

Limity

Robert Mařík

26. září 2008

Obsah

1 Limity bez l'Hospitalova pravidla 4

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\arctg x}{x + 1} \dots\dots\dots 5$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\arctg x}{x + 1} \dots\dots\dots 9$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\arctg x}{x + 1} \dots\dots\dots 20$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} e^{-x} \arctg x \dots\dots\dots 24$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (x^3 + 2x^2 - 4) \dots\dots\dots 35$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^3 + 3x^2 + 1}{2x^2 - 3} \dots\dots\dots 44$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x^4 + 4x + 5}{3x^4 - x^3 + 4x + 1} \dots\dots\dots 57$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (2 \ln x - \ln(x^2 + x + 1)) \dots\dots\dots 68$$

2 Limity na l'Hospitalovo pravidlo 78

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{1 - e^x} \dots\dots\dots 79$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x \ln x}{x^2 + x + 1} \dots\dots\dots 85$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{\sin^3 x} \dots\dots\dots 92$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \operatorname{arctg} x}{x^3} \dots\dots\dots 101$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x \dots\dots\dots 106$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 e^{-x^2} \dots\dots\dots 114$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \left(\operatorname{arctg} x - \frac{\pi}{2} \right) \dots\dots\dots 123$$

1 Limity bez l'Hospitalova pravidla

Vypočtěte $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\operatorname{arctg} x}{x + 1}$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\operatorname{arctg} x}{x + 1}$$

Vypočtěte $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\operatorname{arctg} x}{x + 1}$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\operatorname{arctg} x}{x + 1} = \frac{\operatorname{arctg} 1}{1 + 1}$$

- Dosadíme $x = 1$.
- Jedná se o dobře definovaný výraz. Funkce je tedy spojitá v bodě $x = 1$ a funkční hodnota je rovna hodnotě limity.

Vypočtěte $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\operatorname{arctg} x}{x + 1}$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\operatorname{arctg} x}{x + 1} &= \frac{\operatorname{arctg} 1}{1 + 1} \\ &= \frac{\frac{\pi}{4}}{2}\end{aligned}$$

Určíme $\operatorname{arctg} 1$. Musíme doplnit schema

$$\operatorname{tg}(\cdot) = 1.$$

Řešení je

$$\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = 1$$

a proto $\operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$.

Vypočtěte $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\operatorname{arctg} x}{x + 1}$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\operatorname{arctg} x}{x + 1} &= \frac{\operatorname{arctg} 1}{1 + 1} \\ &= \frac{\frac{\pi}{4}}{2} \\ &= \frac{\pi}{8}\end{aligned}$$

Zjednodušíme. Hotovo.

Vypočtete $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\operatorname{arctg} x}{x + 1}$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\operatorname{arctg} x}{x + 1}$$

Vypočtěte $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\operatorname{arctg} x}{x + 1}$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\operatorname{arctg} x}{x + 1} = \frac{\operatorname{arctg}(-1)}{-1 + 1}$$

Dosadíme ...

Vypočtěte $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\operatorname{arctg} x}{x + 1}$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\operatorname{arctg} x}{x + 1} = \frac{\operatorname{arctg}(-1)}{-1 + 1} = \frac{-\frac{\pi}{4}}{0}$$

... a upravíme.

Vypočtěte $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\operatorname{arctg} x}{x + 1}$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\operatorname{arctg} x}{x + 1} = \frac{\operatorname{arctg}(-1)}{-1 + 1} = \frac{-\frac{\pi}{4}}{0}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{\operatorname{arctg} x}{x + 1}$$

- Funkce je typu $\frac{\text{nenulový výraz}}{\text{nula}}$.
- Musíme proto studovat nejprve jednostranné limity. Začneme s limitou zprava.

Vypočtěte $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\operatorname{arctg} x}{x + 1}$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\operatorname{arctg} x}{x + 1} = \frac{\operatorname{arctg}(-1)}{-1 + 1} = \frac{-\frac{\pi}{4}}{0}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{\operatorname{arctg} x}{x + 1} = \frac{-\frac{\pi}{4}}{0}$$

Dosadili jsme $x = -1$.

Vypočtěte $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\operatorname{arctg} x}{x + 1}$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\operatorname{arctg} x}{x + 1} = \frac{\operatorname{arctg}(-1)}{-1 + 1} = \frac{-\frac{\pi}{4}}{0}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{\operatorname{arctg} x}{x + 1} = \frac{-\frac{\pi}{4}}{+0}$$

- Musíme určit znaménko jmenovatele.
- Je-li x napravo od -1 , pak $x > -1$ a platí $x + 1 > 0$.
- Jmenovatel je kladný.

Vypočtěte $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\operatorname{arctg} x}{x + 1}$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\operatorname{arctg} x}{x + 1} = \frac{\operatorname{arctg}(-1)}{-1 + 1} = \frac{-\frac{\pi}{4}}{0}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{\operatorname{arctg} x}{x + 1} = \frac{-\frac{\pi}{4}}{+0} = -\infty$$

Limita zprava je $-\infty$.

Vypočtěte $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\operatorname{arctg} x}{x + 1}$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\operatorname{arctg} x}{x + 1} = \frac{\operatorname{arctg}(-1)}{-1 + 1} = \frac{-\frac{\pi}{4}}{0}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{\operatorname{arctg} x}{x + 1} = \frac{-\frac{\pi}{4}}{+0} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{\operatorname{arctg} x}{x + 1} = \frac{-\frac{\pi}{4}}{0}$$

Zkoumejme limitu zleva.

