

INŽENÝRSKÁ MATEMATIKA

LOKÁLNÍ EXTRÉMY

FUNKCÍ DVOU PROMĚNNÝCH

Robert Mařík

2. října 2009

Obsah

$z = x^4 + y^4 - 4xy + 30$	3
$z = x^2y^2 - x^2 - y^2$	18
$z = y \ln(x^2 + y)$	47

Najděte lokální extrémy funkce $z = x^4 + y^4 - 4xy + 30$

Najděte lokální extrémů funkce $z = x^4 + y^4 - 4xy + 30$

$$z'_x = 4x^3 - 4y \quad , \quad z'_y = 4y^3 - 4x \quad ,$$

- Vypočteme parciální derivace.
- Při derivování podle x považujeme y za konstantu a naopak.

Najděte lokální extrémů funkce $z = x^4 + y^4 - 4xy + 30$

$$z'_x = 4x^3 - 4y = 0, \quad z'_y = 4y^3 - 4x = 0,$$

Hledáme stacionární body.

Najděte lokální extrémy funkce $z = x^4 + y^4 - 4xy + 30$

$$z'_x = 4x^3 - 4y = 0, \quad z'_y = 4y^3 - 4x = 0,$$

$$4x^3 - 4y = 0,$$

$$4y^3 - 4x = 0.$$

Toto je soustava, kterou řešíme.

Najděte lokální extrémů funkce $z = x^4 + y^4 - 4xy + 30$

$$z'_x = 4x^3 - 4y = 0, \quad z'_y = 4y^3 - 4x = 0,$$

$$4x^3 - 4y = 0,$$

$$4y^3 - 4x = 0.$$

$$y = x^3$$

Osamostatníme y z první rovnice.

Najděte lokální extrémů funkce $z = x^4 + y^4 - 4xy + 30$

$$z'_x = 4x^3 - 4y = 0, \quad z'_y = 4y^3 - 4x = 0,$$

$$4x^3 - 4y = 0,$$

$$4y^3 - 4x = 0.$$

$$y = x^3$$

$$4(x^3)^3 - 4x = 0,$$

Dosadíme za y do druhé rovnice.

Najděte lokální extrémy funkce $z = x^4 + y^4 - 4xy + 30$

$$z'_x = 4x^3 - 4y = 0, \quad z'_y = 4y^3 - 4x = 0,$$

$$4x^3 - 4y = 0,$$

$$4y^3 - 4x = 0.$$

$$y = x^3$$

$$4(x^3)^3 - 4x = 0,$$

$$4x^9 - 4x = 0,$$

Upravíme.

Najděte lokální extrémů funkce $z = x^4 + y^4 - 4xy + 30$

$$z'_x = 4x^3 - 4y = 0, \quad z'_y = 4y^3 - 4x = 0,$$

$$4x^3 - 4y = 0,$$

$$4y^3 - 4x = 0.$$

$$y = x^3$$

$$4(x^3)^3 - 4x = 0,$$

$$x^9 - x = 0,$$

$$x(x^8 - 1) = 0.$$

Rozložíme na součin.

Najděte lokální extrémů funkce $z = x^4 + y^4 - 4xy + 30$

$$z'_x = 4x^3 - 4y = 0, \quad z'_y = 4y^3 - 4x = 0,$$

$$4x^3 - 4y = 0,$$

$$4y^3 - 4x = 0.$$

$$y = x^3$$

$$4(x^3)^3 - 4x = 0,$$

$$x^9 - x = 0,$$

$$x(x^8 - 1) = 0.$$

Případ 1:

$$x = 0,$$

Případ 2:

$$x = 1,$$

Případ 3:

$$x = -1,$$

- Buď $x = 0$, nebo $(x^8 - 1) = 0$.
- Druhý případ dává $x^8 = 1$ a $x = \pm 1$.
- Uvažujme tedy tři různé případy

Najděte lokální extrémy funkce $z = x^4 + y^4 - 4xy + 30$

$$z'_x = 4x^3 - 4y = 0, \quad z'_y = 4y^3 - 4x = 0,$$

$$4x^3 - 4y = 0,$$

$$4y^3 - 4x = 0.$$

$$4(x^3)^3 - 4x = 0,$$

$$x^9 - x = 0,$$

$$x(x^8 - 1) = 0.$$

$$y = x^3$$

Případ 1:

$$x = 0, y = 0$$

$$S_1 = [0, 0],$$

Případ 2:

$$x = 1, y = 1$$

$$S_2 = [1, 1],$$

Případ 3:

$$x = -1, y = -1$$

$$S_3 = [-1, -1].$$

Najdeme odpovídající y ke každému x ($y = x^3$). Dostáváme tři stacionární body.

