 3$, $h(A_r) = 3$, $n = 4$
- Soustava má nekonečně mnoho řešení s jedním parametrem.

Řešte soustavu

$$2x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = 1$$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 1$$

$$3x_1 + 4x_2 - x_3 + 2x_4 = 5$$

$$x_1 + 3x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 4$$

$$A_r \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \rightarrow x_4 = 1$$

Napišeme rovnici odpovídající poslednímu řádku. Tím známe x_4 .

Řešte soustavu

$$2x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = 1$$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 1$$

$$3x_1 + 4x_2 - x_3 + 2x_4 = 5$$

$$x_1 + 3x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 4$$

$$A_r \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

$$x_4 = 1$$

$$x_2 + 2x_3 = 3$$

Napišeme rovnici odpovídající prostřednímu řádku.

Řešte soustavu

$$2x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = 1$$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 1$$

$$3x_1 + 4x_2 - x_3 + 2x_4 = 5$$

$$x_1 + 3x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 4$$

$$A_r \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

$$x_4 = 1$$

$$x_2 + 2x_3 = 3$$

$$x_3 = t$$

- Ze dvou neznámých bude jedna rovna parametru.
- Necht' například $x_3 = t$, kde t je libovolné reálné číslo.

Řešte soustavu

$$2x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = 1$$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 1$$

$$3x_1 + 4x_2 - x_3 + 2x_4 = 5$$

$$x_1 + 3x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 4$$

$$A_r \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

$$x_4 = 1$$

$$x_2 + 2x_3 = 3$$

$$x_3 = t$$

$$x_2 = 3 - 2t$$

Nalezneme x_2 .

Řešte soustavu

$$2x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = 1$$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 1$$

$$3x_1 + 4x_2 - x_3 + 2x_4 = 5$$

$$x_1 + 3x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 4$$

$$A_r \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

$$x_4 = 1$$

$$x_2 + 2x_3 = 3$$

$$x_3 = t$$

$$x_2 = 3 - 2t$$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 1$$

Pokračujeme k další rovnici.

Řešte soustavu

$$2x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = 1$$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 1$$

$$3x_1 + 4x_2 - x_3 + 2x_4 = 5$$

$$x_1 + 3x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 4$$

$$A_r \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

$$x_4 = 1$$

$$x_2 + 2x_3 = 3$$

$$x_3 = t$$

$$x_2 = 3 - 2t$$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 1$$

$$x_1 + 2(3 - 2t) + t - 2 \cdot 1 = 1$$

Dosadíme za x_2 , x_3 a x_4 .

Řešte soustavu

$$2x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = 1$$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 1$$

$$3x_1 + 4x_2 - x_3 + 2x_4 = 5$$

$$x_1 + 3x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 4$$

$$A_r \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

$$x_4 = 1$$

$$x_2 + 2x_3 = 3$$

$$x_3 = t$$

$$x_2 = 3 - 2t$$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 1$$

$$x_1 + 2(3 - 2t) + t - 2 \cdot 1 = 1$$

$$x_1 - 4t + t + 4 = 1$$

Upravíme.

Řešte soustavu

$$2x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = 1$$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 1$$

$$3x_1 + 4x_2 - x_3 + 2x_4 = 5$$

$$x_1 + 3x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 4$$

$$A_r \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

$$x_4 = 1$$

$$x_2 + 2x_3 = 3$$

$$x_3 = t$$

$$x_2 = 3 - 2t$$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 1$$

$$x_1 + 2(3 - 2t) + t - 2 \cdot 1 = 1$$

$$x_1 - 4t + t + 4 = 1$$

$$x_1 - 3t = -3$$

Upravíme.

Řešte soustavu

$$2x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = 1$$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 1$$

$$3x_1 + 4x_2 - x_3 + 2x_4 = 5$$

$$x_1 + 3x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 4$$

$$A_r \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

$$x_4 = 1$$

$$x_2 + 2x_3 = 3$$

$$x_3 = t$$

$$x_2 = 3 - 2t$$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 1$$

$$x_1 + 2(3 - 2t) + t - 2 \cdot 1 = 1$$

$$x_1 - 4t + t + 4 = 1$$

$$x_1 - 3t = -3$$

$$x_1 = 3t - 3$$

Nalezneme x_1 .

Řešte soustavu

$$2x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = 1$$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 1$$

$$3x_1 + 4x_2 - x_3 + 2x_4 = 5$$

$$x_1 + 3x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 4$$

$$A_r \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

$$x_4 = 1$$

$$x_2 + 2x_3 = 3$$

$$x_3 = t$$

$$x_2 = 3 - 2t$$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 1$$

$$x_1 + 2(3 - 2t) + t - 2 \cdot 1 = 1$$

$$x_1 - 4t + t + 4 = 1$$

$$x_1 - 3t = -3$$

$$x_1 = 3t - 3$$

Řešení je

$$x_1 = -3 + 3t$$

$$x_2 = 3 - 2t$$

$$x_3 = t$$

$$x_4 = 1$$

kde $t \in \mathbb{R}$.

Řešte soustavu

$$x_1 - x_3 + 3x_4 = 0$$

$$x_1 + x_2 - x_4 - x_5 = 0$$

$$5x_1 + x_2 - 4x_3 + 3x_4 - 9x_5 = 0$$

$$x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 - 5x_5 = 0$$

Řešte soustavu

$$x_1 - x_3 + 3x_4 = 0$$

$$x_1 + x_2 - x_4 - x_5 = 0$$

$$5x_1 + x_2 - 4x_3 + 3x_4 - 9x_5 = 0$$

$$x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 - 5x_5 = 0$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -1 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 5 & 1 & -4 & 3 & -9 & 0 \\ 1 & -1 & -2 & 1 & -5 & 0 \end{array} \right)$$

Napišeme rozšířenou matici soustavy.

Řešte soustavu

$$x_1 - x_3 + 3x_4 = 0$$

$$x_1 + x_2 - x_4 - x_5 = 0$$

$$5x_1 + x_2 - 4x_3 + 3x_4 - 9x_5 = 0$$

$$x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 - 5x_5 = 0$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -1 & 3 & 0 & 0 \\ \textcircled{1} & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 5 & 1 & -4 & 3 & -9 & 0 \\ 1 & -1 & -2 & 1 & -5 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \end{array} \right)$$

Zvolíme klíčový řádek (s jedničkou na začátku a nejnižšími čísly na dalších pozicích). Tento řádek opíšeme jako první.

