Neurčitý integrál

Robert Mařík

16. března 2011

V tomto souboru jsou vysvětleny a na příkladech s postupným řešením demonstrovány základní integrační metody. Ikonka ♣ za integrálem načte integrál do online aplikace na adrese http://www.mendelu.cz/user/marik/maw, která umožní výpočet integrálu, včetně automatických návrhů, jakou metodu zvolit.

1 Definice neurčitého integrálu

Definice (neurčitý integrál, primitivní funkce)**.** Buď I otevřený interval, f a F funkce definované na I. Jestliže platí

$$F'(x) = f(x) \text{ pro všechna } x \in I, \tag{1}$$

nazývá se funkce F *primitivní funkcí k funkci* f, nebo též *neurčitý integrál funkce* f na intervalu I. Zapisujeme

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x).$$

Existuje-li k funkci f neurčitý integrál na intervalu I, nazývá se funkce f *integrovatelná na* I.

Primitivní funkce $F(x)$ je vždy spojitá na I, plyne to z existence derivace.

Věta 1 (postačující podmínka existence neurčitého integrálu)**.** Ke každé spojité funkci existuje neurčitý integrál.

Věta 2 (jednoznačnost primitivní funkce)**.** Primitivní funkce je na daném intervalu k dané funkci určena jednoznačně, až na libovolnou aditivní konstantu. Přesněji, platí následující:

- Je-li F primitivní funkcí k funkci f na intervalu I, platí totéž i pro funkci $G(x) = F(x) + c$, kde $c \in \mathbb{R}$ je libovolná konstanta nezávislá na x.
- Jsou-li F a G primitivní funkce k téže funkci f na intervalu I, liší se obě funkce na intervalu I nejvýše o aditivní konstantu, tj. existuje $c \in \mathbb{R}$ takové, že

$$F(x) = G(x) + c \qquad \text{pro všechna } x \in I.$$

Bohužel, ne vždy neurčitý integrál dokážeme efektivně najít. Zatímco problém nalezení derivace funkce složené z funkcí, které umíme derivovat, spočívá pouze ve správné aplikaci vzorců pro derivování, problém nalézt neurčitý integrál i k funkci tak jednoduché, jako je například e^{-x^2} je neřešitelný ve třídě elementárních funkcí.

2 Základní vzorce

Věta 3. Nechť f, g jsou funkce integrovatelné na I, c nechť je reálné číslo. Pak na intervalu I platí

$$\int f(x) + g(x)\,\mathrm{d}x = \int f(x)\,\mathrm{d}x + \int g(x)\,\mathrm{d}x,$$
$$\int cf(x)\,\mathrm{d}x = c\int f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Věta 4. Nechť f je funkce integrovatelná na I.
Pak $\boxed{\int f(ax+b)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}F(ax+b)}$, kde F je funkce primitivní k funkci f na intervalu I. Platí pro ta x, pro která je $ax+b \in I$.

Věta 5. Nechť funkce f má derivaci a nemá nulový bod na intervalu I. Potom na tomto intervalu platí $\boxed{\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x = \ln|f(x)|}$.

Najděte $\int (2x + 3\sqrt[4]{x} + \frac{6}{x^3} - \sin x + e^x)\,\mathrm{d}x$. ♣

$$\begin{aligned} I &= \int (2x + 3\sqrt[4]{x} + \frac{6}{x^3} - \sin x + e^x)\,\mathrm{d}x \\ &= 2\int x\,\mathrm{d}x + 3\int x^{\frac{1}{4}}\,\mathrm{d}x + 6\int x^{-3}\,\mathrm{d}x - \int \sin x\,\mathrm{d}x + \int e^x\,\mathrm{d}x \\ &= 2\frac{x^2}{2} + 3\frac{x^{5/4}}{5/4} + 6\frac{x^{-2}}{-2} - (-\cos x) + e^x + C \\ &= x^2 + \frac{12}{5}x^{5/4} - 3\frac{1}{x^2} + \cos x + e^x + C \end{aligned}$$