Najděte lokální extrémy funkce $z = x^4 + y^4 - 4xy + 30$

$$z'_x = 4x^3 - 4y \quad , \quad z'_y = 4y^3 - 4x \quad ,$$

$$S_1 = [0, 0], \quad S_2 = [1, 1],$$

$$S_3 = [-1, -1].$$

$$z''_{xx} = 12x^2, \quad z''_{xy} = -4, \quad z''_{yy} = 12y^2.$$

- Funkce má tři stacionární body.
- Kvalitu těchto stacionárních bodů vyšetříme pomocí druhé derivace a Hessiánu.

Najděte lokální extrémy funkce $z = x^4 + y^4 - 4xy + 30$

$$z'_x = 4x^3 - 4y, \quad z'_y = 4y^3 - 4x,$$

$$S_1 = [0, 0], \quad S_2 = [1, 1],$$

$$S_3 = [-1, -1].$$

$$z''_{xx} = 12x^2, \quad z''_{xy} = -4, \quad z''_{yy} = 12y^2.$$

$$H(S_1) = \begin{vmatrix} 0 & -4 \\ -4 & 0 \end{vmatrix} = -16 < 0, \text{ sedlo v bodě } [0, 0]$$

- Vypočteme Hessián ve stacionárním bodě S_1 .
- Hessián je záporný a funkce v tomto bodě nemá lokální extrém.

Najděte lokální extrémy funkce $z = x^4 + y^4 - 4xy + 30$

$$z'_x = 4x^3 - 4y, \quad z'_y = 4y^3 - 4x,$$

$$S_1 = [0, 0],$$

$$S_2 = [1, 1],$$

$$S_3 = [-1, -1].$$

$$z''_{xx} = 12x^2, \quad z''_{xy} = -4, \quad z''_{yy} = 12y^2.$$

$$H(S_1) = \begin{vmatrix} 0 & -4 \\ -4 & 0 \end{vmatrix} = -16 < 0, \text{ sedlo v bodě } [0, 0]$$

$$H(S_2) = \begin{vmatrix} 12 & -4 \\ -4 & 12 \end{vmatrix} = 12^2 - 16 > 0, \text{ lok. min. v bodě } [1, 1]$$

- V bodě S_2 je Hessián kladný a funkce zde má lokální extrém.
- Protože $z''_{xx} = 16 > 0$, funkce má v bodě S_2 lokální minimum.

Najděte lokální extrémy funkce $z = x^4 + y^4 - 4xy + 30$

$$z'_x = 4x^3 - 4y \quad , \quad z'_y = 4y^3 - 4x \quad ,$$

$$S_1 = [0, 0], \quad S_2 = [1, 1],$$

$$S_3 = [-1, -1].$$

$$z''_{xx} = 12x^2, \quad z''_{xy} = -4, \quad z''_{yy} = 12y^2.$$

$$H(S_1) = \begin{vmatrix} 0 & -4 \\ -4 & 0 \end{vmatrix} = -16 < 0, \text{ sedlo v bodě } [0, 0]$$

$$H(S_2) = \begin{vmatrix} 12 & -4 \\ -4 & 12 \end{vmatrix} = 12^2 - 16 > 0, \text{ lok. min. v bodě } [1, 1]$$

$$H(S_3) = \begin{vmatrix} 12 & -4 \\ -4 & 12 \end{vmatrix} = 12^2 - 16 > 0, \text{ lok. min. v bodě } [-1, -1]$$

- Hessián je kladný v bodě S_3 a funkce zde tedy má lokální extrém.
- Protože $z''_{xx} = 16 > 0$, má funkce v bodě S_3 lokální minimum.

Najděte lokální extrémy funkce $z = x^4 + y^4 - 4xy + 30$

$$z'_x = 4x^3 - 4y, \quad z'_y = 4y^3 - 4x,$$

$$S_1 = [0, 0],$$

$$S_2 = [1, 1],$$

$$S_3 = [-1, -1].$$

$$z''_{xx} = 12x^2, \quad z''_{xy} = -4, \quad z''_{yy} = 12y^2.$$

$$H(S_1) = \begin{vmatrix} 0 & -4 \\ -4 & 0 \end{vmatrix} = -16 < 0, \text{ sedlo v bodě } [0, 0]$$

$$H(S_2) = \begin{vmatrix} 12 & -4 \\ -4 & 12 \end{vmatrix} = 12^2 - 16 > 0, \text{ lok. min. v bodě } [1, 1]$$

$$H(S_3) = \begin{vmatrix} 12 & -4 \\ -4 & 12 \end{vmatrix} = 12^2 - 16 > 0, \text{ lok. min. v bodě } [-1, -1]$$

Hotovo!

Najděte lokální extrémy funkce $z = x^2y^2 - x^2 - y^2$

Najděte lokální extrémy funkce $z = x^2y^2 - x^2 - y^2$

$$z'_x$$

$$z'_y$$

Budeme hledat parciální derivace.

Najděte lokální extrémy funkce $z = x^2y^2 - x^2 - y^2$

$$z'_x = y^2(x^2)'_x - (x^2)'_x$$

$$z'_y$$

Derivujeme nejprve podle x . Derivujeme podle pravidla pro derivaci součtu a konstantního násobku.