Řešte soustavu

$$x_1 - x_3 + 3x_4 = 0$$

$$x_1 + x_2 - x_4 - x_5 = 0$$

$$5x_1 + x_2 - 4x_3 + 3x_4 - 9x_5 = 0$$

$$x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 - 5x_5 = 0$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -1 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 5 & 1 & -4 & 3 & -9 & 0 \\ 1 & -1 & -2 & 1 & -5 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 4 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

Vynulujeme prvek a_{11} .

Řešte soustavu

$$x_1 - x_3 + 3x_4 = 0$$

$$x_1 + x_2 - x_4 - x_5 = 0$$

$$5x_1 + x_2 - 4x_3 + 3x_4 - 9x_5 = 0$$

$$x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 - 5x_5 = 0$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -1 & 3 & 0 & 0 \\ \textcircled{1} & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ \textcircled{5} & 1 & -4 & 3 & -9 & 0 \\ 1 & -1 & -2 & 1 & -5 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{-5} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -4 & 8 & -4 & 0 \end{array} \right)$$

Vynulujeme prvek a_{31} .

Řešte soustavu

$$x_1 - x_3 + 3x_4 = 0$$

$$x_1 + x_2 - x_4 - x_5 = 0$$

$$5x_1 + x_2 - 4x_3 + 3x_4 - 9x_5 = 0$$

$$x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 - 5x_5 = 0$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -1 & 3 & 0 & 0 \\ \textcircled{1} & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 5 & 1 & -4 & 3 & -9 & 0 \\ \textcircled{1} & -1 & -2 & 1 & -5 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -4 & 8 & -4 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 2 & -4 & 0 \end{array} \right)$$

Vynulujeme prvek a_{41} .

Řešte soustavu

$$x_1 - x_3 + 3x_4 = 0$$

$$x_1 + x_2 - x_4 - x_5 = 0$$

$$5x_1 + x_2 - 4x_3 + 3x_4 - 9x_5 = 0$$

$$x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 - 5x_5 = 0$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -1 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 5 & 1 & -4 & 3 & -9 & 0 \\ 1 & -1 & -2 & 1 & -5 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -4 & 8 & -4 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 2 & -4 & 0 \end{array} \right) \begin{array}{l} \sim \\ \div 4 \\ \div 2 \end{array}$$
$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & -2 & 0 \end{array} \right)$$

První dva řádky opišeme, poslední dva vydělíme společným dělitelem všech čísel v řádku.

Řešte soustavu

$$x_1 - x_3 + 3x_4 = 0$$

$$x_1 + x_2 - x_4 - x_5 = 0$$

$$5x_1 + x_2 - 4x_3 + 3x_4 - 9x_5 = 0$$

$$x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 - 5x_5 = 0$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -1 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 5 & 1 & -4 & 3 & -9 & 0 \\ 1 & -1 & -2 & 1 & -5 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -4 & 8 & -4 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 2 & -4 & 0 \end{array} \right) \sim$$
$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & -2 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 4 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

První řádek opišme, druhý řádek bude klíčový a opišme jej také.

Řešte soustavu

$$x_1 - x_3 + 3x_4 = 0$$

$$x_1 + x_2 - x_4 - x_5 = 0$$

$$5x_1 + x_2 - 4x_3 + 3x_4 - 9x_5 = 0$$

$$x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 - 5x_5 = 0$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -1 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 5 & 1 & -4 & 3 & -9 & 0 \\ 1 & -1 & -2 & 1 & -5 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -4 & 8 & -4 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 2 & -4 & 0 \end{array} \right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & -4 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & -2 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{-1} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -2 & 0 \end{array} \right)$$

Nulujeme a_{32} .

Řešte soustavu

$$x_1 - x_3 + 3x_4 = 0$$

$$x_1 + x_2 - x_4 - x_5 = 0$$

$$5x_1 + x_2 - 4x_3 + 3x_4 - 9x_5 = 0$$

$$x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 - 5x_5 = 0$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -1 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 5 & 1 & -4 & 3 & -9 & 0 \\ 1 & -1 & -2 & 1 & -5 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -4 & 8 & -4 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 2 & -4 & 0 \end{array} \right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & -2 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{-1} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -3 & 0 \end{array} \right)$$

Nulujeme a_{42} .

Řešte soustavu

$$x_1 - x_3 + 3x_4 = 0$$

$$x_1 + x_2 - x_4 - x_5 = 0$$

$$5x_1 + x_2 - 4x_3 + 3x_4 - 9x_5 = 0$$

$$x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 - 5x_5 = 0$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 5 & 1 & -4 & 3 & -9 & 0 \\ 1 & -1 & -2 & 1 & -5 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -4 & 8 & -4 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 2 & -4 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -3 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \div 2 \\ \div 3 \end{matrix}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Vydělíme poslední dva řádky společným dělitelem všech čísel v řádku.

Řešte soustavu

$$x_1 - x_3 + 3x_4 = 0$$

$$x_1 + x_2 - x_4 - x_5 = 0$$

$$5x_1 + x_2 - 4x_3 + 3x_4 - 9x_5 = 0$$

$$x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 - 5x_5 = 0$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -1 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 5 & 1 & -4 & 3 & -9 & 0 \\ 1 & -1 & -2 & 1 & -5 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -4 & 8 & -4 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 2 & -4 & 0 \end{array} \right) \sim$$
$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & -2 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -3 & 0 \end{array} \right) \sim$$
$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \end{array} \right)$$

Poslední dva řádky jsou shodné a stačí uvažovat pouze jeden z nich. Tím je matice převedena do schodovitého tvaru.