Vypočtěte $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\operatorname{arctg} x}{x + 1}$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\operatorname{arctg} x}{x + 1} = \frac{\operatorname{arctg}(-1)}{-1 + 1} = \frac{-\frac{\pi}{4}}{0}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{\operatorname{arctg} x}{x + 1} = \frac{-\frac{\pi}{4}}{+0} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{\operatorname{arctg} x}{x + 1} = \frac{-\frac{\pi}{4}}{-0}$$

- Je-li x nalevo od čísla -1 , pak $x < -1$.
- Proto $x + 1 < 0$ a jmenovatel je záporný.

Vypočtete $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\operatorname{arctg} x}{x + 1}$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\operatorname{arctg} x}{x + 1} = \frac{\operatorname{arctg}(-1)}{-1 + 1} = \frac{-\frac{\pi}{4}}{0}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{\operatorname{arctg} x}{x + 1} = \frac{-\frac{\pi}{4}}{+0} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{\operatorname{arctg} x}{x + 1} = \frac{-\frac{\pi}{4}}{-0} = +\infty$$

Limita je $+\infty$

Vypočtete $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\operatorname{arctg} x}{x + 1}$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\operatorname{arctg} x}{x + 1} = \frac{\operatorname{arctg}(-1)}{-1 + 1} = \frac{-\frac{\pi}{4}}{0}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{\operatorname{arctg} x}{x + 1} = \frac{-\frac{\pi}{4}}{+0} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{\operatorname{arctg} x}{x + 1} = \frac{-\frac{\pi}{4}}{-0} = +\infty$$

Oboustranná limita $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\operatorname{arctg} x}{x + 1}$ neexistuje.

Obě jednostranné limity jsou různé a oboustranná limita tedy neexistuje. Hotovo!

Vypočtete $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{x + 1}$

Vypočtete $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{x + 1}$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{x + 1} = -\frac{\pi}{2}$$

- Určíme limitu čitatele a jmenovatele samostatně.
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{arctg} x$ může být určena z grafu funkce $y = \operatorname{arctg} x$.
- Funkce $y = \operatorname{arctg} x$ má vodorovnou asymptotu $y = -\frac{\pi}{2}$ v $-\infty$.
Hodnota limity čitatele je $-\frac{\pi}{2}$

Vypočtěte $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{x + 1}$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{x + 1} = \frac{-\frac{\pi}{2}}{-\infty}$$

Limita jmenovatele je $-\infty + 1 = -\infty$.

Vypočtete $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{x + 1}$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{x + 1} = \frac{-\frac{\pi}{2}}{-\infty} = 0$$

Konečná hodnota dělená nekonečnem je rovna nule. Vyřešeno!

Vypočtěte $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} e^{-x} \operatorname{arctg} x$

Vypočtete $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} e^{-x} \operatorname{arctg} x$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x} \operatorname{arctg} x$$

Začneme s limitou v $+\infty$

Vypočtěte $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} e^{-x} \operatorname{arctg} x$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x} \operatorname{arctg} x = e^{-\infty}$$

- Určíme zvlášť limity funkcí v součinu.
- Pokud dostaneme něco jiného než neurčitý výraz 0∞ , stane se problém triviálním.
- Dosadíme. Výrazem $e^{-\infty}$ máme na mysli limitu $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x$.

Vypočtěte $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} e^{-x} \operatorname{arctg} x$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x} \operatorname{arctg} x = e^{-\infty} \operatorname{arctg} \infty$$

- Dosadíme do druhé funkce.
- Výrazem $\operatorname{arctg} \infty$ máme na mysli limitu $\lim_{x \rightarrow \infty} \operatorname{arctg} x$.

Vypočtěte $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} e^{-x} \operatorname{arctg} x$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x} \operatorname{arctg} x = e^{-\infty} \operatorname{arctg} \infty = 0 \frac{\pi}{2}$$

Zkoumáním grafů funkcí $y = e^x$ a $y = \operatorname{arctg} x$ zjistíme, že

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$$

a

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2}.$$

Vypočtěte $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} e^{-x} \operatorname{arctg} x$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x} \operatorname{arctg} x = e^{-\infty} \operatorname{arctg} \infty = 0 \frac{\pi}{2} = 0$$

Součin je nula.

Vypočtěte $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} e^{-x} \operatorname{arctg} x$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x} \operatorname{arctg} x = e^{-\infty} \operatorname{arctg} \infty = 0 \frac{\pi}{2} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} \operatorname{arctg} x =$$

Pokračujeme s limitou v $-\infty$.

Vypočtěte $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} e^{-x} \operatorname{arctg} x$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x} \operatorname{arctg} x = e^{-\infty} \operatorname{arctg} \infty = 0 \frac{\pi}{2} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} \operatorname{arctg} x = e^{\infty}$$

- Opět určíme limity funkcí, stojících v součinu.
- A opět nesmíme dostat 0∞ , jinak bude úloha obtížná.
- Dosadíme. Protože platí $-(-\infty) = \infty$, dostáváme z prvního součinitele výraz e^{∞} . Tím máme na mysli limitu $\lim_{x \rightarrow \infty} e^x$.

Vypočtěte $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} e^{-x} \operatorname{arctg} x$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x} \operatorname{arctg} x = e^{-\infty} \operatorname{arctg} \infty = 0 \frac{\pi}{2} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} \operatorname{arctg} x = e^{\infty} \operatorname{arctg}(-\infty)$$

Dosadíme do druhé funkce. Výrazem $\operatorname{arctg}(-\infty)$ rozumíme limitu $\lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{arctg} x$.