Najděte lokální extrémy funkce $z = x^2y^2 - x^2 - y^2$

$$z'_x = y^2(x^2)'_x - (x^2)'_x = y^2 2x - 2x$$

$$z'_y$$

Vypočteme derivace.

Najděte lokální extrémy funkce $z = x^2y^2 - x^2 - y^2$

$$\begin{aligned}z'_x &= y^2(x^2)'_x - (x^2)'_x = y^2 2x - 2x \\ &= 2x(y^2 - 1)\end{aligned}$$

$$z'_y$$

Upravíme.

Najděte lokální extrémy funkce $z = x^2y^2 - x^2 - y^2$

$$\begin{aligned}z'_x &= y^2(x^2)'_x - (x^2)'_x = y^2 2x - 2x \\ &= 2x(y^2 - 1)\end{aligned}$$

$$z'_y = x^2(y^2)'_y - (y^2)'_y$$

Podobně derivujeme podle y .

Najděte lokální extrémy funkce $z = x^2y^2 - x^2 - y^2$

$$\begin{aligned}z'_x &= y^2(x^2)'_x - (x^2)'_x = y^2 2x - 2x \\ &= 2x(y^2 - 1)\end{aligned}$$

$$z'_y = x^2(y^2)'_y - (y^2)'_y = x^2 2y - 2y$$

Vypočítejte jednotlivé derivace.

Najděte lokální extrémy funkce $z = x^2y^2 - x^2 - y^2$

$$\begin{aligned}z'_x &= y^2(x^2)'_x - (x^2)'_x = y^2 2x - 2x \\ &= 2x(y^2 - 1)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}z'_y &= x^2(y^2)'_y - (y^2)'_y = x^2 2y - 2y \\ &= 2y(x^2 - 1)\end{aligned}$$

Upravíme.

Najděte lokální extrémů funkce $z = x^2y^2 - x^2 - y^2$

$$z'_x = 2x(y^2 - 1) \quad ; \quad z'_y = 2y(x^2 - 1)$$

Máme první derivace, které použijeme pro hledání stacionárních bodů.

Najděte lokální extrémů funkce $z = x^2y^2 - x^2 - y^2$

$$z'_x = 2x(y^2 - 1) = 0;$$

$$z'_y = 2y(x^2 - 1) = 0$$

Položíme derivace rovny nule.

Najděte lokální extrémů funkce $z = x^2y^2 - x^2 - y^2$

$$z'_x = 2x(y^2 - 1) = 0;$$

$$z'_y = 2y(x^2 - 1) = 0$$

- Řešíme soustavu nelineárních rovnic
- Začneme s první rovnicí.
- Tato rovnice je ve tvaru “součin rovná se nule”.

Najděte lokální extrémy funkce $z = x^2y^2 - x^2 - y^2$

$$z'_x = 2x(y^2 - 1) = 0;$$

$$z'_y = 2y(x^2 - 1) = 0$$

Případ 1: $x = 0$

Případ 2: $y = 1$

Případ 3: $y = -1$

- Jeden ze součinitelů na levé straně první rovnice musí být nula.
- Budeme zpracovávat odděleně případy, kdy $x = 0$ a $(y^2 - 1) = 0$, t.j., $y = \pm 1$.

Najděte lokální extrémy funkce $z = x^2y^2 - x^2 - y^2$

$$z_x = 2x(y^2 - 1) = 0;$$

Případ 1: $x = 0$

$$2y(0 - 1) = 0$$

$$z_y = 2y(x^2 - 1) = 0$$

Případ 2: $y = 1$

Případ 3: $y = -1$

- Případ 1.
- Dosadíme $x = 0$ do druhé rovnice.

Najděte lokální extrémů funkce $z = x^2y^2 - x^2 - y^2$

$$z'_x = 2x(y^2 - 1) = 0;$$

Případ 1: $x = 0$

$$2y(0 - 1) = 0$$

$$y = 0$$

$$S_1 = [0, 0];$$

$$z'_y = 2y(x^2 - 1) = 0$$

Případ 2: $y = 1$

Případ 3: $y = -1$

Najdeme y . Dostáváme stacionární bod S_1 .

Najděte lokální extrémů funkce $z = x^2y^2 - x^2 - y^2$

$$z'_x = 2x(y^2 - 1) = 0;$$

Případ 1: $x = 0$

$$2y(0 - 1) = 0$$

$$y = 0$$

$$S_1 = [0, 0];$$

$$z'_y = 2y(x^2 - 1) = 0$$

Případ 2: $y = 1$

$$2(x^2 - 1) = 0$$

Případ 3: $y = -1$

- Podobně pro Případ 2.
- Dosadíme $y = 1$ do druhé rovnice.