Řešte soustavu

$$x_1 - x_3 + 3x_4 = 0$$

$$x_1 + x_2 - x_4 - x_5 = 0$$

$$5x_1 + x_2 - 4x_3 + 3x_4 - 9x_5 = 0$$

$$x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 - 5x_5 = 0$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -1 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 5 & 1 & -4 & 3 & -9 & 0 \\ 1 & -1 & -2 & 1 & -5 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -4 & 8 & -4 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 2 & -4 & 0 \end{array} \right) \sim$$
$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & -2 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -3 & 0 \end{array} \right) \sim$$
$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \end{array} \right)$$

$$h(A) = 3 = h(A_r)$$

$$n = 5, \quad 2 \text{ parametry}$$

Řešte soustavu

$$x_1 - x_3 + 3x_4 = 0$$

$$x_1 + x_2 - x_4 - x_5 = 0$$

$$5x_1 + x_2 - 4x_3 + 3x_4 - 9x_5 = 0$$

$$x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 - 5x_5 = 0$$

$$A_r \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \end{array} \right)$$

Uvažujeme matici ve schodvitém tvaru.

Řešte soustavu

$$x_1 - x_3 + 3x_4 = 0$$

$$x_1 + x_2 - x_4 - x_5 = 0$$

$$5x_1 + x_2 - 4x_3 + 3x_4 - 9x_5 = 0$$

$$x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 - 5x_5 = 0$$

$$A_r \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \end{array} \right)$$

$$-x_4 - x_5 = 0$$

Prepíšeme poslední řádek jako klasickou rovnici.

Řešte soustavu

$$x_1 - x_3 + 3x_4 = 0$$

$$x_1 + x_2 - x_4 - x_5 = 0$$

$$5x_1 + x_2 - 4x_3 + 3x_4 - 9x_5 = 0$$

$$x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 - 5x_5 = 0$$

$$A_r \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \end{array} \right)$$

$$\begin{array}{l} -x_4 - x_5 = 0 \\ x_5 = t \end{array}$$

Protože neznámé v jedné rovnici jsou dvě, musí se jedna z nich rovnat parametru. Necht' například x_5 je parametr.

Řešte soustavu

$$x_1 - x_3 + 3x_4 = 0$$

$$x_1 + x_2 - x_4 - x_5 = 0$$

$$5x_1 + x_2 - 4x_3 + 3x_4 - 9x_5 = 0$$

$$x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 - 5x_5 = 0$$

$$A_r \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \end{array} \right)$$

$$-x_4 - x_5 = 0$$

$$x_5 = t$$

$$-x_4 - t = 0$$

$$x_4 = -t$$

Dosadíme parametr a vypočteme x_4 .

Řešte soustavu

$$x_1 - x_3 + 3x_4 = 0$$

$$x_1 + x_2 - x_4 - x_5 = 0$$

$$5x_1 + x_2 - 4x_3 + 3x_4 - 9x_5 = 0$$

$$x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 - 5x_5 = 0$$

$$A_r \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \end{array} \right)$$

$$-x_2 - x_3 + 4x_4 + x_5 = 0$$

$$-x_4 - x_5 = 0$$

$$x_5 = t$$

$$-x_4 - t = 0$$

$$x_4 = -t$$

Přepíšeme další řádek do tvaru rovnice.

Řešte soustavu

$$x_1 - x_3 + 3x_4 = 0$$

$$x_1 + x_2 - x_4 - x_5 = 0$$

$$5x_1 + x_2 - 4x_3 + 3x_4 - 9x_5 = 0$$

$$x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 - 5x_5 = 0$$

$$A_r \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \end{array} \right)$$

$$-x_2 - x_3 + 4x_4 + x_5 = 0$$

$$-x_2 - x_3 + 4(-t) + t = 0$$

$$-x_4 - x_5 = 0$$

$$x_5 = t$$

$$-x_4 - t = 0$$

$$x_4 = -t$$

Dosadíme všechno co jsme vypočetli dříve.

Řešte soustavu

$$x_1 - x_3 + 3x_4 = 0$$

$$x_1 + x_2 - x_4 - x_5 = 0$$

$$5x_1 + x_2 - 4x_3 + 3x_4 - 9x_5 = 0$$

$$x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 - 5x_5 = 0$$

$$A_r \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \end{array} \right)$$

$$-x_2 - x_3 + 4x_4 + x_5 = 0$$

$$-x_2 - x_3 + 4(-t) + t = 0$$

$$x_3 = s$$

$$-x_4 - x_5 = 0$$

$$x_5 = t$$

$$-x_4 - t = 0$$

$$x_4 = -t$$

Zůstaly dvě neznámé, jedna z nich musí být parametr.

Řešte soustavu

$$x_1 - x_3 + 3x_4 = 0$$

$$x_1 + x_2 - x_4 - x_5 = 0$$

$$5x_1 + x_2 - 4x_3 + 3x_4 - 9x_5 = 0$$

$$x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 - 5x_5 = 0$$

$$A_r \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \end{array} \right)$$

$$-x_2 - x_3 + 4x_4 + x_5 = 0$$

$$-x_2 - x_3 + 4(-t) + t = 0$$

$$x_3 = s$$

$$-x_2 - s - 3t = 0$$

$$-x_4 - x_5 = 0$$

$$x_5 = t$$

$$-x_4 - t = 0$$

$$x_4 = -t$$

Dosadíme parametr.

Řešte soustavu

$$x_1 - x_3 + 3x_4 = 0$$

$$x_1 + x_2 - x_4 - x_5 = 0$$

$$5x_1 + x_2 - 4x_3 + 3x_4 - 9x_5 = 0$$

$$x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 - 5x_5 = 0$$

$$A_r \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \end{array} \right)$$

$$-x_2 - x_3 + 4x_4 + x_5 = 0$$

$$-x_2 - x_3 + 4(-t) + t = 0$$

$$x_3 = s$$

$$-x_2 - s - 3t = 0$$

$$x_2 = -s - 3t$$

$$-x_4 - x_5 = 0$$

$$x_5 = t$$

$$-x_4 - t = 0$$

$$x_4 = -t$$

Vypočteme x_2 .

Řešte soustavu

$$\begin{aligned}x_1 - x_3 + 3x_4 &= 0 \\x_1 + x_2 - x_4 - x_5 &= 0 \\5x_1 + x_2 - 4x_3 + 3x_4 - 9x_5 &= 0 \\x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 - 5x_5 &= 0\end{aligned}$$

$$A_r \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \end{array} \right)$$

$$-x_2 - x_3 + 4x_4 + x_5 = 0$$

$$-x_2 - x_3 + 4(-t) + t = 0$$

$$x_3 = s$$

$$-x_2 - s - 3t = 0$$

$$x_2 = -s - 3t$$

$$-x_4 - x_5 = 0$$

$$x_5 = t$$

$$-x_4 - t = 0$$

$$x_4 = -t$$

$$x_1 + x_2 - x_4 - x_5 = 0$$

Přepíšeme zbývající řádek do tvaru rovnice.