Vypočtěte $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} e^{-x} \operatorname{arctg} x$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x} \operatorname{arctg} x = e^{-\infty} \operatorname{arctg} \infty = 0 \frac{\pi}{2} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} \operatorname{arctg} x = e^{\infty} \operatorname{arctg}(-\infty) = \infty \left(-\frac{\pi}{2}\right)$$

Z grafů funkcí $y = e^x$ a $y = \operatorname{arctg} x$ plyne

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^x = \infty$$

a

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{arctg} x = -\frac{\pi}{2}.$$

Hotovo!

Vypočtěte $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} e^{-x} \operatorname{arctg} x$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x} \operatorname{arctg} x = e^{-\infty} \operatorname{arctg} \infty = 0 \frac{\pi}{2} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} \operatorname{arctg} x = e^{\infty} \operatorname{arctg}(-\infty) = \infty \left(-\frac{\pi}{2}\right) = -\infty$$

Součin je roven $-\infty$.

Vypočtete $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (x^3 + 2x^2 - 4)$

Vypočtěte $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (x^3 + 2x^2 - 4)$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (x^3 + 2x^2 - 4) = \infty^3 + 2\infty^2 - 4$$

- Začneme s limitou v $+\infty$. Dosadíme.

Vypočtěte $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (x^3 + 2x^2 - 4)$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (x^3 + 2x^2 - 4) = \infty^3 + 2\infty^2 - 4 = \infty + \infty - 4$$

$$\infty^3 = \infty, \quad \infty^2 = \infty$$

Vypočtěte $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (x^3 + 2x^2 - 4)$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (x^3 + 2x^2 - 4) = \infty^3 + 2\infty^2 - 4 = \infty + \infty - 4 = \infty$$

$$\infty + \infty - 4 = \infty$$

Vypočtěte $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (x^3 + 2x^2 - 4)$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (x^3 + 2x^2 - 4) = \infty^3 + 2\infty^2 - 4 = \infty + \infty - 4 = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 + 2x^2 - 4)$$

Pokračujeme s limitou v $-\infty$.

Vypočtěte $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (x^3 + 2x^2 - 4)$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (x^3 + 2x^2 - 4) = \infty^3 + 2\infty^2 - 4 = \infty + \infty - 4 = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 + 2x^2 - 4) = (-\infty)^3 + 2(-\infty)^2 - 4$$

Dosadíme.

Vypočtěte $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (x^3 + 2x^2 - 4)$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (x^3 + 2x^2 - 4) = \infty^3 + 2\infty^2 - 4 = \infty + \infty - 4 = \infty$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 + 2x^2 - 4) &= (-\infty)^3 + 2(-\infty)^2 - 4 \\ &= -\infty + \infty - 4 \end{aligned}$$

$$(-\infty) \times (-\infty) \times (-\infty) = -\infty \quad 2(-\infty)(-\infty) = \infty$$

Problém! Máme neurčitý výraz $-\infty + \infty$.

Vypočtěte $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (x^3 + 2x^2 - 4)$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (x^3 + 2x^2 - 4) = \infty^3 + 2\infty^2 - 4 = \infty + \infty - 4 = \infty$$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 + 2x^2 - 4) &= (-\infty)^3 + 2(-\infty)^2 - 4 \\ &= -\infty + \infty - 4 \\ &= -\infty\end{aligned}$$

- Z teorie víme, jak tento problém vyřešit.
- Lze ukázat, že na výsledek má vliv jenom vedoucí koeficient. Ostatní koeficienty tedy vynecháme.
- Limita vedoucího členu je $-\infty$.

Vypočtěte $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (x^3 + 2x^2 - 4)$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (x^3 + 2x^2 - 4) = \infty^3 + 2\infty^2 - 4 = \infty + \infty - 4 = \infty$$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 + 2x^2 - 4) &= (-\infty)^3 + 2(-\infty)^2 - 4 \\ &= -\infty + \infty - 4 \\ &= -\infty\end{aligned}$$

Hotovo!

Vypočtete $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^3 + 3x^2 + 1}{2x^2 - 3}$

Vypočtěte $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^3 + 3x^2 + 1}{2x^2 - 3}$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 3x^2 + 1}{2x^2 - 3}$$

Začneme s limitou v $+\infty$.

Vypočtěte $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^3 + 3x^2 + 1}{2x^2 - 3}$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 3x^2 + 1}{2x^2 - 3} = \frac{\infty}{\infty}$$

- Limita čitatele i jmenovatele je $+\infty$.
- A hrome! Dostáváme neurčitý výraz.

Vypočtete $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^3 + 3x^2 + 1}{2x^2 - 3}$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 3x^2 + 1}{2x^2 - 3} = \frac{\infty}{\infty}$$
$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{2x^2}$$

- Z teorie víme, že limita se dá určit snadno – jenom z vedoucích členů čitatele a jmenovatele.
- Vynecháme tedy všechno ostatní.

Vypočtete $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^3 + 3x^2 + 1}{2x^2 - 3}$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 3x^2 + 1}{2x^2 - 3} = \frac{\infty}{\infty}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{2x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{2}$$

Upravíme

$$\frac{x^3}{2x^2} = \frac{x}{2}$$

Vypočtete $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^3 + 3x^2 + 1}{2x^2 - 3}$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 3x^2 + 1}{2x^2 - 3} = \frac{\infty}{\infty}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{2x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{2} = \frac{\infty}{2}$$

Dosadíme $x = \infty$.

Vypočtěte $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^3 + 3x^2 + 1}{2x^2 - 3}$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 3x^2 + 1}{2x^2 - 3} = \frac{\infty}{\infty}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{2x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{2} = \frac{\infty}{2} = \infty$$

Použijeme známá pravidla pro počítání s nekonečnem.