Najděte lokální extrémů funkce $z = x^2y^2 - x^2 - y^2$

$$z'_x = 2x(y^2 - 1) = 0;$$

$$z'_y = 2y(x^2 - 1) = 0$$

Případ 1: $x = 0$

Případ 2: $y = 1$

Případ 3: $y = -1$

$$2y(0 - 1) = 0$$

$$2(x^2 - 1) = 0$$

$$y = 0$$

$$x^2 = \pm 1$$

$$S_1 = [0, 0]; S_2 = [1, 1]; S_3 = [-1, 1];$$

- Vyřešíme vzhledem k x .
- Dostáváme dvě řešení a tedy i dva stacionární body.

Najděte lokální extrémů funkce $z = x^2y^2 - x^2 - y^2$

$$z_x = 2x(y^2 - 1) = 0;$$

Případ 1: $x = 0$

$$2y(0 - 1) = 0$$

$$y = 0$$

$$S_1 = [0, 0]; S_2 = [1, 1]; S_3 = [-1, 1];$$

$$z_y = 2y(x^2 - 1) = 0$$

Případ 2: $y = 1$

$$2(x^2 - 1) = 0$$

$$x^2 = \pm 1$$

Případ 3: $y = -1$

$$-2(x^2 - 1) = 0$$

- Podobně Případ 3.
- Dosadíme $y = -1$ do druhé rovnice.

Najděte lokální extrémy funkce $z = x^2y^2 - x^2 - y^2$

$$z_x = 2x(y^2 - 1) = 0;$$

$$z_y = 2y(x^2 - 1) = 0$$

Případ 1: $x = 0$

Případ 2: $y = 1$

Případ 3: $y = -1$

$$2y(0 - 1) = 0$$

$$2(x^2 - 1) = 0$$

$$-2(x^2 - 1) = 0$$

$$y = 0$$

$$x^2 = \pm 1$$

$$x^2 = \pm 1$$

$$S_1 = [0, 0]; S_2 = [1, 1]; S_3 = [-1, 1]; S_4 = [1, -1]; S_5 = [-1, -1]$$

- Řešíme kvadratickou rovnici pro x .
- Máme dvě řešení a dva další stacionární body.

Najděte lokální extrémy funkce $z = x^2y^2 - x^2 - y^2$

$$z'_x = 2x(y^2 - 1) \quad ; \quad z'_y = 2y(x^2 - 1)$$

$$S_1 = [0, 0]; S_2 = [1, 1]; S_3 = [-1, 1]; S_4 = [1, -1]; S_5 = [-1, -1]$$

$$z''_{xx}$$

$$z''_{xy}$$

$$z''_{yy}$$

Celkem má funkce pět stacionárních bodů. Nyní budeme vyšetřovat tyto body pomocí druhé derivace..

Najděte lokální extrémy funkce $z = x^2y^2 - x^2 - y^2$

$$z'_x = 2x(y^2 - 1) \quad ; \quad z'_y = 2y(x^2 - 1)$$

$$S_1 = [0, 0]; S_2 = [1, 1]; S_3 = [-1, 1]; S_4 = [1, -1]; S_5 = [-1, -1]$$

$$z''_{xx} = 2(y^2 - 1)(x)'_x = 2(y^2 - 1) \cdot 1$$

$$z''_{xy}$$

$$z''_{yy}$$

Derivujeme z'_x podle x a upravíme.

Najděte lokální extrémy funkce $z = x^2y^2 - x^2 - y^2$

$$z'_x = 2x(y^2 - 1) \quad ; \quad z'_y = 2y(x^2 - 1)$$

$$S_1 = [0, 0]; S_2 = [1, 1]; S_3 = [-1, 1]; S_4 = [1, -1]; S_5 = [-1, -1]$$

$$z''_{xx} = 2(y^2 - 1)(x)'_x = 2(y^2 - 1) \cdot 1$$

$$z''_{xy} = 2x(y^2 - 1)'_y = 2x \cdot (2y + 0) = 4xy$$

$$z''_{yy}$$

Derivujeme z'_x podle y a upravíme.

Najděte lokální extrémy funkce $z = x^2y^2 - x^2 - y^2$

$$z'_x = 2x(y^2 - 1) \quad ; \quad z'_y = 2y(x^2 - 1)$$

$$S_1 = [0, 0]; S_2 = [1, 1]; S_3 = [-1, 1]; S_4 = [1, -1]; S_5 = [-1, -1]$$

$$z''_{xx} = 2(y^2 - 1)(x)'_x = 2(y^2 - 1) \cdot 1$$

$$z''_{xy} = 2x(y^2 - 1)'_y = 2x \cdot (2y + 0) = 4xy$$

$$z''_{yy} = 2(x^2 - 1)(y)'_y = 2(x^2 - 1) \cdot 1$$

Derivujeme z'_y podle y a upravíme.