Najděte $\int \operatorname{tg} x\,\mathrm{d}x$. ♣

$$
\begin{aligned}
I &= \int \operatorname{tg} x \,\mathrm{d}x\\
&= \int \frac{\sin x}{\cos x}\,\mathrm{d}x\\
&= -\int \frac{-\sin x}{\cos x}\,\mathrm{d}x\\
&= -\int \frac{(\cos x)'}{\cos x}\,\mathrm{d}x\\
&= -\ln|\cos x| + C
\end{aligned}
$$

♣

Najděte $\int \frac{x+2}{x^2+4x+5}\,\mathrm{d}x$.

$$
\begin{aligned}
I &= \int \frac{x+2}{x^2+4x+5}\,\mathrm{d}x\\
&= \frac{1}{2}\int \frac{2x+4}{x^2+4x+5}\,\mathrm{d}x\\
&= \frac{1}{2}\int \frac{(x^2+4x+5)'}{x^2+4x+5}\,\mathrm{d}x\\
&= \frac{1}{2}\ln(x^2+4x+5) + C
\end{aligned}
$$

♣

Najděte $\int \frac{x+5}{x^2+4}\,\mathrm{d}x$.

$$
\begin{aligned}
I &= \int \frac{x+5}{x^2+4}\,\mathrm{d}x\\
&= \int \frac{1}{2}\cdot\frac{2x}{x^2+4} + \frac{5}{x^2+4}\,\mathrm{d}x\\
&= \frac{1}{2}\ln(x^2+4) + 5\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2} + C
\end{aligned}
$$

♣

Najděte $\int \frac{1}{(x+6)^3}\,\mathrm{d}x$.

$$
\begin{aligned}
I &= \int \frac{1}{(x+6)^3}\,\mathrm{d}x\\
&= \int (x+6)^{-3}\,\mathrm{d}x\\
&= \frac{(x+6)^{-2}}{-2}\\
&= -\frac{1}{2(x+6)^2} + C
\end{aligned}
$$

Najděte následující integrály.

$$
\begin{aligned}
\int \frac{1}{2x+5}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\ln|2x+5| + C\\
\int \frac{1}{(2-x)^5}\,\mathrm{d}x &= \int (2-1\cdot x)^{-5}\,\mathrm{d}x\\
&= \frac{(2-x)^{-4}}{-4}\cdot\frac{1}{-1}\\
&= \frac{1}{4(2-x)^4} + C\\
\int e^{-x}\,\mathrm{d}x &= -e^{-x} + C\\
\int e^{3x}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{3}e^{3x} + C
\end{aligned}
$$

Najděte následující integrály.

$$
\begin{aligned}
\int (e^x + e^{-x})^2\,\mathrm{d}x &= \int (e^{2x} + 2 + e^{-2x})\,\mathrm{d}x\\
&= \frac{1}{2}e^{2x} + 2x - \frac{1}{2}e^{-2x} + C\\
\int \sin x \cos x\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\int \sin(2x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot(-\cos 2x) + C\\
\int \sin^2 x\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\int \Big(1-\cos(2x)\Big)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left[x - \frac{1}{2}\sin(2x)\right] + C\\
\int \frac{x^2}{x+1}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{x^2-1+1}{x+1}\,\mathrm{d}x = \int x - 1 + \frac{1}{x+1}\,\mathrm{d}x\\
&= \frac{x^2}{2} - x + \ln|x+1| + C
\end{aligned}
$$

Najděte $\displaystyle\int \frac{x+5}{x^2-4x+9}\,\mathrm{d}x$.

♣

$$
\begin{aligned}
I &= \int \frac{x+5}{x^2-4x+9}\,\mathrm{d}x \\
&= \int \frac{\frac{1}{2}(2x-4)+2+5}{x^2-4x+9}\,\mathrm{d}x \\
&= \int \frac{1}{2}\cdot\frac{2x-4}{x^2-4x+9} + \frac{2+5}{x^2-4x+9}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\ln|x^2-4x+9| + \int \frac{7}{(x-2)^2+5}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\ln|x^2-4x+9| + 7\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{x-2}{\sqrt{5}}\cdot\frac{1}{1} \\
&= \frac{1}{2}\ln|x^2-4x+9| + 7\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{x-2}{\sqrt{5}} + C
\end{aligned}
$$

3 Integrace per-partés

Věta 6. Nechť funkce u a v mají derivace na intervalu I. Pak platí

$$\boxed{\int u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x,} \tag{2}$$

pokud integrál na pravé straně existuje.

