INŽENÝRSKÁ MATEMATIKA
DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE 2

Robert Mařík

5. října 2009

Obsah

1 LDR druhého řádu

Definice (lineární diferenciální rovnice druhého řádu). Buďte p, q a f funkce definované a spojité na intervalu I. Diferenciální rovnice

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x) \tag{L2}$$

se nazývá *lineární diferenciální rovnice druhého řádu* (zkráceně LDR druhého řádu). *Řešením rovnice* (nebo též *integrálem rovnice*) na intervalu I rozumíme funkci, která má spojité derivace do řádu 2 na intervalu I a po dosazení identicky splňuje rovnost (L2) na I. Úloha nalézt řešení rovnice, které splňuje v bodě $x_0 \in I$ *počáteční podmínky*

$$\begin{cases} y(x_0) = y_0, \\ y'(x_0) = y_0', \end{cases} \tag{P2}$$

kde y_0 a y_0' jsou reálná čísla, se nazývá *počáteční úloha* (*Cauchyova úloha*). Řešení počáteční úlohy se nazývá *partikulární řešení rovnice* (L2).

Poznámka 1 (existence a jednoznačnost). Každá počáteční úloha pro rovnici (L2) má řešení, které je určeno jednoznačně a toto řešení je definované na celém intervalu I.

Definice (obecné řešení). Všechna řešení LDR druhého řádu (L2) lze vyjádřit ve tvaru obsahujícím dvě nezávislé konstanty $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$. Takovýto předpis se nazývá *obecné řešení rovnice* (L2).

Poznámka 2 (operátorová symbolika). Podobně jako lineární diferenciální rovnice prvního řádu, i zde často pravou stranu rovnice často zkracujeme do tvaru $L[y](x)$. Definujeme-li tedy

$$L[y](x) = y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x), \tag{1}$$

je tímto předpisem definován operátor, který každé dvakrát diferencovatelné funkci přiřazuje levou stranu rovnice (L2). Rovnici (L2) je potom možno zapsat ve tvaru $L[y] = f(x)$.

Definice (speciální typy LDR druhého řádu). Platí-li v rovnici (L2) $f(x) = 0$ pro všechna $x \in I$, nazývá se rovnice (L2) *homogenní*, v opačném případě *nehomogenní*. Jsou-li koeficienty $p(x)$ a $q(x)$ na intervalu I konstantní funkce, nazývá se (L2) *rovnice s konstantními koeficienty*.

Poznámka 3 (triviální řešení)**.** Funkce $y(x) \equiv 0$ je řešením homogenní LDR 2. řádu vždy, bez ohledu na tvar koeficientů p, q. (Ověřte sami dosazením.) Toto řešení nazýváme *triviální řešení rovnice* (L2).

Definice (asociovaná homogenní rovnice)**.** Nahradíme-li v nehomogenní LDR (L2) pravou stranu (tj. funkci f) nulovou funkcí obdržíme rovnici

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0. \tag{2}$$

Tato rovnice se nazývá *homogenní rovnice asociovaná s rovnicí* (L2).

Věta 1 (linearita a princip superpozice). Operátor (1) zachovává lineární kombinaci funkcí, tj. pro libovolné dvě funkce y_1 a y_2 a libovolné reálné konstanty C_1 a C_2 platí

$$L[C_1y_1 + C_2y_2] = C_1L[y_1] + C_2L[y_2]. \tag{3}$$

Jako speciální případ vztahu (3) dostáváme implikace

$$\begin{aligned}
L[y_2] = 0 \text{ a } L[y_1] = f(x) \quad &\Rightarrow \quad L[y_1 + y_2] = 0 + f(x) = f(x),\\
L[y_1] = L[y_2] = f(x) \quad &\Rightarrow \quad L[y_1 - y_2] = f(x) - f(x) = 0,\\
L[y_1] = L[y_2] = 0 \quad &\Rightarrow \quad L[C_1y_1 + C_2y_2] = C_1 \cdot 0 + C_2 \cdot 0 = 0,
\end{aligned}$$

- Součet řešení zadané nehomogenní a asociované homogenní LDR je řešením dané nehomogenní rovnice.
- Rozdíl dvou řešení nehomogenní LDR je řešením asociované homogenní rovnice.
- Každá lineární kombinace dvou řešení homogenní LDR je opět řešením této rovnice.

