

Neurčitý integrál

Robert Mařík

16. března 2011

V tomto souboru jsou vysvětleny a na příkladech s postupným řešením demonstrovány základní integrační metody. Ikonka ♣ za integrálem načte integrál do **online aplikace** na adrese <http://www.mendelu.cz/user/marik/maw>, která umožní výpočet integrálu, včetně automatických návrhů, jakou metodu zvolit.

1 Definice neurčitého integrálu

Definice (neurčitý integrál, primitivní funkce). Buď I otevřený interval, f a F funkce definované na I . Jestliže platí

$$F'(x) = f(x) \text{ pro všechna } x \in I, \quad (1)$$

nazývá se funkce F **primitivní funkcí k funkci f** , nebo též **neurčitý integrál funkce f** na intervalu I . Zapisujeme

$$\int f(x) dx = F(x).$$

Existuje-li k funkci f neurčitý integrál na intervalu I , nazývá se funkce f **integrovatelná na I** .

Primitivní funkce $F(x)$ je vždy spojitá na I , plyne to z existence derivace.

Věta 1 (postačující podmínka existence neurčitého integrálu). Ke každé spojitě existující funkci existuje neurčitý integrál.

Věta 2 (jednoznačnost primitivní funkce). Primitivní funkce je na daném intervalu k dané funkci určena jednoznačně, až na libovolnou aditivní konstantu. Přesněji, platí následující:

- Je-li F primitivní funkcí k funkci f na intervalu I , platí totéž i pro funkci $G(x) = F(x) + c$, kde $c \in \mathbb{R}$ je libovolná konstanta nezávislá na x .
- Jsou-li F a G primitivní funkce k téže funkci f na intervalu I , liší se obě funkce na intervalu I nejvýše o aditivní konstantu, tj. existuje $c \in \mathbb{R}$ takové, že

$$F(x) = G(x) + c \quad \text{pro všechna } x \in I.$$

Bohužel, ne vždy neurčitý integrál dokážeme efektivně najít. Zatímco problém nalezení derivace funkce složené z funkcí, které umíme derivovat, spočívá pouze ve správné aplikaci vzorců pro derivování, problém nalézt neurčitý integrál i k funkci tak jednoduché, jako je například e^{-x^2} je neřešitelný ve třídě elementárních funkcí.

2 Základní vzorce

Věta 3. Necht' f, g jsou funkce integrovatelné na I , c necht' je reálné číslo. Pak na intervalu I platí

$$\int f(x) + g(x) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx,$$
$$\int cf(x) dx = c \int f(x) dx.$$

Věta 4. Necht' f je funkce integrovatelná na I .

Pak $\int f(ax + b) dx = \frac{1}{a} F(ax + b)$, kde F je funkce primitivní k funkci f na intervalu I . Platí pro ta x , pro která je $ax + b \in I$.

Věta 5. Necht' funkce f má derivaci a nemá nulový bod na intervalu I . Potom na tomto intervalu

platí $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln |f(x)|$.

Najděte $\int (2x + 3\sqrt[4]{x} + \frac{6}{x^3} - \sin x + e^x) dx$.



$$\begin{aligned} I &= \int (2x + 3\sqrt[4]{x} + \frac{6}{x^3} - \sin x + e^x) dx \\ &= 2 \int x dx + 3 \int x^{\frac{1}{4}} dx + 6 \int x^{-3} dx - \int \sin x dx + \int e^x dx \\ &= 2 \frac{x^2}{2} + 3 \frac{x^{5/4}}{5/4} + 6 \frac{x^{-2}}{-2} - (-\cos x) + e^x + C \\ &= x^2 + \frac{12}{5} x^{5/4} - 3 \frac{1}{x^2} + \cos x + e^x + C \end{aligned}$$

Najděte $\int \operatorname{tg} x dx$.



$$\begin{aligned}
 I &= \int \operatorname{tg} x \, dx \\
 &= \int \frac{\sin x}{\cos x} \, dx \\
 &= - \int \frac{-\sin x}{\cos x} \, dx \\
 &= - \int \frac{(\cos x)'}{\cos x} \, dx \\
 &= - \ln |\cos x| + C
 \end{aligned}$$

Najděte $\int \frac{x+2}{x^2+4x+5} \, dx$.