Řešte soustavu

$$x_1 - x_3 + 3x_4 = 0$$

$$x_1 + x_2 - x_4 - x_5 = 0$$

$$5x_1 + x_2 - 4x_3 + 3x_4 - 9x_5 = 0$$

$$x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 - 5x_5 = 0$$

$$A_r \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \end{array} \right)$$

$$-x_2 - x_3 + 4x_4 + x_5 = 0$$

$$-x_2 - x_3 + 4(-t) + t = 0$$

$$x_3 = s$$

$$-x_2 - s - 3t = 0$$

$$x_2 = -s - 3t$$

$$-x_4 - x_5 = 0$$

$$x_5 = t$$

$$-x_4 - t = 0$$

$$x_4 = -t$$

$$x_1 + x_2 - x_4 - x_5 = 0$$

$$x_1 + (-s - 3t) - (-t) - t = 0$$

$$x_1 = s + 3t$$

Dosadíme vypočtené hodnoty a vyjádříme x_1 .

Řešte soustavu

$$x_1 - x_3 + 3x_4 = 0$$

$$x_1 + x_2 - x_4 - x_5 = 0$$

$$5x_1 + x_2 - 4x_3 + 3x_4 - 9x_5 = 0$$

$$x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 - 5x_5 = 0$$

$$A_r \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \end{array} \right)$$

$$-x_2 - x_3 + 4x_4 + x_5 = 0$$

$$-x_2 - x_3 + 4(-t) + t = 0$$

$$x_3 = s$$

$$-x_2 - s - 3t = 0$$

$$x_2 = -s - 3t$$

$$-x_4 - x_5 = 0$$

$$x_5 = t$$

$$-x_4 - t = 0$$

$$x_4 = -t$$

$$x_1 + x_2 - x_4 - x_5 = 0$$

$$x_1 + (-s - 3t) - (-t) - t = 0$$

$$x_1 = s + 3t$$

Soustava je vyřešena (viz. červené vztahy)

Řešte soustavu

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 & = 0 \\ x_2 + x_3 + x_4 + x_5 & = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 & = 0 \\ x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 4x_5 & = 0 \\ x_3 + 2x_4 + 3x_5 & = 0 \end{cases}$$

Řešte soustavu

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 4x_5 = 0 \\ x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 0 \end{cases}$$

$$A_r \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \end{array} \right)$$

Řešte soustavu

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 4x_5 = 0 \\ x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 0 \end{cases}$$

$$A_r \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \end{array} \right)$$

První řádek bude klíčový řádek.

Řešte soustavu

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 4x_5 = 0 \\ x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 0 \end{cases}$$

$$A_r \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \end{array} \right)$$

Druhý řádek zůstává, má už nulu na začátku.

Řešte soustavu

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 4x_5 = 0 \\ x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 0 \end{cases}$$

$$A_r \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{(-1)} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Řešte soustavu

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 4x_5 = 0 \\ x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 0 \end{cases}$$

$$A_r \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \end{array} \right)$$

Čtvrtý řádek zůstává, má už nulu na začátku.

Řešte soustavu

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 4x_5 = 0 \\ x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 0 \end{cases}$$

$$A_r \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \end{array} \right)$$

Poslední řádek zůstává, má už nulu na začátku.

Řešte soustavu

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 4x_5 = 0 \\ x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 0 \end{cases}$$

$$A_r \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \end{array} \right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

První řádek zůstane a druhý řádek bude nový klíčový řádek.

Řešte soustavu

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 4x_5 = 0 \\ x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 0 \end{cases}$$

$$A_r \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 & 0 \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 & 0 \end{array} \right)$$

Řešte soustavu

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 4x_5 = 0 \\ x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 0 \end{cases}$$

$$A_r \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \end{array} \right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \end{array} \right)$$

Řešte soustavu

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 4x_5 = 0 \\ x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 0 \end{cases}$$

$$A_r \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \end{array} \right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \end{array} \right)$$

Poslední řádek již má dvě nuly na začátku a ponecháme jej tedy beze změny.

Řešte soustavu

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 4x_5 = 0 \\ x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 0 \end{cases}$$

$$A_r \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \end{array} \right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 & 0 \end{array} \right)$$

Poslední dva řádky jsou stejné a jeden z nich lze vynechat. První tři řádky zůstanou a třetí z nich bude nový klíčový řádek.

Řešte soustavu

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 4x_5 = 0 \\ x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 0 \end{cases}$$

$$A_r \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \end{array} \right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{(-1)} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 4 & 0 \end{array} \right)$$

Řešte soustavu

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 4x_5 = 0 \\ x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 0 \end{cases}$$

$$A_r \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \end{array} \right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 4 & 0 \end{array} \right)$$

Matice je ve schodovitém tvaru, $h(A) = h(A_r) = 4$ a soustava má nekonečně mnoho řešení závislých na $(5 - 4) = 1$ parametru.

Řešte soustavu

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 4x_5 = 0 \\ x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 0 \end{cases}$$

$$A_r \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 4 & 0 \end{array} \right)$$

Řešte soustavu

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 4x_5 = 0 \\ x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 0 \end{cases}$$

$$A_r \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 4 & 0 \end{array} \right)$$

$$4x_4 + 4x_5 = 0$$

$$x_4 + x_5 = 0$$

$$x_5 = t$$

$$x_4 = -t$$

Řešte soustavu

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 4x_5 = 0 \\ x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 0 \end{cases}$$

$$A_r \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 4 & 0 \end{array} \right)$$

$$x_3 - 2x_4 - x_5 = 0$$

$$x_3 - 2(-t) - t = 0$$

$$x_3 = -t$$

$$4x_4 + 4x_5 = 0$$

$$x_4 + x_5 = 0$$

$$x_5 = t$$

$$x_4 = -t$$

Řešte soustavu

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 4x_5 = 0 \\ x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 0 \end{cases}$$

$$A_r \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 4 & 0 \end{array} \right)$$