2 Homogenní LDR, lineární nezávislost a wronskián

V této podkapitole budeme studovat homogenní LDR druhého řádu, tj. rovnici (2)

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0,$$

kterou můžeme zkráceně zapsat jako $L[y] = 0$, kde operátor L je lineární diferenciální operátor druhého řádu definovaný vztahem (1).

Motivace. Budeme předpokládat že funkce $y_1(x)$ a $y_2(x)$ jsou obě řešeními a budeme hledat podmínky, za kterých je funkce

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$$

obecným řešením. Derivováním tohoto vztahu získáváme

$$y'(x) = C_1 y_1'(x) + C_2 y_2'(x)$$

a dosazení počátečních podmínek $y(\alpha) = \beta$, $y'(\alpha) = \gamma$ vede k následující soustavě lineárních rovnic s neznámými C_1, C_2

$$\begin{aligned} \beta &= C_1 y_1(\alpha) + C_2 y_2(\alpha), \\ \gamma &= C_1 y_1'(\alpha) + C_2 y_2'(\alpha). \end{aligned} \tag{4}$$

Jak je známo z lineární algebry, tato soustava má právě jedno řešení pro libovolnou volbu čísel β, γ právě tehdy, když matice soustavy, tj. matice $\begin{pmatrix} y_1(\alpha) & y_2(\alpha) \\ y_1'(\alpha) & y_2'(\alpha) \end{pmatrix}$, je regulární. Tato matice je regulární právě tehdy, když její determinant je nenulový a to nastane právě tehdy když jeden sloupec není násobkem druhého. Tímto motivujeme následující definice.

Definice (lineární (ne-)závislost funkcí). Buďte y_1 a y_2 funkce definované na intervalu I. Řekneme, že funkce y_1 a y_2 jsou na intervalu I *lineárně závislé*, jestliže jedna z nich je na intervalu I násobkem druhé, tj. jestliže existuje reálné číslo $k \in \mathbb{R}$ s vlastností

$$y_1(x) = ky_2(x) \qquad \text{pro všechna } x \in I,$$

nebo

$$y_2(x) = ky_1(x) \qquad \text{pro všechna } x \in I.$$

V opačném případě říkáme, že funkce y_1, y_2 jsou na intervalu I *lineárně nezávislé*.

Definice (wronskián). Buďte $y_1(x)$ a $y_2(x)$ dvě libovolná řešení homogenní rovnice (2). *Wronskiánem* funkcí $y_1(x)$, $y_2(x)$ rozumíme determinant

$$W[y_1, y_2](x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x). \tag{5}$$

Věta 2 (lineární (ne)závislost). Buďte $y_1(x)$ a $y_2(x)$ dvě řešení rovnice (2) na intervalu I. Tato řešení jsou lineárně nezávislá právě tehdy když je jejich wronskián různý od nuly na intervalu I.

Věta 3 (obecné řešení homogenní LDR). Jsou-li y_1 a y_2 dvě netriviální lineárně nezávislá řešení rovnice (2) na intervalu I, je funkce y definovaná vztahem

$$y(x, C_1, C_2) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x), \qquad C_1 \in \mathbb{R},\ C_2 \in \mathbb{R}, \tag{6}$$

obecným řešením rovnice (2) na intervalu I.

Definice (fundamentální systém řešení). Dvojici funkcí y_1 a y_2 z předchozí věty nazýváme *fundamentální systém řešení rovnice* (2).

Funkce $y_1(x)$ a $y_2(x)$ jsou *jakékoliv* lineárně nezávislé funkce splňující danou diferenciální rovnici. Pro rovnici

$$y'' - y = 0$$

lze volit například $y_1 = e^x$, $y_2 = e^{-x}$, ale i naopak $y_1 = e^{-x}$ a $y_2 = e^x$ nebo třeba i $y_1 = e^x + e^{-x}$ a $y_2 = 3e^{-x}$. Fundamentální systém tedy není určen jednoznačně.

3 Homogenní LDR s konstantními koeficienty

Abychom vyřešili homogenní LDR druhého řádu, stačí tedy nalézt dvě lienárně nezávislá řešení. Nalezení analytického tvaru těchto funkcí pomocí koeficientů rovnice, jejich integrálů a běžných matematických operací je však možné jenom v některých speciálních případech. Jednomu z těchto případů se budeme věnovat v následující kapitole. Ukážeme si, že pokud jsou koeficienty rovnice reálná čísla, je možné rovnici vyřešit snadno, využití aparátu který jste znali již před nástupem na vysokou školu.