$$\begin{aligned}
 I &= \int \frac{x+2}{x^2+4x+5} \, dx \\
 &= \frac{1}{2} \int \frac{2x+4}{x^2+4x+5} \, dx \\
 &= \frac{1}{2} \int \frac{(x^2+4x+5)'}{x^2+4x+5} \, dx \\
 &= \frac{1}{2} \ln(x^2+4x+5) + C
 \end{aligned}$$

Najděte $\int \frac{x+5}{x^2+4} \, dx$.



$$\begin{aligned}
 I &= \int \frac{x+5}{x^2+4} \, dx \\
 &= \int \frac{1}{2} \cdot \frac{2x}{x^2+4} + \frac{5}{x^2+4} \, dx \\
 &= \frac{1}{2} \ln(x^2+4) + 5 \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{x}{2} + C
 \end{aligned}$$

Najděte $\int \frac{1}{(x+6)^3} \, dx$.



$$\begin{aligned}
 I &= \int \frac{1}{(x+6)^3} dx \\
 &= \int (x+6)^{-3} dx \\
 &= \frac{(x+6)^{-2}}{-2} \\
 &= -\frac{1}{2(x+6)^2} + C
 \end{aligned}$$

Najděte následující integrály.

$$\begin{aligned}
 \int \frac{1}{2x+5} dx &= \frac{1}{2} \ln|2x+5| + C \\
 \int \frac{1}{(2-x)^5} dx &= \int (2-1 \cdot x)^{-5} dx \\
 &= \frac{(2-x)^{-4}}{-4} \cdot \frac{1}{-1} \\
 &= \frac{1}{4(2-x)^4} + C
 \end{aligned}$$

$$\int e^{-x} dx = -e^{-x} + C$$

$$\int e^{3x} dx = \frac{1}{3} e^{3x} + C$$

Najděte následující integrály.

$$\begin{aligned}
 \int (e^x + e^{-x})^2 dx &= \int (e^{2x} + 2 + e^{-2x}) dx \\
 &= \frac{1}{2} e^{2x} + 2x - \frac{1}{2} e^{-2x} + C \\
 \int \sin x \cos x dx &= \frac{1}{2} \int \sin(2x) dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot (-\cos 2x) + C \\
 \int \sin^2 x dx &= \frac{1}{2} \int (1 - \cos(2x)) dx = \frac{1}{2} \left[x - \frac{1}{2} \sin(2x) \right] + C \\
 \int \frac{x^2}{x+1} dx &= \int \frac{x^2 - 1 + 1}{x+1} dx = \int x - 1 + \frac{1}{x+1} dx \\
 &= \frac{x^2}{2} - x + \ln|x+1| + C
 \end{aligned}$$

Najděte $\int \frac{x+5}{x^2-4x+9} dx$.



$$\begin{aligned}
I &= \int \frac{x+5}{x^2-4x+9} dx \\
&= \int \frac{\frac{1}{2}(2x-4)+2+5}{x^2-4x+9} dx \\
&= \int \frac{1}{2} \cdot \frac{2x-4}{x^2-4x+9} + \frac{2+5}{x^2-4x+9} dx \\
&= \frac{1}{2} \ln|x^2-4x+9| + \int \frac{7}{(x-2)^2+5} dx \\
&= \frac{1}{2} \ln|x^2-4x+9| + 7 \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg} \frac{x-2}{\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{1} \\
&= \frac{1}{2} \ln|x^2-4x+9| + 7 \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg} \frac{x-2}{\sqrt{5}} + C
\end{aligned}$$

3 Integrace per-partés

Věta 6. Necht' funkce u a v mají derivace na intervalu I . Pak platí

$$\int u(x)v'(x) dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x) dx, \quad (2)$$

pokud integrál na pravé straně existuje.

Věta 6. Necht' funkce u a v mají derivace na intervalu I . Pak platí

$$\int u(x)v'(x) dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x) dx, \quad (3)$$

pokud integrál na pravé straně existuje.