Věta 6. Nechť funkce u a v mají derivace na intervalu I. Pak platí

$$\boxed{\int u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x,} \tag{3}$$

pokud integrál na pravé straně existuje.

Důkaz:

$(uv)' = u'v + uv'$	derivace součinu
$\int (uv)'\,\mathrm{d}x = \int u'v\,\mathrm{d}x + \int uv'\,\mathrm{d}x$	zintegrování a linearita integrálu
$uv = \int u'v\,\mathrm{d}x + \int uv'\,\mathrm{d}x$	integrál odstraní derivaci
$uv - \int u'v\,\mathrm{d}x = \int uv'\,\mathrm{d}x$	algebraická úprava

Integrály typické pro výpočet metodou per-partés. $P(x)$ je polynom.

$$\int P(x)e^{\alpha x}\,\mathrm{d}x,\ \int P(x)\sin(\alpha x)\,\mathrm{d}x,\ \int P(x)\cos(\alpha x)\,\mathrm{d}x,$$

$$\int P(x)\operatorname{arctg} x \,\mathrm{d}x, \int P(x)\ln^m x \,\mathrm{d}x.$$

♣

Vypočtěte $\int (x+1)\cdot \ln x \,\mathrm{d}x$

$$\int (x+1)\ln x \,\mathrm{d}x = \boxed{\begin{matrix} u = \ln x & u' = \dfrac{1}{x} \\ v' = x+1 & v = \dfrac{x^2}{2} + x \end{matrix}}$$

$$= \ln x \left(\frac{x^2}{2} + x\right) - \int \frac{1}{x}\left(\frac{x^2}{2} + x\right) \mathrm{d}x$$

$$= \left(\frac{x^2}{2} + x\right) \ln x - \int \left(\frac{1}{2}x + 1\right) \mathrm{d}x$$

$$= \left(\frac{x^2}{2} + x\right) \ln x - \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{2} + x\right)$$

$$= \left(\frac{x^2}{2} + x\right) \ln x - \frac{1}{4}x^2 - x + C$$

♣

Vypočtěte $\int x \sin x \,\mathrm{d}x$

$$\int x\cdot \sin x \,\mathrm{d}x \boxed{\begin{matrix} u = x & u' = 1 \\ v' = \sin x & v = -\cos x \end{matrix}}$$

$$= -x\cos x - \int 1\cdot(-\cos x)\,\mathrm{d}x$$

$$= -x\cos x + \int \cos x \,\mathrm{d}x$$

$$= -x\cos x + \sin x + C$$

♣

Vypočtěte $\int (x-2)\cdot\sin(2x)\,\mathrm{d}x$

$$\int (x-2)\sin(2x)\,\mathrm{d}x = \boxed{\begin{matrix} u = x-2 & u' = 1 \\ v' = \sin(2x) & v = -\frac{1}{2}\cos 2x \end{matrix}}$$

$$= (x-2)\cdot\left(-\frac{1}{2}\cos(2x)\right) - \int 1\cdot\left(-\frac{1}{2}\cos 2x\right)\,\mathrm{d}x$$

$$= -\frac{1}{2}(x-2)\cos(2x) + \frac{1}{2}\int \cos 2x\,\mathrm{d}x$$

$$= -\frac{1}{2}(x-2)\cos(2x) + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\sin(2x) + C$$

$$= -\frac{1}{2}(x-2)\cos(2x) + \frac{1}{4}\sin(2x) + C$$

♣

Vypočtěte $\int (x^2+1)\sin x\,\mathrm{d}x$

$$\int (x^2+1)\cdot\sin x\,\mathrm{d}x \boxed{\begin{matrix} u = x^2+1 & u' = 2x \\ v' = \sin x & v = -\cos x \end{matrix}}$$