Vypočtěte $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^3 + 3x^2 + 1}{2x^2 - 3}$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 3x^2 + 1}{2x^2 - 3} = \frac{\infty}{\infty}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{2x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{2} = \frac{\infty}{2} = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 + 3x^2 + 1}{2x^2 - 3} = \frac{-\infty}{\infty}$$

- Pokračujeme s limitou v $-\infty$.
- Dosazením $x = -\infty$ dostáváme opět neurčitý výraz.

Vypočtěte $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^3 + 3x^2 + 1}{2x^2 - 3}$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 3x^2 + 1}{2x^2 - 3} = \boxed{\frac{\infty}{\infty}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{2x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{2} = \frac{\infty}{2} = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 + 3x^2 + 1}{2x^2 - 3} = \boxed{\frac{-\infty}{\infty}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3}{2x^2}$$

Opět uvažujeme pouze vedoucí členy.

Vypočtěte $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^3 + 3x^2 + 1}{2x^2 - 3}$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 3x^2 + 1}{2x^2 - 3} = \frac{\infty}{\infty}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{2x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{2} = \frac{\infty}{2} = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 + 3x^2 + 1}{2x^2 - 3} = \frac{-\infty}{\infty}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3}{2x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{2}$$

Upravíme.

Vypočtěte $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^3 + 3x^2 + 1}{2x^2 - 3}$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 3x^2 + 1}{2x^2 - 3} = \frac{\infty}{\infty}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{2x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{2} = \frac{\infty}{2} = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 + 3x^2 + 1}{2x^2 - 3} = \frac{-\infty}{\infty}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3}{2x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{2} = \frac{-\infty}{2}$$

Dosadíme.

Vypočtěte $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^3 + 3x^2 + 1}{2x^2 - 3}$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 3x^2 + 1}{2x^2 - 3} = \frac{\infty}{\infty}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{2x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{2} = \frac{\infty}{2} = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 + 3x^2 + 1}{2x^2 - 3} = \frac{-\infty}{\infty}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3}{2x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{2} = \frac{-\infty}{2} = -\infty$$

Použijeme známá pravidla pro počítání s nekonečnem.

Vypočtěte $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^3 + 3x^2 + 1}{2x^2 - 3}$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 3x^2 + 1}{2x^2 - 3} = \frac{\infty}{\infty}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{2x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{2} = \frac{\infty}{2} = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 + 3x^2 + 1}{2x^2 - 3} = \frac{-\infty}{\infty}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3}{2x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{2} = \frac{-\infty}{2} = -\infty$$

Hotovo!

Vypočtěte $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x^4 + 4x + 5}{3x^4 - x^3 + 4x + 1}$

Vypočtěte $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x^4 + 4x + 5}{3x^4 - x^3 + 4x + 1}$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^4 + 4x + 5}{3x^4 - x^3 + 4x + 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^4 + 4x + 5}{3x^4 - x^3 + 4x + 1}$$

Začneme s limitou v $+\infty$.

Vypočtěte $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x^4 + 4x + 5}{3x^4 - x^3 + 4x + 1}$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^4 + 4x + 5}{3x^4 - x^3 + 4x + 1} = \frac{\infty}{\infty}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^4 + 4x + 5}{3x^4 - x^3 + 4x + 1}$$

Dosadíme $x = \infty$.

Vypočtěte $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x^4 + 4x + 5}{3x^4 - x^3 + 4x + 1}$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^4 + 4x + 5}{3x^4 - x^3 + 4x + 1} = \boxed{\frac{\infty}{\infty}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^4}{3x^4}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^4 + 4x + 5}{3x^4 - x^3 + 4x + 1}$$

- Neurčitý výraz.
- Použijeme jenom vedoucí členy.
- Všechno ostatní lze zanedbat.

Vypočtěte $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x^4 + 4x + 5}{3x^4 - x^3 + 4x + 1}$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^4 + 4x + 5}{3x^4 - x^3 + 4x + 1} = \boxed{\frac{\infty}{\infty}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^4}{3x^4} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{3}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^4 + 4x + 5}{3x^4 - x^3 + 4x + 1}$$

Upravíme

$$\frac{2x^4}{3x^4} = \frac{2}{3}$$

Vypočtěte $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x^4 + 4x + 5}{3x^4 - x^3 + 4x + 1}$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^4 + 4x + 5}{3x^4 - x^3 + 4x + 1} = \boxed{\frac{\infty}{\infty}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^4}{3x^4} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^4 + 4x + 5}{3x^4 - x^3 + 4x + 1}$$

Limita konstantní funkce je ta konstanta.

Vypočtete $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x^4 + 4x + 5}{3x^4 - x^3 + 4x + 1}$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^4 + 4x + 5}{3x^4 - x^3 + 4x + 1} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^4}{3x^4} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^4 + 4x + 5}{3x^4 - x^3 + 4x + 1} = \frac{\infty}{\infty}$$

Pokračujeme s limitou v $-\infty$. Dosadíme $x = -\infty$.

Vypočtěte $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x^4 + 4x + 5}{3x^4 - x^3 + 4x + 1}$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^4 + 4x + 5}{3x^4 - x^3 + 4x + 1} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^4}{3x^4} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^4 + 4x + 5}{3x^4 - x^3 + 4x + 1} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^4}{3x^4}$$

- Máme neurčitý výraz.
- Použijeme jenom vedoucí členy.
- Všechno ostatní zanedbáme.