Budeme studovat rovnici tvaru

$$y'' + py' + qy = 0, \tag{LH2}$$

kde $p, q \in \mathbb{R}$. Všimněme si nejprve následujícího faktu: Dosadíme-li do levé strany rovnice $y = e^{zx}$, kde z je reálné číslo, po výpočtu derivací a po vytknutí faktoru e^{zx} získáváme

$$y'' + py' + qy = e^{zx}(z^2 + pz + q).$$

Protože exponenciální faktor na pravé straně je vždy nenulový, bude výraz na pravé straně roven nule pokud bude splněna podmínka

$$z^2 + pz + q = 0. \tag{7}$$

Pouze v tomto případě bude uvažovaná funkce řešením rovnice (LH2).

Definice (charakteristická rovnice)**.** Kvadratická rovnice (7) s neznámou z se nazývá *charakteristická rovnice pro rovnici* (LH2).

Věta 4. Uvažujme DR (LH2) a její charakteristickou rovnici (7).

- Jsou-li $z_1, z_2 \in \mathbb{R}$ dva různé reálné kořeny charakteristické rovnice (7), definujme $\boxed{y_1 = e^{z_1 x}}$ a $\boxed{y_2 = e^{z_2 x}}$.
- Je-li $z_1 \in \mathbb{R}$ dvojnásobným kořenem charakteristické rovnice (7), definujme $\boxed{y_1 = e^{z_1 x}}$ a $\boxed{y_2 = x e^{z_1 x}}$.
- Jsou-li $z_{1,2} = \alpha \pm i\beta \notin \mathbb{R}$ dva komplexně sdružené kořeny charakteristické rovnice (7), definujme $\boxed{y_1(x) = e^{\alpha x}\cos(\beta x)}$ a $\boxed{y_2(x) = e^{\alpha x}\sin(\beta x)}$.

Potom obecné řešení rovnice (LH2) je

$$y(x, C_1, C_2) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x), \qquad C_1 \in \mathbb{R},\ C_2 \in \mathbb{R}.$$

Řešte poč. úlohu $\quad y'' + y = 0 \quad y(0) = 1,\ y'(0) = -1.$

Řešte poč. úlohu $y'' + y = 0 \quad y(0) = 1,\ y'(0) = -1.$

$z^2 + 1 = 0 \qquad \Rightarrow$

Sestavíme charakteristickou rovnici...

Řešte poč. úlohu $y'' + y = 0 \quad y(0) = 1, y'(0) = -1.$

$z^2 + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad z^2 = -1 \quad \Rightarrow$

...a vyřešíme ji.

Řešte poč. úlohu $y'' + y = 0 \quad y(0) = 1, y'(0) = -1.$

$z^2 + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad z^2 = -1 \quad \Rightarrow \quad z^2 = \pm\sqrt{-1} = \pm i$

Řešením jsou dvě komplexně sdružená čísla.

Řešte poč. úlohu $\quad y'' + y = 0 \quad y(0) = 1,\ y'(0) = -1.$

$z^2 + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad z^2 = -1 \quad \Rightarrow \quad z^2 = \pm\sqrt{-1} = \pm i$

$y_1(x) = \sin x$

$y_2(x) = \cos x$

Reálná část kořenů charakteristické rovnice je $\alpha = 0$, imaginární část je $\beta = 1$. Fundamentální systém řešení je

$$y_1(x) = e^{\alpha x}\cos(\beta x)$$

a

$$y_2(x) = e^{\alpha x}\sin(\beta x).$$

Řešte poč. úlohu $y'' + y = 0 \quad y(0) = 1,\ y'(0) = -1.$

$z^2 + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad z^2 = -1 \quad \Rightarrow \quad z^2 = \pm\sqrt{-1} = \pm i$

Fundamentální systém: $\begin{cases} y_1(x) = \sin x \\ y_2(x) = \cos x \end{cases}$

Získali jsme fundamentální systém...

Řešte poč. úlohu $y'' + y = 0 \quad y(0) = 1, y'(0) = -1.$

$z^2 + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad z^2 = -1 \quad \Rightarrow \quad z^2 = \pm\sqrt{-1} = \pm i$

Fundamentální systém: $\begin{cases} y_1(x) = \sin x \\ y_2(x) = \cos x \end{cases}$

Obecné řešení: $y(x) = C_1 \sin x + C_2 \cos x, \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

...a můžeme napsat obecné řešení. Obecným řešením je obecná lineární kombinace funkcí tvořících fundamentální systém.