$$x_3 - 2x_4 - x_5 = 0$$

$$x_3 - 2(-t) - t = 0$$

$$x_3 = -t$$

$$4x_4 + 4x_5 = 0$$

$$x_4 + x_5 = 0$$

$$x_5 = t$$

$$x_4 = -t$$

$$x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0$$

$$x_2 + (-t) + (-t) + t = 0$$

$$x_2 = t$$

Řešte soustavu

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 4x_5 = 0 \\ x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 0 \end{cases}$$

$$A_r \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 4 & 0 \end{array} \right)$$

$$4x_4 + 4x_5 = 0$$

$$x_4 + x_5 = 0$$

$$x_5 = t$$

$$x_4 = -t$$

$$x_3 - 2x_4 - x_5 = 0$$

$$x_3 - 2(-t) - t = 0$$

$$x_3 = -t$$

$$x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0$$

$$x_2 + (-t) + (-t) + t = 0$$

$$x_2 = t$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$$

$$x_1 + t + (-t) + (-t) = 0$$

$$x_1 = t$$

Řešení: $[t, t, -t, -t, t]$, kde $t \in \mathbb{R}$ je parametr.

Řešte soustavu

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 4x_5 = 0 \\ x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 0 \end{cases}$$

$$A_r \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 4 & 0 \end{array} \right)$$

$$4x_4 + 4x_5 = 0$$

$$x_4 + x_5 = 0$$

$$x_5 = t$$

$$x_4 = -t$$

$$x_3 - 2x_4 - x_5 = 0$$

$$x_3 - 2(-t) - t = 0$$

$$x_3 = -t$$

$$x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0$$

$$x_2 + (-t) + (-t) + t = 0$$

$$x_2 = t$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$$

$$x_1 + t + (-t) + (-t) = 0$$

$$x_1 = t$$

Řešení: $[t, t, -t, -t, t]$, kde $t \in \mathbb{R}$ je parametr.

3 Determinant

Definice (determinant). Bud' $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ čtvercová matice řádu n . *Determinant matice* A je reálné číslo $\det A$ přiřazené matici A následujícím způsobem:

- Je-li A matice řádu 1, tj. $A = (a_{11})$, je $\det A = a_{11}$.
- Máme-li definován determinant z matice řádu $(n - 1)$ označme symbolem M_{ij} determinant matice řádu $(n - 1)$, která vznikne z matice A vynecháním i -tého řádku a j -tého sloupce. Definujme *algebraický doplněk* A_{ij} prvku a_{ij} jako součin $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$.
- Konečně, definujme determinant řádu n následovně: zvolíme libovolný index $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ a definujeme

$$\det A = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \dots + a_{in}A_{in}. \quad (3)$$

Píšeme též $|A|$ a je-li $A = (a_{ij})$, píšeme zkráceně $|a_{ij}|$.

Najděte následující determinant

$$\begin{vmatrix} a & b \\ i & j \end{vmatrix} = a(-1)^{1+1}|j| + b(-1)^{1+2}|i| = aj - bi$$

Determinant 2×2 tedy počítáme tak, že násobíme prvky v hlavní diagonále a odečteme součin prvků ve vedlejší diagonále.

Najděte následující determinant

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a & b & c \\ i & j & k \\ x & y & z \end{vmatrix} &= a(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} j & k \\ y & z \end{vmatrix} + b(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} i & k \\ x & z \end{vmatrix} + c(-1)^{1+3} \begin{vmatrix} i & j \\ x & y \end{vmatrix} \\ &= a(jz - ky) - b(iz - kx) + c(iy - jx) \\ &= ajz - ak y - biz + bkx + ciy - cjx \end{aligned}$$

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ i & j & k \\ x & y & z \\ a & b & c \\ i & j & k \end{vmatrix} = ajz + iyc + xbk - (cjx + kya + zbi)$$

Definice (regulární a singulární matice). Bud' A čtvercová matice. Je-li $\det A = 0$, říkáme, že matice A je *singulární*, v opačném případě říkáme, že je *regulární*.

Věta 6 (determinant matice ve schodovitém tvaru). Determinant matice, která je ve schodovitém tvaru je roven součinu prvků v hlavní diagonále.

Věta 7 (operace zachovávající hodnotou determinantu). Následující operace nemění hodnotu determinantu matice:

- přičtení lineární kombinace ostatních řádků (sloupců) k jinému řádku (sloupci)
- ponechání jednoho řádku (sloupce) beze změny a opakované přičtení libovolných násobků tohoto řádku (sloupce) k ostatním řádkům (sloupcům) matice
- transponování matice

Věta 8 (další operace s determinantem). Následující operace mění hodnotu determinantu popsáním způsobem:

- přehozením dvou řádků (sloupců) determinant mění znaménko
- vydělíme-li jeden řádek (sloupec) nenulovým číslem a , zmenší se hodnota determinantu a -krát

Poznámka 5. Podle předchozí věty, platí

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 8 \\ -1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 12 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 12 \end{vmatrix} = 2 \cdot 4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}.$$

Poznámka 6 (Laplaceova věta pro sloupce).

$$\det A = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj},$$

Poznámka 7. Řádek nebo sloupec, podle kterého provádíme rozvoj, je vhodné volit tak, aby obsahoval co nejvíce nulových prvků.

Vypočtěte následující determinant.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & -4 \end{vmatrix}$$

Vypočtěte následující determinant.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & -4 \end{vmatrix} = (-2) \cdot (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -4 \end{vmatrix}$$

Rozvoj: prvek $\cdot (-1)^{\text{řádek+slopec}}$ \cdot (determinant nižšího řádu)

Vypočtěte následující determinant.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & -4 \end{vmatrix} = (-2) \cdot (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -4 \end{vmatrix}$$
$$= (-2) \cdot (-1) \cdot (-4 + 4 + 0 - (2 + 0 + 8))$$
$$= -20$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -4 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

Vypočtěte následující determinant.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & -4 \end{vmatrix}$$

Vypočteme ten stejný determinant rozvojem podle posledního sloupce.

Vypočtěte následující determinant.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & -4 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-1)^{1+4} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} \\ + (-4) \cdot (-1)^{4+4} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \end{vmatrix}$$

Poslední sloupec obsahuje dva nenulové prvky a rozvoj tedy bude obsahovat dva determinanty nižšího řádu.