Vypočtěte $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x^4 + 4x + 5}{3x^4 - x^3 + 4x + 1}$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^4 + 4x + 5}{3x^4 - x^3 + 4x + 1} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^4}{3x^4} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^4 + 4x + 5}{3x^4 - x^3 + 4x + 1} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^4}{3x^4} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{3}$$

Upravíme

$$\frac{2x^4}{3x^4} = \frac{2}{3}$$

Vypočtěte $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x^4 + 4x + 5}{3x^4 - x^3 + 4x + 1}$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^4 + 4x + 5}{3x^4 - x^3 + 4x + 1} = \boxed{\frac{\infty}{\infty}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^4}{3x^4} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^4 + 4x + 5}{3x^4 - x^3 + 4x + 1} = \boxed{\frac{\infty}{\infty}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^4}{3x^4} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$$

Limita konstantní funkce je ta konstanta.

Vypočtěte $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x^4 + 4x + 5}{3x^4 - x^3 + 4x + 1}$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^4 + 4x + 5}{3x^4 - x^3 + 4x + 1} = \boxed{\frac{\infty}{\infty}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^4}{3x^4} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^4 + 4x + 5}{3x^4 - x^3 + 4x + 1} = \boxed{\frac{\infty}{\infty}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^4}{3x^4} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$$

Hotovo!

Vypočtete $\lim_{x \rightarrow \infty} [2 \ln x - \ln(x^2 + x + 1)]$.

Vypočtete $\lim_{x \rightarrow \infty} [2 \ln x - \ln(x^2 + x + 1)]$.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} [2 \ln x - \ln(x^2 + x + 1)]$$

Přepíšeme limitu.

Vypočtěte $\lim_{x \rightarrow \infty} [2 \ln x - \ln(x^2 + x + 1)]$.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} [2 \ln x - \ln(x^2 + x + 1)] = \infty - \infty$$

Protože $\lim_{x \rightarrow \infty} \ln x = \infty$, dostáváme neurčitý výraz $\infty - \infty$.

Vypočtete $\lim_{x \rightarrow \infty} [2 \ln x - \ln(x^2 + x + 1)]$.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} [2 \ln x - \ln(x^2 + x + 1)] = \boxed{\infty - \infty}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} [\ln x^2 - \ln(x^2 + x + 1)]$$

- Limity z neurčitých výrazů ve tvaru zlomku jsou obvykle jednodušší. Napíšeme funkci jako zlomek. .
- Nejdříve oba členy napíšeme v logaritmickém tvaru.
- Použijeme pravidlo $\boxed{r \ln a = \ln a^r}$.

Vypočtěte $\lim_{x \rightarrow \infty} [2 \ln x - \ln(x^2 + x + 1)]$.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} [2 \ln x - \ln(x^2 + x + 1)] = \boxed{\infty - \infty}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} [\ln x^2 - \ln(x^2 + x + 1)]$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \ln \frac{x^2}{x^2 + x + 1}$$

Odečteme logaritmy podle pravidla

$$\boxed{\ln a - \ln b = \ln \frac{a}{b}}$$

Vypočtěte $\lim_{x \rightarrow \infty} [2 \ln x - \ln(x^2 + x + 1)]$.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} [2 \ln x - \ln(x^2 + x + 1)] = \boxed{\infty - \infty}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} [\ln x^2 - \ln(x^2 + x + 1)]$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \ln \frac{x^2}{x^2 + x + 1} = \ln \left(\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x^2 + x + 1} \right)$$

- Určíme limitu složené funkce.
- Nejprve prozkoumáme limitu vnitřní složky.

Vypočtěte $\lim_{x \rightarrow \infty} [2 \ln x - \ln(x^2 + x + 1)]$.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} [2 \ln x - \ln(x^2 + x + 1)] = \boxed{\infty - \infty}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} [\ln x^2 - \ln(x^2 + x + 1)]$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \ln \frac{x^2}{x^2 + x + 1} = \ln \left(\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x^2 + x + 1} \right) = \boxed{\ln \frac{\infty}{\infty}}$$

Uvnitř máme neurčitý výraz.

Vypočtete $\lim_{x \rightarrow \infty} [2 \ln x - \ln(x^2 + x + 1)]$.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} [2 \ln x - \ln(x^2 + x + 1)] = \boxed{\infty - \infty}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} [\ln x^2 - \ln(x^2 + x + 1)]$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \ln \frac{x^2}{x^2 + x + 1} = \ln \left(\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x^2 + x + 1} \right) = \boxed{\ln \frac{\infty}{\infty}}$$

$$= \ln \left(\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x^2} \right)$$

- Tohle jsme již počítali.
- Uvažujeme jenom vedoucí členy.

Vypočtěte $\lim_{x \rightarrow \infty} [2 \ln x - \ln(x^2 + x + 1)]$.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} [2 \ln x - \ln(x^2 + x + 1)] = \boxed{\infty - \infty}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} [\ln x^2 - \ln(x^2 + x + 1)]$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \ln \frac{x^2}{x^2 + x + 1} = \ln \left(\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x^2 + x + 1} \right) = \boxed{\ln \frac{\infty}{\infty}}$$

$$= \ln \left(\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x^2} \right) = \ln 1$$

Provedeme krácení ve výrazu $\frac{x^2}{x^2}$ a použijeme zřejmý vztah

$$\lim_{x \rightarrow \infty} 1 = 1.$$

Vypočtete $\lim_{x \rightarrow \infty} [2 \ln x - \ln(x^2 + x + 1)]$.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} [2 \ln x - \ln(x^2 + x + 1)] = \boxed{\infty - \infty}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} [\ln x^2 - \ln(x^2 + x + 1)]$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \ln \frac{x^2}{x^2 + x + 1} = \ln \left(\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x^2 + x + 1} \right) = \boxed{\ln \frac{\infty}{\infty}}$$

$$= \ln \left(\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x^2} \right) = \ln 1 = 0$$

$\ln 1 = 0$. Vyřešeno!