Důkaz:

$(uv)' = u'v + uv'$	derivace součinu
$\int (uv)' dx = \int u'v dx + \int uv' dx$	zintegrování a linearita integrálu
$uv = \int u'v dx + \int uv' dx$	integrál odstraní derivaci
$uv - \int u'v dx = \int uv' dx$	algebraická úprava

Integrály typické pro výpočet metodou per-partés. $P(x)$ je polynom.

$$\int P(x)e^{\alpha x} dx, \int P(x) \sin(\alpha x) dx, \int P(x) \cos(\alpha x) dx,$$

$$\int P(x) \operatorname{arctg} x \, dx, \int P(x) \ln^m x \, dx.$$

Vypočítejte $\int (x+1) \cdot \ln x \, dx$

$$\begin{aligned} \int (x+1) \ln x \, dx &= \begin{array}{l} u = \ln x \quad u' = \frac{1}{x} \\ v' = x+1 \quad v = \frac{x^2}{2} + x \end{array} \\ &= \ln x \left(\frac{x^2}{2} + x \right) - \int \frac{1}{x} \left(\frac{x^2}{2} + x \right) dx \\ &= \left(\frac{x^2}{2} + x \right) \ln x - \int \left(\frac{1}{2}x + 1 \right) dx \\ &= \left(\frac{x^2}{2} + x \right) \ln x - \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{2} + x \right) \\ &= \left(\frac{x^2}{2} + x \right) \ln x - \frac{1}{4}x^2 - x + C \end{aligned}$$

Vypočítejte $\int x \sin x \, dx$

$$\begin{aligned} \int x \cdot \sin x \, dx &= \begin{array}{l} u = x \quad u' = 1 \\ v' = \sin x \quad v = -\cos x \end{array} \\ &= -x \cos x - \int 1 \cdot (-\cos x) dx \\ &= -x \cos x + \int \cos x \, dx \\ &= -x \cos x + \sin x + C \end{aligned}$$

Vypočtěte $\int (x - 2) \cdot \sin(2x) dx$

$$\begin{aligned} \int (x - 2) \sin(2x) dx &= \begin{array}{l} u = x - 2 \quad u' = 1 \\ v' = \sin(2x) \quad v = -\frac{1}{2} \cos 2x \end{array} \\ &= (x - 2) \cdot \left(-\frac{1}{2} \cos(2x)\right) - \int 1 \cdot \left(-\frac{1}{2} \cos 2x\right) dx \\ &= -\frac{1}{2}(x - 2) \cos(2x) + \frac{1}{2} \int \cos 2x dx \\ &= -\frac{1}{2}(x - 2) \cos(2x) + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \sin(2x) + C \\ &= -\frac{1}{2}(x - 2) \cos(2x) + \frac{1}{4} \sin(2x) + C \end{aligned}$$

Vypočtěte $\int (x^2 + 1) \sin x dx$

$$\begin{aligned} \int (x^2 + 1) \cdot \sin x dx &= \begin{array}{l} u = x^2 + 1 \quad u' = 2x \\ v' = \sin x \quad v = -\cos x \end{array} \\ &= -(x^2 + 1) \cos x + 2 \int x \cdot \cos x dx \\ &= \begin{array}{l} u = x \quad u' = 1 \\ v' = \cos x \quad v = \sin x \end{array} \\ &= -(x^2 + 1) \cos x + 2 \left(x \sin x - \int \sin x dx \right) \\ &= -(x^2 + 1) \cos x + 2 \left(x \sin x - (-\cos x) \right) \\ &= (1 - x^2) \cos x + 2x \sin x + C \end{aligned}$$

Vypočtěte $\int (x^2 + 1)e^{-x} dx$.

$$\begin{aligned} \int (x^2 + 1)e^{-x} dx & \quad \begin{array}{l} u = x^2 + 1 \quad u' = 2x \\ v' = e^{-x} \quad v = -e^{-x} \end{array} \\ &= -(x^2 + 1)e^{-x} + 2 \int x e^{-x} dx \quad \begin{array}{l} u = x \quad u' = 1 \\ v' = e^{-x} \quad v = -e^{-x} \end{array} \\ &= -(x^2 + 1)e^{-x} + 2(-x e^{-x} + \int e^{-x} dx) \\ &= -(x^2 + 1)e^{-x} + 2(-x e^{-x} - e^{-x}) = -e^{-x}(x^2 + 2x + 3) + C, \end{aligned}$$



Vypočtěte $\int x \operatorname{arctg} x dx$.