Vypočtěte následující determinant.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & -4 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-1)^{1+4} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} \\ + (-4) \cdot (-1)^{4+4} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \end{vmatrix} \\ = (-2) \cdot [-4 + 0 + 0 - (-2 + 0 + 0)] \\ - 4 \cdot [0 + 4 + 0 - (0 - 2 + 0)] \\ = (-2) \cdot (-2) - 4 \cdot 6 = -20$$

Determinanty třetího řádu dopočítáme Sarusovým pravidlem.

Vypočtěte následující determinant.

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & -3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & -1 \\ 1 & -4 & 8 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

Vypočtěte následující determinant.

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & -3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & -1 \\ 1 & -4 & 8 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 & -1 \end{vmatrix}$$

Druhý řádek bude klíčový.

Vypočtěte následující determinant.

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & -3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & -1 \\ 1 & -4 & 8 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} \stackrel{(-2)}{=} \begin{vmatrix} 0 & -8 & -9 & 5 \\ 1 & 4 & 3 & -1 \\ 1 & -4 & 8 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

Upravíme první řádek. Pozor! Řádky nepřehazujeme.

Vypočtěte následující determinant.

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & -3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & -1 \\ 1 & -4 & 8 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ (-1) \\ - \\ \end{matrix} \begin{vmatrix} 0 & -8 & -9 & 5 \\ 1 & 4 & 3 & -1 \\ 0 & -8 & 5 & 1 \end{vmatrix}$$

Upravíme třetí řádek.

Vypočtěte následující determinant.

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & -3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & -1 \\ 1 & -4 & 8 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -8 & -9 & 5 \\ 1 & 4 & 3 & -1 \\ 0 & -8 & 5 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

Poslední řádek pouze opišeme.

Vypočtěte následující determinant.

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & -3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & -1 \\ 1 & -4 & 8 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -8 & -9 & 5 \\ 1 & 4 & 3 & -1 \\ 0 & -8 & 5 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} -8 & -9 & 5 \\ -8 & 5 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

- Vytvoříme Laplaceův rozvoj podle prvního sloupce.
- Červený prvek zůstane, bude vynásoben výrazem $(-1)^{\text{řádek} + \text{slopec}}$.
- Vynecháme první sloupec a druhý řádek.

Vypočtěte následující determinant.

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & -3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & -1 \\ 1 & -4 & 8 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -8 & -9 & 5 \\ 1 & 4 & 3 & -1 \\ 0 & -8 & 5 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} -8 & -9 & 5 \\ -8 & 5 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$
$$= -1 \left[-8 \cdot 5 \cdot 2 + (-8) \cdot (-1) \cdot 5 + 3 \cdot (-9) \cdot 1 \right. \\ \left. - (5 \cdot 5 \cdot 3 + 1 \cdot (-1) \cdot (-8) + 2 \cdot (-9) \cdot (-8)) \right]$$

$$\begin{vmatrix} -8 & -9 & 5 \\ -8 & 5 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ -8 & -9 & 5 \\ -8 & 5 & 1 \end{vmatrix}$$

Vypočtěte následující determinant.

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & -3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & -1 \\ 1 & -4 & 8 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -8 & -9 & 5 \\ 1 & 4 & 3 & -1 \\ 0 & -8 & 5 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} -8 & -9 & 5 \\ -8 & 5 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$
$$= -1 \left[-8 \cdot 5 \cdot 2 + (-8) \cdot (-1) \cdot 5 + 3 \cdot (-9) \cdot 1 \right. \\ \left. - (5 \cdot 5 \cdot 3 + 1 \cdot (-1) \cdot (-8) + 2 \cdot (-9) \cdot (-8)) \right]$$
$$= -1 \left[-80 + 40 - 27 - (75 + 8 + 144) \right]$$

Vypočtěte následující determinant.

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 2 & 0 & -3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & -1 \\ 1 & -4 & 8 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 0 & -8 & -9 & 5 \\ 1 & 4 & 3 & -1 \\ 0 & -8 & 5 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} -8 & -9 & 5 \\ -8 & 5 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} \\ &= -1 \left[-8 \cdot 5 \cdot 2 + (-8) \cdot (-1) \cdot 5 + 3 \cdot (-9) \cdot 1 \right. \\ &\quad \left. - (5 \cdot 5 \cdot 3 + 1 \cdot (-1) \cdot (-8) + 2 \cdot (-9) \cdot (-8)) \right] \\ &= -1 \left[-80 + 40 - 27 - (75 + 8 + 144) \right] \\ &= - \left[-67 - 227 \right] \end{aligned}$$

Vypočtěte následující determinant.

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 2 & 0 & -3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & -1 \\ 1 & -4 & 8 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 0 & -8 & -9 & 5 \\ 1 & 4 & 3 & -1 \\ 0 & -8 & 5 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} -8 & -9 & 5 \\ -8 & 5 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} \\ &= -1 \left[-8 \cdot 5 \cdot 2 + (-8) \cdot (-1) \cdot 5 + 3 \cdot (-9) \cdot 1 \right. \\ &\quad \left. - (5 \cdot 5 \cdot 3 + 1 \cdot (-1) \cdot (-8) + 2 \cdot (-9) \cdot (-8)) \right] \\ &= -1 \left[-80 + 40 - 27 - (75 + 8 + 144) \right] \\ &= - \left[-67 - 227 \right] = 294 \end{aligned}$$

Vypočtěte následující determinant.

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & -1 \end{vmatrix}$$

Vypočtěte následující determinant.

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ & & & \\ & & & \end{vmatrix}$$

- **Druhý řádek** bude klíčový a budeme vytvářet nuly ve třetím sloupci (obsahuje už jednu nulu a obsahuje nejmenší čísla).
- **První řádek** už nulu ve třetím sloupci má, takže jej jenom opíšeme.
- Dáváme pozor na to, abychom nezaměnili pořadí řádků.

Vypočtěte následující determinant.

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & -1 \end{vmatrix} \xrightarrow{(-1)} \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Vytvoříme nulu z prvku a_{33} .

Vypočtěte následující determinant.

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & -1 \end{vmatrix} \xrightarrow{(-2)} \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & -3 \end{vmatrix}$$

Vytvoříme nulu z prvku a_{43} .

Vypočtěte následující determinant.