Najděte lokální extrémy funkce $z = x^2y^2 - x^2 - y^2$

$$z'_x = 2x(y^2 - 1) \quad ; \quad z'_y = 2y(x^2 - 1)$$

$$S_1 = [0, 0]; S_2 = [1, 1]; S_3 = [-1, 1]; S_4 = [1, -1]; S_5 = [-1, -1]$$

$$z''_{xx} = 2(y^2 - 1); \quad z''_{xy} = 4xy; \quad z''_{yy} = 2(x^2 - 1)$$

$$H(S_1) = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 4 > 0$$

Použijeme druhé derivace pro testování stacionárních bodů na existenci a kvalitu lokálního extrému. Začneme bodem S_1 a vypočteme Hessián

$$H(S_1) = \begin{vmatrix} z''_{xx} & z''_{xy} \\ z''_{xy} & z''_{yy} \end{vmatrix}_{[x,y]=[0,0]} = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 4 > 0.$$

V bodě S_1 má funkce lokální maximum.

Najděte lokální extrémy funkce $z = x^2y^2 - x^2 - y^2$

$$z'_x = 2x(y^2 - 1) \quad ; \quad z'_y = 2y(x^2 - 1)$$

$$S_1 = [0, 0]; \quad S_2 = [1, 1]; \quad S_3 = [-1, 1]; \quad S_4 = [1, -1]; \quad S_5 = [-1, -1]$$

$$z''_{xx} = 2(y^2 - 1); \quad z''_{xy} = 4xy; \quad z''_{yy} = 2(x^2 - 1)$$

$$H(S_1) = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 4 > 0$$

$$H(S_2) = \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = -16 < 0$$

$$H(S_2) = \begin{vmatrix} z''_{xx} & z''_{xy} \\ z''_{xy} & z''_{yy} \end{vmatrix}_{[x,y]=[1,1]} = \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = -16 < 0$$

V bodě S_2 není lokální extrém.

Najděte lokální extrémy funkce $z = x^2y^2 - x^2 - y^2$

$$z'_x = 2x(y^2 - 1) \quad ; \quad z'_y = 2y(x^2 - 1)$$

$$S_1 = [0, 0]; S_2 = [1, 1]; S_3 = [-1, 1]; S_4 = [1, -1]; S_5 = [-1, -1]$$

$$z''_{xx} = 2(y^2 - 1); \quad z''_{xy} = 4xy; \quad z''_{yy} = 2(x^2 - 1)$$

$$H(S_1) = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 4 > 0$$

$$H(S_2) = \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = -16 < 0$$

$$H(S_3) = \begin{vmatrix} z''_{xx} & z''_{xy} \\ z''_{xy} & z''_{yy} \end{vmatrix}_{[x,y]=[-1,1]} = \begin{vmatrix} 0 & -4 \\ -4 & 0 \end{vmatrix} = -16 < 0$$

V bodě S_3 není lokální extrém.

Najděte lokální extrémy funkce $z = x^2y^2 - x^2 - y^2$

$$z'_x = 2x(y^2 - 1) \quad ; \quad z'_y = 2y(x^2 - 1)$$

$$S_1 = [0, 0]; S_2 = [1, 1]; S_3 = [-1, 1]; S_4 = [1, -1]; S_5 = [-1, -1]$$

$$z''_{xx} = 2(y^2 - 1); \quad z''_{xy} = 4xy; \quad z''_{yy} = 2(x^2 - 1)$$

$$H(S_1) = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 4 > 0 \quad H(S_4) = \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = -16 < 0$$

$$H(S_2) = \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = -16 < 0$$

$$H(S_4) = \begin{vmatrix} z''_{xx} & z''_{xy} \\ z''_{xy} & z''_{yy} \end{vmatrix}_{[x,y]=[1,-1]} = \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = -16 < 0$$

V bodě S_4 není lokální extrém.

Najděte lokální extrémy funkce $z = x^2y^2 - x^2 - y^2$

$$z'_x = 2x(y^2 - 1) \quad ; \quad z'_y = 2y(x^2 - 1)$$

$$S_1 = [0, 0]; S_2 = [1, 1]; S_3 = [-1, 1]; S_4 = [1, -1]; S_5 = [-1, -1]$$

$$z''_{xx} = 2(y^2 - 1); \quad z''_{xy} = 4xy; \quad z''_{yy} = 2(x^2 - 1)$$

$$H(S_1) = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 4 > 0 \quad H(S_4) = \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = -16 < 0$$

$$H(S_2) = \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = -16 < 0 \quad H(S_5) = \begin{vmatrix} 0 & -4 \\ -4 & 0 \end{vmatrix} = -16 < 0$$

$$H(S_5) = \begin{vmatrix} z''_{xx} & z''_{xy} \\ z''_{xy} & z''_{yy} \end{vmatrix}_{[x,y]=[-1,-1]} = \begin{vmatrix} 0 & -4 \\ -4 & 0 \end{vmatrix} = -16 < 0$$

V bodě S_5 není lokální extrém.