$$= -(x^2+1)\cos x + 2\int x\cdot\cos x\,\mathrm{d}x$$

$$\boxed{\begin{matrix} u = x & u' = 1 \\ v' = \cos x & v = \sin x \end{matrix}}$$

$$= -(x^2+1)\cos x + 2\left(x\sin x - \int \sin x\,\mathrm{d}x\right)$$

$$= -(x^2+1)\cos x + 2\left(x\sin x - (-\cos x)\right)$$

$$= (1-x^2)\cos x + 2x\sin x + C$$

♣

$\boxed{\text{Vypočtěte } \int (x^2+1)e^{-x}\,dx.}$

$$\int (x^2+1)\cdot e^{-x}\,dx \quad \boxed{\begin{array}{ll} u = x^2+1 & u' = 2x \\ v' = e^{-x} & v = -e^{-x} \end{array}}$$

$$= -(x^2+1)e^{-x} + 2\int xe^{-x}\,dx \quad \boxed{\begin{array}{ll} u = x & u' = 1 \\ v' = e^{-x} & v = -e^{-x} \end{array}}$$

$$= -(x^2+1)e^{-x} + 2\left(-xe^{-x} + \int e^{-x}\,dx\right)$$

$$= -(x^2+1)e^{-x} + 2(-xe^{-x} - e^{-x}) = -e^{-x}(x^2+2x+3) + C,$$

♣

$\boxed{\text{Vypočtěte } \int x \operatorname{arctg} x\,dx.}$

$$\int x \operatorname{arctg} x\,dx \quad \boxed{\begin{array}{ll} u = \operatorname{arctg} x & u' = \dfrac{1}{1+x^2} \\ v' = x & v = \dfrac{x^2}{2} \end{array}} = \frac{x^2}{2}\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{1+x^2}\,dx$$

$$= \frac{x^2}{2}\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\int 1 - \frac{1}{1+x^2}\,dx$$

$$= \frac{x^2}{2}\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\left(x - \operatorname{arctg} x\right) + C.$$

♣

Vypočtěte $\int \ln x \, dx$

$$\int 1 \cdot \ln x \, dx \quad \boxed{\begin{matrix} u = \ln x & u' = \frac{1}{x} \\ v' = 1 & v = x \end{matrix}} \quad = x \ln x - \int 1 \, dx$$

$$= x \ln x - x$$

$$= x(\ln x - 1) + C$$

♣

Vypočtěte $\int \ln^2 x \, dx$

$$\int 1 \cdot \ln^2 x \, dx \quad \boxed{\begin{matrix} u = \ln^2 x & u' = \frac{2 \ln x}{x} \\ v' = 1 & v = x \end{matrix}} \quad = x \ln^2 x - 2 \int \ln x \, dx$$

$$\boxed{\begin{matrix} u = \ln x & u' = \frac{1}{x} \\ v' = 1 & v = x \end{matrix}}$$

$$= x \ln^2 x - 2\left(x \ln x - \int 1 \, dx\right)$$

$$= x \ln^2 x - 2\left(x \ln x - x\right)$$

$$= x \ln^2 x - 2x \ln x + 2x + C$$

♣

Najděte $\int x^3 \sin x \, dx$.

$$\int x^3 \sin x \, dx = \quad \boxed{\begin{matrix} u = x^3 & 3x^2 & 6x & 6 & 0 \\ v' = \sin x & -\cos x & -\sin x & \cos x & \sin x \end{matrix}}$$

$$= -x^3 \cos x - (-3x^2 \sin x) + 6x \cos x - 6 \sin x$$

$$= (-x^3 + 6x) \cos(x) + (3x^2 - 6) \sin x + C$$

Najděte $\int (x^3 + 2)e^{-x}\,\mathrm{d}x$. ♣

$$\int (x^3 + 2x)e^{-x}\,\mathrm{d}x$$

$$= \boxed{\begin{array}{ccccc} u = x^3 + 2x & 3x^2 + 2 & 6x & 6 & 0 \\ \\ v' = e^{-x} & -e^{-x} & e^{-x} & -e^{-x} & e^{-x} \end{array}}$$