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 0 \\ -1 & -2 & -3 \end{vmatrix}$$

Rozvineme determinant podle třetího sloupce.
prvek $\cdot (-1)^{\text{řádek} + \text{slopec}}$ \cdot (determinant nižšího řádu)

Vypočtěte následující determinant.

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 0 \\ -1 & -2 & -3 \end{vmatrix}$$
$$= -1 \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & -3 \end{vmatrix}$$

Vytkneme číslo 2 ve druhém řádku.

Vypočtěte následující determinant.

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 0 \\ -1 & -2 & -3 \end{vmatrix} \\ = -1 \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & -3 \end{vmatrix} \\ = -2 \cdot [-6 - 8 + 0 - (-4 + 0 - 9)]$$

Použijeme Sarusovo pravidlo:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & -3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

Vypočtěte následující determinant.

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 0 \\ -1 & -2 & -3 \end{vmatrix} \\ = -1 \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & -3 \end{vmatrix} \\ = -2 \cdot [-6 - 8 + 0 - (-4 + 0 - 9)] = -2 \cdot (-1) = 2$$

4 Inverzní matice

Definice (inverzní matice). Bud' $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ čtvercová matice řádu n . Jestliže existuje čtvercová matice A^{-1} řádu n , splňující vztahy $A^{-1}A = I = AA^{-1}$, nazýváme matici A^{-1} *inverzní maticí k matici A* .

Poznámka 8 (metoda výpočtu). Čtvercovou matici A převedeme pomocí *řádkových* úprav totožných s úpravami zachovávajícími hodnotu matice na matici jednotkovou. Tytéž úpravy současně provádíme na jednotkové matici a z jednotkové matice takto vznikne matice inverzní A^{-1} .

Věta 9 (existence inverzní matice). Nechť matice A je čtvercová. Potom inverzní matice A^{-1} existuje právě tehdy, když je matice A regulární, tj. $\det(A) \neq 0$.

Inverzní matice je “protijed” k maticovému násobení

$$A \cdot X = B$$

Inverzní matice je “protijed” k maticovému násobení

$$A \cdot X = B$$

$$A^{-1} \cdot (A \cdot X) = A^{-1} \cdot B$$

Vynásobíme zleva maticí inverzní.

Inverzní matice je “protijed” k maticovému násobení

$$A \cdot X = B$$

$$A^{-1} \cdot (A \cdot X) = A^{-1} \cdot B$$

$$(A^{-1} \cdot A) \cdot X = A^{-1} \cdot B$$

Použijeme asociativní zákon pro násobení.

Inverzní matice je “protijed” k maticovému násobení

$$A \cdot X = B$$

$$A^{-1} \cdot (A \cdot X) = A^{-1} \cdot B$$

$$(A^{-1} \cdot A) \cdot X = A^{-1} \cdot B$$

$$I \cdot X = A^{-1} \cdot B$$

Použijeme definici inverzní matice.

Inverzní matice je “protijed” k maticovému násobení

$$A \cdot X = B$$

$$A^{-1} \cdot (A \cdot X) = A^{-1} \cdot B$$

$$(A^{-1} \cdot A) \cdot X = A^{-1} \cdot B$$

$$I \cdot X = A^{-1} \cdot B$$

$$X = A^{-1} \cdot B$$

- Jednotková matice je neutrálním prvkem vzhledem k násobení.
- Teď už vidíme, že pokud bychom násobili inverzní maticí zprava, obdrželi bychom vztah

$$A \cdot X \cdot A^{-1} = B \cdot A^{-1},$$

ze kterého hledané X nelze tak snadno vyjádřit.

K dané matici A určete matici inverzní A^{-1} .

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -4 & -17 \\ -1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & -6 \end{pmatrix}$$

K dané matici A určete matici inverzní A^{-1} .

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -4 & -17 \\ -1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & -6 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 6 & -4 & -17 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -6 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

Zapišeme matici A a jednotkovou matici vedle sebe.

K dané matici A určete matici inverzní A^{-1} .

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -4 & -17 \\ -1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & -6 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 6 & -4 & -17 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -6 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

Druhý řádek volíme jako klíčový, protože číslo -1 je vhodnější pro vytváření nul než čísla 6 a 2 . Klíčový řádek píšeme jako první.

K dané matici A určete matici inverzní A^{-1} .

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -4 & -17 \\ -1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & -6 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 6 & -4 & -17 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -6 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 6 & 0 \end{array} \right)$$

Upravíme prvek $a_{11} = 6$ na nulu.

K dané matici A určete matici inverzní A^{-1} .

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -4 & -17 \\ -1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & -6 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 6 & -4 & -17 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -6 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{2} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{array} \right)$$

Upravíme prvek $a_{31} = 2$ na nulu.

K dané matici A určete matici inverzní A^{-1} .

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -4 & -17 \\ -1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & -6 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 6 & -4 & -17 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -6 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{array} \right)$$
$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{array} \right)$$

Nový klíčový řádek bude třetí řádek. Napíšeme jej jako druhý v pořadí.

K dané matici A určete matici inverzní A^{-1} .

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -4 & -17 \\ -1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & -6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 6 & -4 & -17 & | & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 3 & | & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -6 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & | & 1 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ (-1) \end{matrix}$$
$$\sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 & | & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Upravíme prvek $a_{12} = 1$ na nulu.

K dané matici A určete matici inverzní A^{-1} .

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -4 & -17 \\ -1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & -6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 6 & -4 & -17 & | & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 3 & | & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -6 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & | & 1 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ (-2) \end{matrix}$$
$$\sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 & | & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

Upravíme prvek $a_{22} = 2$ na nulu.

K dané matici A určete matici inverzní A^{-1} .

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -4 & -17 \\ -1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & -6 \end{pmatrix}$$
$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 6 & -4 & -17 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -6 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{array} \right)$$
$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 3 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & -2 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} & & & & & \\ & & & & & \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & -2 \end{array} \right)$$

Nový klíčový řádek bude řádek poslední.

K dané matici A určete matici inverzní A^{-1} .

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -4 & -17 \\ -1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & -6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 6 & -4 & -17 & | & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 3 & | & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -6 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & | & 1 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \\ \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 & | & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & | & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

Druhý řádek zůstane, má nulu na místě a_{23} .

K dané matici A určete matici inverzní A^{-1} .