$$\begin{aligned} \int x \operatorname{arctg} x dx & \quad \begin{array}{l} u = \operatorname{arctg} x \quad u' = \frac{1}{1+x^2} \\ v' = x \quad v = \frac{x^2}{2} \end{array} = \frac{x^2}{2} \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \int \frac{x^2}{1+x^2} dx \\ &= \frac{x^2}{2} \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \int 1 - \frac{1}{1+x^2} dx \\ &= \frac{x^2}{2} \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} (x - \operatorname{arctg} x) + C. \end{aligned}$$



Vypočtěte $\int \ln x \, dx$

$$\int 1 \cdot \ln x \, dx \quad \begin{array}{l} u = \ln x \quad u' = \frac{1}{x} \\ v' = 1 \quad v = x \end{array} = x \ln x - \int 1 \, dx$$

$$= x \ln x - x$$

$$= x(\ln x - 1) + C$$

Vypočtěte $\int \ln^2 x \, dx$

$$\int 1 \cdot \ln^2 x \, dx \quad \begin{array}{l} u = \ln^2 x \quad u' = \frac{2 \ln x}{x} \\ v' = 1 \quad v = x \end{array} = x \ln^2 x - 2 \int \ln x \, dx$$

$$\begin{array}{l} u = \ln x \quad u' = \frac{1}{x} \\ v' = 1 \quad v = x \end{array}$$

$$= x \ln^2 x - 2 \left(x \ln x - \int 1 \, dx \right)$$

$$= x \ln^2 x - 2(x \ln x - x)$$

$$= x \ln^2 x - 2x \ln x + 2x + C$$

Najděte $\int x^3 \sin x \, dx$.

$$\int x^3 \sin x \, dx =$$

$u = x^3$	$3x^2$	$6x$	6	0
$v' = \sin x$	$-\cos x$	$-\sin x$	$\cos x$	$\sin x$

$$= -x^3 \cos x - (-3x^2 \sin x) + 6x \cos x - 6 \sin x$$

$$= (-x^3 + 6x) \cos(x) + (3x^2 - 6) \sin x + C$$

Najděte $\int (x^3 + 2)e^{-x} dx$.



$$\int (x^3 + 2x)e^{-x} dx$$

$$= \begin{array}{ccccc} u = x^3 + 2x & 3x^2 + 2 & 6x & 6 & 0 \\ v' = e^{-x} & -e^{-x} & e^{-x} & -e^{-x} & e^{-x} \end{array}$$

$$\begin{aligned} &= -(x^3 + 2x)e^{-x} - (3x^2 + 2)e^{-x} + (-6xe^{-x}) - 6e^{-x} \\ &= -e^{-x}(x^3 + 2x + 3x^2 + 2 + 6x + 6) \\ &= -e^{-x}(x^3 + 3x^2 + 8x + 8) \end{aligned}$$

4 Integrace pomocí substituce.

Věta 7. Necht' $f(t)$ je funkce spojitá na intervalu I , necht' funkce $\varphi(x)$ má derivaci na intervalu J a platí $\varphi(J) = I$. Potom na intervalu J platí

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x) dx = \int f(t) dt, \quad (4)$$

dosadíme-li napravo $t = \varphi(x)$.

Schematicky: $\varphi(x) = t$ $\varphi'(x) dx = dt$

Věta 8. Necht' $f(x)$ je funkce spojitá na intervalu I , necht' funkce $\varphi(t)$ má nenulovou derivaci na intervalu J a platí $\varphi(J) = I$. Potom na intervalu J platí

$$\int f(x) dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t) dt, \quad (5)$$

dosadíme-li napravo $t = \varphi^{-1}(x)$, kde $\varphi^{-1}(x)$ je funkce inverzní k funkci $\varphi(x)$.

Schematicky: $x = \varphi(t)$ $dx = \varphi'(t) dt$

Vypočtěte $\int \frac{\sin(\ln x)}{x} dx$



$$\int \frac{\sin(\ln x)}{x} dx = \int \sin(\ln x) \frac{1}{x} dx \quad \begin{array}{l} \ln x = t \\ \frac{1}{x} dx = dt \end{array} = \int \sin t dt$$

$$= -\cos t = -\cos(\ln x) + C$$

Vypočítejte $\int x e^{1-x^2} dx$.