2 Limity na l'Hospitalovo pravidlo

Vypočtete $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{1 - e^x}$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{1 - e^x}$$

Vypočtěte $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{1 - e^x}$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{1 - e^x} = \frac{0}{0}$$

Dosadíme. Protože $\arcsin 0 = 0$ a $e^0 = 1$, dostáváme neurčitý výraz.

Vypočtete $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{1 - e^x}$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{1 - e^x} = \frac{0}{0} \stackrel{\text{l'H.}}{=}$$

Použijeme l'Hospitalovo pravidlo.

Vypočtěte $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{1 - e^x}$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{1 - e^x} = \boxed{\frac{0}{0}} \stackrel{\text{l'H.}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{-e^x}$$

Podle tohoto pravidla platí

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{1 - e^x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\arcsin x)'}{(1 - e^x)'}$$

pokud druhá limita existuje (ať konečná nebo nekonečná).

Vypočtete $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{1 - e^x}$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{1 - e^x} = \boxed{\frac{0}{0}} \stackrel{\text{l'H.}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{-e^x} = -1$$

Dosadíme. Dostáváme

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\sqrt{1-0}}}{-1} = \frac{1}{-1} = -1$$

Vypočtete $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{1 - e^x}$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{1 - e^x} = \boxed{\frac{0}{0}} \stackrel{\text{l'H.}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{-e^x} = -1$$

Hotovo!

Vypočtete $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x \ln x}{x^2 + x + 1}$

Vypočtete $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x \ln x}{x^2 + x + 1}$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x \ln x}{x^2 + x + 1}$$

Začneme.

Vypočtete $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x \ln x}{x^2 + x + 1}$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x \ln x}{x^2 + x + 1} = \frac{\infty}{\infty}$$

Dosadíme. Dostáváme

$$\frac{\infty \ln \infty}{\infty} = \frac{\infty}{\infty}$$

Jedná se o neurčitý výraz.

Vypočtete $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x \ln x}{x^2 + x + 1}$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x \ln x}{x^2 + x + 1} = \boxed{\frac{\infty}{\infty}} \stackrel{\text{l'H.}}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x + 1}{2x + 1}$$

Použijeme l'Hospitalovo pravidlo. Při derivování dostáváme

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x \ln x)'}{(x^2 + x + 1)'} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x + x \frac{1}{x}}{2x + 1}$$

Vypočtete $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x \ln x}{x^2 + x + 1}$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x \ln x}{x^2 + x + 1} = \frac{\infty}{\infty} \stackrel{\text{r'H.}}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x + 1}{2x + 1} = \frac{\infty}{\infty}$$

Dosadíme. Dostáváme

$$\frac{\ln \infty + 1}{\infty} = \frac{\infty}{\infty}$$

Vypočtete $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x \ln x}{x^2 + x + 1}$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x \ln x}{x^2 + x + 1} = \boxed{\frac{\infty}{\infty}} \stackrel{\text{l'H.}}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x + 1}{2x + 1} = \boxed{\frac{\infty}{\infty}} \stackrel{\text{l'H.}}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{2}$$

Použijeme ještě jednou l'Hospitalovo pravidlo.

Vypočtete $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x \ln x}{x^2 + x + 1}$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x \ln x}{x^2 + x + 1} = \boxed{\frac{\infty}{\infty}} \stackrel{\text{l'H.}}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x + 1}{2x + 1} = \boxed{\frac{\infty}{\infty}} \stackrel{\text{l'H.}}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$$

Dosadíme. Dostáváme

$$\frac{1}{\infty} = \frac{0}{\infty} = 0$$

Vypočtete $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{\sin^3 x}$

Vypočtete $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{\sin^3 x}$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{\sin^3 x}$$

Začneme danou limitou.

Vypočtete $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{\sin^3 x}$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{\sin^3 x} = \frac{0}{0}$$

Dosadíme. Dostáváme

$$\frac{0 - \sin 0}{\sin^3 0} = \frac{0}{0}$$

Vypočtete $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{\sin^3 x}$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{\sin^3 x} = \frac{0}{0} \stackrel{\text{l'H.}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{3 \sin^2 x \cos x}$$

- Užijeme l'Hospitalovo pravidlo.
- Podle pravidla pro derivaci složené funkce platí

$$(\sin^3(x))' = 3 \sin^2 x (\sin x)' = 3 \sin^2 x \cos x.$$

Vypočtete $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{\sin^3 x}$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{\sin^3 x} = \frac{0}{0} \stackrel{\text{l'H.}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{3 \sin^2 x \cos x} = \frac{0}{0}$$

Dosadíme. Protože $\cos 0 = 1$ a $\sin 0 = 0$, dostáváme stále $\frac{0}{0}$.

Vypočtete $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{\sin^3 x}$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{\sin^3 x} = \frac{0}{0} \stackrel{\text{l'H.}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{3 \sin^2 x \cos x} = \frac{0}{0}$$

$$\stackrel{\text{l'H.}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{6 \sin x \cos^2 x - 3 \sin^3 x}$$

Užijeme l'Hospitalovo pravidlo ještě jednou. Ve jmenovateli dostáváme

$$(3 \sin^2 x \cos x)' = 3 \cdot 2 \sin x \cos x \cos x + 3 \sin^2 x (-\sin x)$$

(**derivace součinu** a **derivace složené funkce**).