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -4 & -17 \\ -1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & -6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 6 & -4 & -17 & | & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 3 & | & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -6 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & | & 1 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \\ \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 & | & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 3 & 7 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

Upravíme prvek $a_{13} = 3$ na nulu.

K dané matici A určete matici inverzní A^{-1} .

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -4 & -17 \\ -1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & -6 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 6 & -4 & -17 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -6 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{array} \right) \\ \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 3 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & -2 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & 7 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & -2 \end{array} \right)$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 7 & -5 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

Matrice vlevo je ve schodovitém tvaru a inverzní matice je tedy napravo.

K dané matici A najděte matici inverzní A^{-1} .

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

K dané matici A najděte matici inverzní A^{-1} .

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

Začneme se zadanou maticí a s 3×3 jednotkovou maticí.

K dané matici A najděte matici inverzní A^{-1} .

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ \mathbf{1} & \mathbf{-1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ 1 & 2 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

K dané matici A najděte matici inverzní A^{-1} .

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 6 \end{pmatrix} \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ \mathbf{1} & \mathbf{-1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ 1 & 2 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{matrix} \\ (-1) \\ \end{matrix}$$
$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{3} & \mathbf{1} & \mathbf{-1} & \mathbf{0} \end{array} \right)$$

Upravíme $a_{11} = 1$ na nulu.

K dané matici A najděte matici inverzní A^{-1} .

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 6 \end{pmatrix} \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ \mathbf{1} & \mathbf{-1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ 1 & 2 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{matrix} \\ (-1) \\ \end{matrix}$$
$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & \mathbf{3} & \mathbf{5} & \mathbf{0} & \mathbf{-1} & \mathbf{1} \end{array} \right)$$

Upravíme $a_{31} = 1$ na nulu.

K dané matici A najděte matici inverzní A^{-1} .

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 6 \end{pmatrix} \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$
$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & 0 & -1 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 3 & 1 & -1 & 0 \end{array} \right)$$

K dané matici A najděte matici inverzní A^{-1} .

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 6 \end{pmatrix} \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$
$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ \color{red}{0} & \color{red}{1} & \color{red}{3} & \color{red}{1} & \color{red}{-1} & \color{red}{0} \\ 0 & 3 & 5 & 0 & -1 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} \color{blue}{1} & \color{blue}{0} & \color{blue}{4} & \color{blue}{1} & \color{blue}{0} & \color{blue}{0} \\ 0 & 1 & 3 & 1 & -1 & 0 \end{array} \right)$$

Upravíme $a_{12} = -1$ na nulu.

K dané matici A najděte matici inverzní A^{-1} .

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 6 \end{pmatrix} \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$
$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{3} & \mathbf{1} & \mathbf{-1} & \mathbf{0} \\ 0 & 3 & 5 & 0 & -1 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{(-3)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -3 & 2 & 1 \end{array} \right)$$

Upravíme prvek $a_{32} = 3$ na nulu.

K dané matici A najděte matici inverzní A^{-1} .

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 6 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & | & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & | & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 6 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \sim & \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & | & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & | & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} & \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & | & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & | & -3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \\ \sim & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & | & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & | & 3 & -2 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

K dané matici A najděte matici inverzní A^{-1} .

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 6 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & | & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & | & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 6 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \sim & \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & | & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & | & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} & \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & | & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & | & -3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \left. \begin{matrix} 4 \\ 3 \end{matrix} \right\} \end{matrix} \\ \sim & \begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 & | & -5 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & | & 3 & -2 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Upravíme $a_{23} = 3$ na nulu.

K dané matici A najděte matici inverzní A^{-1} .

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 6 \end{pmatrix} \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$
$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & 0 & -1 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -3 & 2 & 1 \end{array} \right)$$
$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & -5 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 3 & -2 & -1 \end{array} \right)$$

Upravíme prvek $a_{13} = 4$ na nulu.

K dané matici A najděte matici inverzní A^{-1} .

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 6 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & | & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & | & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 6 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \sim & \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & | & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & | & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} & \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & | & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & | & -3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \\ \sim & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & | & -5 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & | & 3 & -2 & -1 \end{pmatrix} \\ \sim & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & | & -5/4 & 2/4 & 3/4 \\ 0 & 0 & 1 & | & 3/4 & -2/4 & -1/4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Vydělíme.

K dané matici A najděte matici inverzní A^{-1} .

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 6 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & | & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & | & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 6 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \sim & \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & | & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & | & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} & \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & | & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & | & -3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \\ \sim & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & | & -5 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & | & 3 & -2 & -1 \end{pmatrix} \\ \sim & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & | & -5/4 & 2/4 & 3/4 \\ 0 & 0 & 1 & | & 3/4 & -2/4 & -1/4 \end{pmatrix} & ; A^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -8 & 8 & 4 \\ -5 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Inverzní matice vznikla v pravé polovině. Z této matice lze vytknout společný jmenovatel $\frac{1}{4}$.

5 Shrnutí

Věta 10. Buď A čtvercová matice řádu n . Následující výroky jsou ekvivalentní:

- Řádky matice jsou tvořeny lineárně nezávislými vektory z \mathbb{R}^n .
- Sloupce matice jsou tvořeny lineárně nezávislými vektory z \mathbb{R}^n .
- Hodnota matice A je rovna n , tj. $h(A) = n$
- Matice A je invertibilní, tj. existuje matice A^{-1} k ní inverzní.
- Matice A je regulární, tj. $\det A \neq 0$.
- Soustava lineárních rovnic, jejíž matice soustavy je matice A , má pro libovolnou volbu koeficientů na pravých stranách rovnic jediné řešení.
- Homogenní soustava lineárních rovnic, jejíž matice soustavy je matice A , má pouze triviální řešení.
- Každý algebraický vektor z \mathbb{R}^n lze vyjádřit jako lineární kombinaci vektorů tvořených řádky (sloupci) matice A , a to jednoznačně, až na pořadí.

Věta 11. Uvažujme soustavu lineárních rovnic v maticovém tvaru $A\vec{x} = \vec{b}$. Předpokládejme, že k matici A existuje inverzní matice A^{-1} . Potom má soustava jediné řešení, jehož jednotlivé složky jsou prvky sloupcového vektoru $A^{-1} \cdot \vec{b}$, kde uvedený součin chápeme v maticovém smyslu.

KONEC