$$\int x e^{1-x^2} dx \quad \begin{array}{l} 1 - x^2 = t \\ -2x dx = dt \\ x dx = -\frac{1}{2} dt \end{array}$$

$$= -\frac{1}{2} \int e^t dt$$

$$= -\frac{1}{2} e^t$$

$$= -\frac{1}{2} e^{1-x^2}$$

Vypočítejte $\int \frac{x}{x^4 + 16} dx$

$$\int \frac{x}{x^4 + 16} dx \quad \begin{array}{l} x^2 = t \\ 2x dx = dt \\ x dx = \frac{1}{2} dt \\ x^4 = t^2 \end{array} = \frac{1}{2} \int \frac{1}{t^2 + 16} dt$$

$$= \frac{1}{8} \operatorname{arctg} \frac{t}{4} = \frac{1}{8} \operatorname{arctg} \frac{x^2}{4} + C$$

Vypočtěte $\int \frac{e^{\sqrt{x+1}}}{\sqrt{x+1}} dx$

$$\int \frac{e^{\sqrt{x+1}}}{\sqrt{x+1}} dx = \int e^{\sqrt{x+1}} \frac{1}{\sqrt{x+1}} dx$$

$$\begin{aligned} \sqrt{x+1} &= t \\ \frac{1}{2\sqrt{x+1}} dx &= dt \\ \frac{1}{\sqrt{x+1}} dx &= 2 dt \end{aligned}$$

$$= \int e^t 2 dt = 2e^t = 2e^{\sqrt{x+1}} + C$$



Vypočtěte $\int \operatorname{tg}^3 x dx$.

$$\int \operatorname{tg}^3 x dx = \int \frac{\sin^3 x}{\cos^3 x} dx = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^3 x} \sin x dx = \int \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^3 x} \sin x dx$$

$$\begin{aligned} \cos x &= t \\ -\sin x dx &= dt \\ \sin x dx &= -dt \end{aligned}$$

$$= \int -\frac{1-t^2}{t^3} dt = \int \frac{t^2-1}{t^3} dt = \int \frac{1}{t} - t^{-3} dt$$

$$= \ln|t| + \frac{1}{2}t^{-2} = \ln|\cos x| + \frac{1}{2\cos^2 x} + C$$



Vypočtěte $\int \frac{\sqrt{3x+2}-1}{x+1} dx$.

$$\int \frac{\sqrt{3x+2}-1}{x+1} dx$$

$$\begin{aligned} 3x+2 &= t^2 \\ 3dx &= 2t dt \\ dx &= \frac{2}{3}t dt \\ x &= \frac{1}{3}(t^2-2) \\ t &= \sqrt{3x+2} \end{aligned}$$

$$= \int \frac{t-1}{\frac{1}{3}(t^2-2)+1} \cdot \frac{2}{3}t dt$$

$$= 2 \int \frac{t-1}{t^2+1} \cdot t dt = 2 \int \frac{t^2-t}{t^2+1} dt = 2 \int 1 + \frac{-t-1}{t^2+1} dt$$

$$= 2 \int 1 - \frac{t}{t^2+1} - \frac{1}{t^2+1} dt = 2 \left(t - \frac{1}{2} \ln|t^2+1| - \arctg t \right) + C$$

$$= 2\sqrt{3x+2} - \ln|3x+3| - 2 \arctg \sqrt{3x+2} + C$$

Vypočtěte $\int \frac{1+\sqrt{x-1}}{x} dx$.

$$\int \frac{1+\sqrt{x-1}}{x} dx =$$

$$\begin{aligned} x-1 &= t^2 \\ dx &= 2t dt \\ x &= t^2+1 \\ \sqrt{x-1} &= t \end{aligned}$$

$$= \int \frac{1+\sqrt{t^2}}{t^2+1} \cdot 2t dt$$

$$= 2 \int \frac{1+t}{t^2+1} \cdot t dt = 2 \int \frac{t^2+t}{t^2+1} dt = 2 \int 1 + \frac{t-1}{t^2+1} dt$$

$$= 2 \int 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{2t}{t^2+1} - \frac{1}{t^2+1} dt$$

$$= 2 \left[t + \frac{1}{2} \ln|t^2+1| - \arctg t \right]$$

$$= 2 \left[\sqrt{x-1} + \frac{1}{2} \ln|x| - \arctg \sqrt{x-1} \right] + C$$

5 Další ...

Jednotlivé metody je pochopitelně někdy nutno kombinovat.

Vypočtěte $\int \arcsin x dx$