$$= -(x^3 + 2x)e^{-x} - (3x^2 + 2)e^{-x} + (-6xe^{-x}) - 6e^{-x}$$

$$= -e^{-x}(x^3 + 2x + 3x^2 + 2 + 6x + 6)$$

$$= -e^{-x}(x^3 + 3x^2 + 8x + 8)$$

4 Integrace pomocí substituce.

Věta 7. Nechť $f(t)$ je funkce spojitá na intervalu I, nechť funkce $\varphi(x)$ má derivaci na intervalu J a platí $\varphi(J) = I$. Potom na intervalu J platí

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)\,\mathrm{d}x = \int f(t)\,\mathrm{d}t, \tag{4}$$

dosadíme-li napravo $t = \varphi(x)$.

Schematicky: $\boxed{\varphi(x) = t}$ $\boxed{\varphi'(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t}$

Věta 8. Nechť $f(x)$ je funkce spojitá na intervalu I, nechť funkce $\varphi(t)$ má nenulovou derivaci na intervalu J a platí $\varphi(J) = I$. Potom na intervalu I platí

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t, \tag{5}$$

dosadíme-li napravo $t = \varphi^{-1}(x)$, kde $\varphi^{-1}(x)$ je funkce inverzní k funkci $\varphi(x)$.

Schematicky: $\boxed{x = \varphi(t)}$ $\boxed{\mathrm{d}x = \varphi'(t)\,\mathrm{d}t}$

Vypočtěte $\int \frac{\sin(\ln x)}{x}\,\mathrm{d}x$ ♣

$$\int \frac{\sin(\ln x)}{x}\,\mathrm{d}x = \int \sin(\ln x)\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \quad \boxed{\begin{aligned} \ln x &= t \\ \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x &= \mathrm{d}t \end{aligned}} \quad = \int \sin t\,\mathrm{d}t$$
$$= -\cos t = -\cos(\ln x) + C$$

♣

Vypočtěte $\int x e^{1-x^2}\,\mathrm{d}x$.

$$\int x e^{1-x^2}\,\mathrm{d}x \quad \boxed{\begin{aligned} 1 - x^2 &= t \\ -2x\,\mathrm{d}x &= \mathrm{d}t \\ x\,\mathrm{d}x &= -\frac{1}{2}\,\mathrm{d}t \end{aligned}}$$
$$= -\frac{1}{2}\int e^t\,\mathrm{d}t$$
$$= -\frac{1}{2}e^t$$
$$= -\frac{1}{2}e^{1-x^2}$$

♣

Vypočtěte $\int \frac{x}{x^4+16}\,\mathrm{d}x$

$$\int \frac{x}{x^4+16}\,\mathrm{d}x \quad \boxed{\begin{aligned} x^2 &= t \\ 2x\,\mathrm{d}x &= \mathrm{d}t \\ x\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\,\mathrm{d}t \\ x^4 &= t^2 \end{aligned}} \quad = \frac{1}{2}\int \frac{1}{t^2+16}\,\mathrm{d}t$$
$$= \frac{1}{8}\operatorname{arctg}\frac{t}{4} = \frac{1}{8}\operatorname{arctg}\frac{x^2}{4} + C$$

♣

Vypočtěte $\displaystyle\int \frac{e^{\sqrt{x+1}}}{\sqrt{x+1}}\,\mathrm{d}x$

$$\int \frac{e^{\sqrt{x+1}}}{\sqrt{x+1}}\,\mathrm{d}x = \int e^{\sqrt{x+1}} \frac{1}{\sqrt{x+1}}\,\mathrm{d}x \quad \boxed{\begin{aligned} \sqrt{x+1} &= t \\ \frac{1}{2\sqrt{x+1}}\,\mathrm{d}x &= \mathrm{d}t \\ \frac{1}{\sqrt{x+1}}\,\mathrm{d}x &= 2\,\mathrm{d}t \end{aligned}}$$

$$= \int e^t 2\,\mathrm{d}t = 2e^t = 2e^{\sqrt{x+1}} + C$$

♣

Vypočtěte $\displaystyle\int \mathrm{tg}^3\, x\,\mathrm{d}x$.