Najděte lokální extrémy funkce $z = x^2y^2 - x^2 - y^2$

$$z'_x = 2x(y^2 - 1) \quad ; \quad z'_y = 2y(x^2 - 1)$$

$$S_1 = [0, 0]; S_2 = [1, 1]; S_3 = [-1, 1]; S_4 = [1, -1]; S_5 = [-1, -1]$$

$$z''_{xx} = 2(y^2 - 1); \quad z''_{xy} = 4xy; \quad z''_{yy} = 2(x^2 - 1)$$

$$H(S_1) = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 4 > 0 \quad H(S_4) = \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = -16 < 0$$

$$H(S_2) = \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = -16 < 0 \quad H(S_5) = \begin{vmatrix} 0 & -4 \\ -4 & 0 \end{vmatrix} = -16 < 0$$

- Jediný lokální extrém je v bodě $S_1 = [0, 0]$. Jedná se o lokální maximum.
- Ostatní stacionární body jsou sedlové body.

Najděte lokální extrémy funkce $z = x^2y^2 - x^2 - y^2$

$$z'_x = 2x(y^2 - 1) \quad ; \quad z'_y = 2y(x^2 - 1)$$

$$S_1 = [0, 0]; S_2 = [1, 1]; S_3 = [-1, 1]; S_4 = [1, -1]; S_5 = [-1, -1]$$

$$z''_{xx} = 2(y^2 - 1); \quad z''_{xy} = 4xy; \quad z''_{yy} = 2(x^2 - 1)$$

$$H(S_1) = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 4 > 0 \quad H(S_4) = \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = -16 < 0$$

$$H(S_2) = \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = -16 < 0 \quad H(S_5) = \begin{vmatrix} 0 & -4 \\ -4 & 0 \end{vmatrix} = -16 < 0$$

$$H(S_3) = \begin{vmatrix} 0 & -4 \\ -4 & 0 \end{vmatrix} = -16 < 0$$

Hotovo!

Najděte lokální extrémy funkce $z = y \ln(x^2 + y)$.

Najděte lokální extrémů funkce $z = y \ln(x^2 + y)$.

$$\text{Dom}(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y > 0\}$$

Díky přítomnosti funkce $\ln(\cdot)$ máme jistá omezení na definiční obor funkce.

Najděte lokální extrémy funkce $z = y \ln(x^2 + y)$.

$$\text{Dom}(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y > 0\}$$

$$z'_x = \frac{2xy}{x^2 + y},$$

Vypočteme parciální derivace. Při derivování podle x použijeme vzorec pro derivaci konstantního násobku, protože v součinu $y \ln(x^2 + y)$ považujeme součinitel y za konstantu. Používáme vzorec pro derivaci složené funkce, protože funkce $\ln(x^2 + y)$ je složená s vnitřní složkou $(x^2 + y)$.

$$(y \ln(x^2 + y))'_x = y(\ln(x^2 + y))'_x = y \frac{1}{x^2 + y} (2x + 0)$$

Najděte lokální extrémy funkce $z = y \ln(x^2 + y)$.

$$\text{Dom}(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y > 0\}$$

$$z'_x = \frac{2xy}{x^2 + y} \quad , \quad z'_y = \ln(x^2 + y) + \frac{y}{x^2 + y}$$

Při derivování podle y použijeme vzorec pro derivaci součinu, protože oba součinitele, y i $\ln(x^2 + y)$ jsou funkce proměnné y .

Najděte lokální extrémy funkce $z = y \ln(x^2 + y)$.

$$\text{Dom}(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y > 0\}$$

$$z'_x = \frac{2xy}{x^2 + y} = 0, \quad z'_y = \ln(x^2 + y) + \frac{y}{x^2 + y} = 0$$

Pro nalezení stacionárních bodů položíme derivace rovny nule.

Najděte lokální extrémů funkce $z = y \ln(x^2 + y)$.

$$\text{Dom}(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y > 0\}$$

$$z'_x = \frac{2xy}{x^2 + y} = 0, \quad z'_y = \ln(x^2 + y) + \frac{y}{x^2 + y} = 0$$

$$2xy = 0$$

- Začneme řešit od první rovnice (je jednodušší).
- Zlomek je roven nule, pokud je jeho číselník nulový.

Najděte lokální extrémů funkce $z = y \ln(x^2 + y)$.

$$\text{Dom}(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y > 0\}$$

$$z'_x = \frac{2xy}{x^2 + y} = 0, \quad z'_y = \ln(x^2 + y) + \frac{y}{x^2 + y} = 0$$

$$2xy = 0$$

Případ 1: $x = 0$

Případ 2: $y = 0$

- Aby byl součin roven nule, je nutné a stačí, aby byl nule roven kterýkoliv součinitel.
- Rozdělíme výpočet na dvě větve.

Najděte lokální extrémy funkce $z = y \ln(x^2 + y)$.

$$\text{Dom}(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y > 0\}$$

$$z'_x = \frac{2xy}{x^2 + y} = 0, \quad z'_y = \ln(x^2 + y) + \frac{y}{x^2 + y} = 0$$

$$2xy = 0$$

Případ 1: $x = 0$

$$\ln y + \frac{y}{y} = 0,$$

$$\ln y = -1,$$

Případ 2: $y = 0$

Dosadíme $x = 0$ do druhé rovnice a upravíme.