Vypočtete $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{\sin^3 x}$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{\sin^3 x} = \frac{0}{0} \stackrel{\text{l'H.}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{3 \sin^2 x \cos x} = \frac{0}{0}$$

$$\stackrel{\text{l'H.}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{6 \sin x \cos^2 x - 3 \sin^3 x} = \frac{0}{0}$$

Dosadíme. Stále neurčitý výraz $\frac{0}{0}$.

Vypočtete $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{\sin^3 x}$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{\sin^3 x} = \boxed{\frac{0}{0}} \stackrel{\text{l'H.}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{3 \sin^2 x \cos x} = \boxed{\frac{0}{0}}$$

$$\stackrel{\text{l'H.}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{6 \sin x \cos^2 x - 3 \sin^3 x} = \boxed{\frac{0}{0}}$$

$$\stackrel{\text{l'H.}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{6 \cos^3 x - 6.2. \sin^2 x \cos x - 9 \sin^2 x \cos x}$$

Užijeme l'Hospitalovo pravidlo ještě jednou.

Vypočtete $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{\sin^3 x}$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{\sin^3 x} = \boxed{\frac{0}{0}} \stackrel{\text{l'H.}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{3 \sin^2 x \cos x} = \boxed{\frac{0}{0}}$$

$$\stackrel{\text{l'H.}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{6 \sin x \cos^2 x - 3 \sin^3 x} = \boxed{\frac{0}{0}}$$

$$\stackrel{\text{l'H.}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{6 \cos^3 x - 6 \cdot 2 \cdot \sin^2 x \cos x - 9 \sin^2 x \cos x} = \frac{1}{6}$$

Dostáváme funkci, která je spojitá v $x = 0$. Skutečně, dosazením dostáváme dobře definovaný výraz a máme výsledek.

Vypočtěte $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \operatorname{arctg} x}{x^3}$

Vypočtěte $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \operatorname{arctg} x}{x^3}$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \operatorname{arctg} x}{x^3} = \boxed{\frac{0}{0}} \stackrel{\text{l'H.}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{1}{1+x^2}}{3x^2}$$

Dosadíme. Přitom platí $\boxed{\operatorname{arctg} 0 = 0}$. Dostáváme neurčitý výraz a budeme používat l'Hospitalovo pravidlo.

Vypočtěte $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \operatorname{arctg} x}{x^3}$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \operatorname{arctg} x}{x^3} = \boxed{\frac{0}{0}} \stackrel{\text{l'H.}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{1}{1+x^2}}{3x^2} = \boxed{\frac{0}{0}}$$

Dosadíme a vidíme že se jedná stále o neurčitý výraz.

Vypočtěte $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \operatorname{arctg} x}{x^3}$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \operatorname{arctg} x}{x^3} = \boxed{\frac{0}{0}} \stackrel{\text{l'H.}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{1}{1+x^2}}{3x^2} = \boxed{\frac{0}{0}}$$

$$\stackrel{\text{pr.}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{3(1+x^2)}$$

Je sice možno ještě jednou aplikovat l'Hospitalovo pravidlo, tato možnost však vede ke složitým výpočtům. Proto raději upravíme složený zlomek

$$\frac{1 - \frac{1}{1+x^2}}{3x^2} = \frac{\frac{x^2}{1+x^2}}{3x^2} = \frac{x^2}{(1+x^2)3x^2} = \frac{1}{3(1+x^2)}$$

Vypočtěte $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \operatorname{arctg} x}{x^3}$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \operatorname{arctg} x}{x^3} = \boxed{\frac{0}{0}} \stackrel{\text{l'H.}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{1}{1+x^2}}{3x^2} = \boxed{\frac{0}{0}}$$

$$\stackrel{\text{pr.}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{3(1+x^2)} = \frac{1}{3}$$

Dosadíme. Funkce je spojitá v bodě $x = 0$ a limitu tedy určíme přímo dosazením.

Find $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x$.

Find $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x$.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x$$

We start with the limit and substitute.

Find $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x$.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0 \times (-\infty) \stackrel{\text{pr.}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}}$$

The substitution gives an indeterminate form. We have to write the function in the limit as a fraction. To do this we write $x = \frac{1}{\frac{1}{x}}$ and multiply with logarithm.

Find $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x$.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0 \times (-\infty) \stackrel{\text{pr.}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \frac{-\infty}{\infty}$$

Now we have indeterminate form for which l' Hospital rule can be used.

Find $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x$.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = \boxed{0 \times (-\infty)} \stackrel{\text{pr.}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \boxed{\frac{-\infty}{\infty}}$$

$$\stackrel{\text{l'H.}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}$$

We use l' Hospital rule.

Find $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x$.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = \boxed{0 \times (-\infty)} \stackrel{\text{pr.}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \boxed{\frac{-\infty}{\infty}}$$

$$\stackrel{\text{l'H.}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} \stackrel{\text{pr.}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} -x$$

We simplify. The function in the limit is continuous at $x = 0$.

Find $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x$.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = \boxed{0 \times (-\infty)} \stackrel{\text{pr.}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \frac{-\infty}{\infty}$$

$$\stackrel{\text{l'H.}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} \stackrel{\text{pr.}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} -x = 0$$

The limit of continuous function can be evaluated by direct substitution.

Find $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x$.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = \boxed{0 \times (-\infty)} \stackrel{\text{pr.}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \boxed{\frac{-\infty}{\infty}}$$

$$\stackrel{\text{l'H.}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} \stackrel{\text{pr.}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} -x = 0$$

The problem is solved.