$$\int \mathrm{tg}^3\, x\,\mathrm{d}x = \int \frac{\sin^3 x}{\cos^3 x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^3 x} \sin x\,\mathrm{d}x = \int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^3 x} \sin x\,\mathrm{d}x$$

$$\boxed{\begin{aligned} \cos x &= t \\ -\sin x\,\mathrm{d}x &= \mathrm{d}t \\ \sin x\,\mathrm{d}x &= -\mathrm{d}t \end{aligned}} = \int -\frac{1-t^2}{t^3}\,\mathrm{d}t = \int \frac{t^2-1}{t^3}\,\mathrm{d}t = \int \frac{1}{t} - t^{-3}\,\mathrm{d}t$$

$$= \ln|t| + \frac{1}{2}t^{-2} = \ln|\cos x| + \frac{1}{2\cos^2 x} + C$$

♣

Vypočtěte $\displaystyle\int \frac{\sqrt{3x+2}-1}{x+1}\,\mathrm{d}x$.

$$\int \frac{\sqrt{3x+2}-1}{x+1}\,\mathrm{d}x \;\boxed{\begin{aligned} 3x+2 &= t^2\\ 3\,\mathrm{d}x &= 2t\,\mathrm{d}t\\ \mathrm{d}x &= \frac{2}{3}t\,\mathrm{d}t\\ x &= \frac{1}{3}(t^2-2)\\ t &= \sqrt{3x+2}\end{aligned}} = \int \frac{t-1}{\frac{1}{3}(t^2-2)+1}\cdot\frac{2}{3}t\,\mathrm{d}t$$

$$= 2\int \frac{t-1}{t^2+1}\cdot t\,\mathrm{d}t = 2\int \frac{t^2-t}{t^2+1}\,\mathrm{d}t = 2\int 1+\frac{-t-1}{t^2+1}\,\mathrm{d}t$$

$$= 2\int 1-\frac{t}{t^2+1}-\frac{1}{t^2+1}\,\mathrm{d}t = 2\left(t-\frac{1}{2}\ln|t^2+1|-\operatorname{arctg} t\right)+C$$

$$= 2\sqrt{3x+2}-\ln|3x+3|-2\operatorname{arctg}\sqrt{3x+2}+C$$

♣

Vypočtěte $\displaystyle\int \frac{1+\sqrt{x-1}}{x}\,\mathrm{d}x$.

$$\int \frac{1+\sqrt{x-1}}{x}\,\mathrm{d}x = \boxed{\begin{aligned} x-1 &= t^2\\ \mathrm{d}x &= 2t\,\mathrm{d}t\\ x &= t^2+1\\ \sqrt{x-1} &= t\end{aligned}} = \int \frac{1+\sqrt{t^2}}{t^2+1}\cdot 2t\,\mathrm{d}t$$

$$= 2\int \frac{1+t}{t^2+1}\cdot t\,\mathrm{d}t = 2\int \frac{t^2+t}{t^2+1}\,\mathrm{d}t = 2\int 1+\frac{t-1}{t^2+1}\,\mathrm{d}t$$

$$= 2\int 1+\frac{1}{2}\cdot\frac{2t}{t^2+1}-\frac{1}{t^2+1}\,\mathrm{d}t$$

$$= 2\left[t+\frac{1}{2}\ln|t^2+1|-\operatorname{arctg} t\right]$$

$$= 2\left[\sqrt{x-1}+\frac{1}{2}\ln|x|-\operatorname{arctg}\sqrt{x-1}\right]+C$$

5 Další . . .

Jednotlivé metody je pochopitelně někdy nutno kombinovat.

♣

Vypočtěte $\displaystyle\int \arcsin x\,\mathrm{d}x$