Najděte lokální extrémy funkce $z = y \ln(x^2 + y)$.

$$\text{Dom}(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y > 0\}$$

$$z'_x = \frac{2xy}{x^2 + y} = 0, \quad z'_y = \ln(x^2 + y) + \frac{y}{x^2 + y} = 0$$

$$2xy = 0$$

Případ 1: $x = 0$

$$\ln y + \frac{y}{y} = 0,$$

$$\ln y = -1,$$

$$y = e^{-1}$$

Případ 2: $y = 0$

Inverzní funkce k logaritmu je funkce exponenciální. Použijeme tuto inverzní funkci k osamostatnění y .

Najděte lokální extrémy funkce $z = y \ln(x^2 + y)$.

$$\text{Dom}(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y > 0\}$$

$$z'_x = \frac{2xy}{x^2 + y} = 0, \quad z'_y = \ln(x^2 + y) + \frac{y}{x^2 + y} = 0$$

$$2xy = 0$$

Případ 1: $x = 0$

$$\ln y + \frac{y}{y} = 0,$$

$$\ln y = -1,$$

$$y = e^{-1}$$

$$S_1 = [0, e^{-1}]$$

Případ 2: $y = 0$

Obdrželi jsme stacionární bod $S_1 = [0, e^{-1}]$. Zkontrolujeme přitom, že $S_1 \in \text{Dom}(f)$.

Najděte lokální extrémy funkce $z = y \ln(x^2 + y)$.

$$\text{Dom}(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y > 0\}$$

$$z'_x = \frac{2xy}{x^2 + y} = 0, \quad z'_y = \ln(x^2 + y) + \frac{y}{x^2 + y} = 0$$

$$2xy = 0$$

Případ 1: $x = 0$

$$\ln y + \frac{y}{y} = 0,$$

$$\ln y = -1,$$

$$y = e^{-1}$$

Případ 2: $y = 0$

$$\ln(x^2) = 0$$

- Nyní se budeme věnovat Případu 2.
- Dosadíme $y = 0$ do červené rovnice.

Najděte lokální extrémy funkce $z = y \ln(x^2 + y)$.

$$\text{Dom}(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y > 0\}$$

$$z'_x = \frac{2xy}{x^2 + y} = 0, \quad z'_y = \ln(x^2 + y) + \frac{y}{x^2 + y} = 0$$

$$2xy = 0$$

Případ 1: $x = 0$

$$\ln y + \frac{y}{y} = 0,$$

$$\ln y = -1,$$

$$y = e^{-1}$$

$$S_1 = [0, e^{-1}]$$

Případ 2: $y = 0$

$$\ln(x^2) = 0$$

$$x^2 = e^0 = 1$$

$$x = \pm 1$$

Osamostatníme x^2 a vyřešíme vzhledem k x .

Najděte lokální extrémy funkce $z = y \ln(x^2 + y)$.

$$\text{Dom}(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y > 0\}$$

$$z'_x = \frac{2xy}{x^2 + y}, \quad z'_y = \ln(x^2 + y) + \frac{y}{x^2 + y} = 0$$

$$2xy = 0$$

Případ 1: $x = 0$

$$\ln y + \frac{y}{y} = 0,$$

$$\ln y = -1,$$

$$y = e^{-1}$$

$$S_1 = [0, e^{-1}]$$

Případ 2: $y = 0$

$$\ln(x^2) = 0$$

$$x^2 = e^0 = 1$$

$$x = \pm 1$$

$$S_2 = [1, 0] \text{ a } S_3 = [-1, 0].$$

Obdrželi jsme dva stacionární body. Nezapomeneme zkontrolovat, že skutečně leží v definičním oboru funkce.

Najděte lokální extrémy funkce $z = y \ln(x^2 + y)$.

$$z'_x = \frac{2xy}{x^2 + y}, \quad z'_y = \ln(x^2 + y) + \frac{y}{x^2 + y}$$

$$S_1 = [0, e^{-1}],$$

$$S_2 = [1, 0],$$

$$S_3 = [-1, 0]$$

Toto jsou naše dosavadní mezivýsledky.

Najděte lokální extrémy funkce $z = y \ln(x^2 + y)$.

$$z'_x = \frac{2xy}{x^2 + y}, \quad z'_y = \ln(x^2 + y) + \frac{y}{x^2 + y}$$

$$S_1 = [0, e^{-1}], \quad S_2 = [1, 0], \quad S_3 = [-1, 0]$$

$$z''_{xx}$$

$$z''_{xy}$$

$$z''_{yy}$$

Použijeme druhé derivace ke zjištění, zda ve stacionárním bodě je lokální extrém.