Find $\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 e^{-x^2}$

Find $\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 e^{-x^2}$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 e^{-x^2}$$

We start with the limit.

Find $\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 e^{-x^2}$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 e^{-x^2} = \infty \times 0$$

Dosadíme. More precisely, we evaluate separately the following limits

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \quad \text{and} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x^2}.$$

We obtain an indeterminate form.

Find $\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 e^{-x^2}$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 e^{-x^2} = \boxed{\infty \times 0} \stackrel{\text{pr.}}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{e^{x^2}}$$

We have to convert the function inside the limit into fraction. We use the identity

$$e^{-x^2} = \frac{1}{e^{x^2}}$$

Find $\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 e^{-x^2}$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 e^{-x^2} = \boxed{\infty \times 0} \stackrel{\text{pr.}}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{e^{x^2}} = \boxed{\frac{\infty}{\infty}}$$

The limit has the form required by the l' Hospital rule.

Find $\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 e^{-x^2}$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 e^{-x^2} = \boxed{\infty \times 0} \stackrel{\text{pr.}}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{e^{x^2}} = \boxed{\frac{\infty}{\infty}} \stackrel{\text{l'H.}}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{2xe^{x^2}}$$

We use l' Hospital rule.

Find $\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 e^{-x^2}$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 e^{-x^2} = \boxed{\infty \times 0} \stackrel{\text{pr.}}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{e^{x^2}} = \boxed{\frac{\infty}{\infty}} \stackrel{\text{l'H.}}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{2xe^{x^2}}$$

$$\stackrel{\text{pr.}}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{e^{x^2}}$$

We simplify.

Find $\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 e^{-x^2}$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 e^{-x^2} = \boxed{\infty \times 0} \stackrel{\text{pr.}}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{e^{x^2}} = \boxed{\frac{\infty}{\infty}} \stackrel{\text{l'H.}}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{2xe^{x^2}}$$
$$\stackrel{\text{pr.}}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{e^{x^2}} = \frac{1}{\infty}$$

Dosadíme (in the sense of limits). Hence we evaluate separately the limit of the numerator and the denominator.

Find $\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 e^{-x^2}$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 e^{-x^2} = \boxed{\infty \times 0} \stackrel{\text{pr.}}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{e^{x^2}} = \boxed{\frac{\infty}{\infty}} \stackrel{\text{l'H.}}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{2xe^{x^2}}$$

$$\stackrel{\text{pr.}}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{e^{x^2}} = \frac{1}{\infty} = 0$$

We obtain well-defined expression which equals zero. The problem is solved.

Find $\lim_{x \rightarrow \infty} x(\operatorname{arctg} x - \frac{\pi}{2})$

Find $\lim_{x \rightarrow \infty} x \left(\operatorname{arctg} x - \frac{\pi}{2} \right)$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \left(\operatorname{arctg} x - \frac{\pi}{2} \right)$$

Find $\lim_{x \rightarrow \infty} x(\operatorname{arctg} x - \frac{\pi}{2})$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \left(\operatorname{arctg} x - \frac{\pi}{2} \right) = \boxed{\infty \times 0} \stackrel{\text{pr.}}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{arctg} x - \frac{\pi}{2}}{\frac{1}{x}}$$

Find $\lim_{x \rightarrow \infty} x(\operatorname{arctg} x - \frac{\pi}{2})$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \left(\operatorname{arctg} x - \frac{\pi}{2} \right) = \boxed{\infty \times 0} \stackrel{\text{pr.}}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{arctg} x - \frac{\pi}{2}}{\frac{1}{x}} = \boxed{\frac{0}{0}}$$

$$\stackrel{\text{r'H.}}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}}$$

Find $\lim_{x \rightarrow \infty} x(\operatorname{arctg} x - \frac{\pi}{2})$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \left(\operatorname{arctg} x - \frac{\pi}{2} \right) = \boxed{\infty \times 0} \stackrel{\text{pr.}}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{arctg} x - \frac{\pi}{2}}{\frac{1}{x}} = \boxed{\frac{0}{0}}$$

$$\stackrel{\text{r'H.}}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}} = \boxed{\frac{0}{0}} \stackrel{\text{pr.}}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x^2}{1+x^2}$$

Find $\lim_{x \rightarrow \infty} x(\operatorname{arctg} x - \frac{\pi}{2})$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \left(\operatorname{arctg} x - \frac{\pi}{2} \right) = \boxed{\infty \times 0} \stackrel{\text{pr.}}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{arctg} x - \frac{\pi}{2}}{\frac{1}{x}} = \boxed{\frac{0}{0}}$$

$$\stackrel{\text{l'H.}}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}} = \boxed{\frac{0}{0}} \stackrel{\text{pr.}}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x^2}{1+x^2} = \boxed{\frac{-\infty}{\infty}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x^2}{x^2}$$

Find $\lim_{x \rightarrow \infty} x \left(\operatorname{arctg} x - \frac{\pi}{2} \right)$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \left(\operatorname{arctg} x - \frac{\pi}{2} \right) = \boxed{\infty \times 0} \stackrel{\text{pr.}}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{arctg} x - \frac{\pi}{2}}{\frac{1}{x}} = \boxed{\frac{0}{0}}$$

$$\stackrel{\text{l'H.}}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}} = \boxed{\frac{0}{0}} \stackrel{\text{pr.}}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x^2}{1+x^2} = \boxed{\frac{-\infty}{\infty}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x^2}{x^2} = -1$$

Děkuji za pozornost, to je vše.