Najděte lokální extrémy funkce $z = y \ln(x^2 + y)$.

$$z'_x = \frac{2xy}{x^2 + y}, \quad z'_y = \ln(x^2 + y) + \frac{y}{x^2 + y}$$

$$S_1 = [0, e^{-1}], \quad S_2 = [1, 0], \quad S_3 = [-1, 0]$$

$$z''_{xx} = \frac{2y(x^2 + y) - 2xy \cdot 2x}{(x^2 + y)^2},$$

$$z''_{xy}$$

$$z''_{yy}$$

Derivujeme z'_x podle x .

Najděte lokální extrémy funkce $z = y \ln(x^2 + y)$.

$$z'_x = \frac{2xy}{x^2 + y}, \quad z'_y = \ln(x^2 + y) + \frac{y}{x^2 + y}$$

$$S_1 = [0, e^{-1}], \quad S_2 = [1, 0], \quad S_3 = [-1, 0]$$

$$z''_{xx} = \frac{2y(x^2 + y) - 2xy \cdot 2x}{(x^2 + y)^2},$$

$$z''_{xy} = \frac{2x(x^2 + y) - 2xy}{(x^2 + y)^2},$$

$$z''_{yy}$$

Derivujeme z'_x podle y .

Najděte lokální extrémy funkce $z = y \ln(x^2 + y)$.

$$z'_x = \frac{2xy}{x^2 + y}, \quad z'_y = \ln(x^2 + y) + \frac{y}{x^2 + y}$$

$$S_1 = [0, e^{-1}], \quad S_2 = [1, 0], \quad S_3 = [-1, 0]$$

$$z''_{xx} = \frac{2y(x^2 + y) - 2xy \cdot 2x}{(x^2 + y)^2},$$

$$z''_{xy} = \frac{2x(x^2 + y) - 2xy}{(x^2 + y)^2},$$

$$z''_{yy} = \frac{1}{x^2 + y} + \frac{x^2 + y - y}{(x^2 + y)^2}.$$

Derivujeme z''_{yy} podle y .

Najděte lokální extrémy funkce $z = y \ln(x^2 + y)$.

$$z'_x = \frac{2xy}{x^2 + y}, \quad z'_y = \ln(x^2 + y) + \frac{y}{x^2 + y}$$

$$S_1 = [0, e^{-1}], \quad S_2 = [1, 0], \quad S_3 = [-1, 0]$$

$$z''_{xx} = \frac{2y(x^2 + y) - 2xy \cdot 2x}{(x^2 + y)^2},$$

$$z''_{xy} = \frac{2x(x^2 + y) - 2xy}{(x^2 + y)^2},$$

$$z''_{yy} = \frac{1}{x^2 + y} + \frac{x^2 + y - y}{(x^2 + y)^2}.$$

$$z''_{xx} = \frac{2y^2 - 2yx^2}{(x^2 + y)^2},$$

$$z''_{xy} = \frac{2x^3}{(x^2 + y)^2},$$

$$z''_{yy} = \frac{1}{x^2 + y} + \frac{x^2}{(x^2 + y)^2}.$$

Upravíme.

Najděte lokální extrémy funkce $z = y \ln(x^2 + y)$.

$$z'_x = \frac{2xy}{x^2 + y}, \quad z'_y = \ln(x^2 + y) + \frac{y}{x^2 + y}$$

$$S_1 = [0, e^{-1}], \quad S_2 = [1, 0], \quad S_3 = [-1, 0]$$

$$z''_{xx} = \frac{2y^2 - 2yx^2}{(x^2 + y)^2},$$

$$z''_{xy} = \frac{2x^3}{(x^2 + y)^2},$$

$$z''_{yy} = \frac{1}{x^2 + y} + \frac{x^2}{(x^2 + y)^2}.$$

$$H(S_1) = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & e \end{vmatrix} > 0,$$

$$H(S_2) = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -4 < 0,$$

$$H(S_3) = \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = -4 < 0.$$

Vypočteme Hessián v každém ze stacionárních bodů.

Najděte lokální extrémy funkce $z = y \ln(x^2 + y)$.

$$z'_x = \frac{2xy}{x^2 + y}, \quad z'_y = \ln(x^2 + y) + \frac{y}{x^2 + y}$$

$$S_1 = [0, e^{-1}], \quad S_2 = [1, 0], \quad S_3 = [-1, 0]$$

$$z''_{xx} = \frac{2y^2 - 2yx^2}{(x^2 + y)^2},$$

$$z''_{xy} = \frac{2x^3}{(x^2 + y)^2},$$

$$z''_{yy} = \frac{1}{x^2 + y} + \frac{x^2}{(x^2 + y)^2}.$$

$$H(S_1) = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & e \end{vmatrix} > 0,$$

$$H(S_2) = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -4 < 0,$$

$$H(S_3) = \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = -4 < 0.$$

Lokální minimum v bodě $[0, e^{-1}]$. Žádný další lokální extrém.

Podle hodnoty Hessiánu a podle čísel v hlavní diagonále Hessovy matice učiníme příslušný závěr.

Konec