Řešte poč. úlohu $y'' + y = 0 \quad y(0) = 1,\ y'(0) = -1.$

$z^2 + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad z^2 = -1 \quad \Rightarrow \quad z^2 = \pm\sqrt{-1} = \pm i$

Fundamentální systém: $\begin{cases} y_1(x) = \sin x \\ y_2(x) = \cos x \end{cases}$

Obecné řešení: $y(x) = C_1 \sin x + C_2 \cos x, \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

$y'(x) = C_1 \cos x - C_2 \sin x$

nyní budeme pracovat s počáteční podmínkou. Nalezneme y'...

Řešte poč. úlohu $y'' + y = 0 \quad y(0) = 1,\ y'(0) = -1.$

$z^2 + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad z^2 = -1 \quad \Rightarrow \quad z^2 = \pm\sqrt{-1} = \pm i$

Fundamentální systém: $\begin{cases} y_1(x) = \sin x \\ y_2(x) = \cos x \end{cases}$

Obecné řešení: $y(x) = C_1 \sin x + C_2 \cos x, \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

$y'(x) = C_1 \cos x - C_2 \sin x$

$1 = C_1 \sin 0 + C_2 \cos 0$

. . . a dosadíme za y. . .

Řešte poč. úlohu $y'' + y = 0 \quad y(0) = 1,\ y'(0) = -1.$

$z^2 + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad z^2 = -1 \quad \Rightarrow \quad z^2 = \pm\sqrt{-1} = \pm i$

Fundamentální systém: $\begin{cases} y_1(x) = \sin x \\ y_2(x) = \cos x \end{cases}$

Obecné řešení: $y(x) = C_1 \sin x + C_2 \cos x, \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

$y'(x) = C_1 \cos x - C_2 \sin x$

$$1 = C_1 \sin 0 + C_2 \cos 0$$

$$-1 = C_1 \cos 0 - C_2 \sin 0$$

. . . a za y'.

Řešte poč. úlohu $y'' + y = 0 \quad y(0) = 1,\ y'(0) = -1.$

$z^2 + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad z^2 = -1 \quad \Rightarrow \quad z^2 = \pm\sqrt{-1} = \pm i$

Fundamentální systém: $\begin{cases} y_1(x) = \sin x \\ y_2(x) = \cos x \end{cases}$

Obecné řešení: $y(x) = C_1 \sin x + C_2 \cos x, \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

$y'(x) = C_1 \cos x - C_2 \sin x$

$$\left.\begin{aligned} 1 &= C_1 \sin 0 + C_2 \cos 0 \\ -1 &= C_1 \cos 0 - C_2 \sin 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow C_1 = -1, \quad C_2 = 1$$

Obdrželi jsme soustavu lineárních rovnic, kterou vyřešíme.

Řešte poč. úlohu $y'' + y = 0 \quad y(0) = 1,\ y'(0) = -1.$

$z^2 + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad z^2 = -1 \quad \Rightarrow \quad z^2 = \pm\sqrt{-1} = \pm i$

Fundamentální systém: $\begin{cases} y_1(x) = \sin x \\ y_2(x) = \cos x \end{cases}$

Obecné řešení: $y(x) = C_1 \sin x + C_2 \cos x, \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

$y'(x) = C_1 \cos x - C_2 \sin x$

$$\left.\begin{aligned} 1 &= C_1 \sin 0 + C_2 \cos 0 \\ -1 &= C_1 \cos 0 - C_2 \sin 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow C_1 = -1, \quad C_2 = 1$$

Řešení PÚ: $y(x) = -\sin x + \cos x$

A konečně použijeme vypočtené hodnoty C_1 a C_2 v obecném řešení. Tím získáme obecné řešení počáteční úlohy.

Řešte poč. úlohu $y'' + y = 0 \quad y(0) = 1,\ y'(0) = -1.$

$z^2 + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad z^2 = -1 \quad \Rightarrow \quad z^2 = \pm\sqrt{-1} = \pm i$

Fundamentální systém: $\begin{cases} y_1(x) = \sin x \\ y_2(x) = \cos x \end{cases}$

Obecné řešení: $y(x) = C_1 \sin x + C_2 \cos x, \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

$y'(x) = C_1 \cos x - C_2 \sin x$

$$\left.\begin{aligned} 1 &= C_1 \sin 0 + C_2 \cos 0 \\ -1 &= C_1 \cos 0 - C_2 \sin 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow C_1 = -1, \quad C_2 = 1$$

Řešení PÚ: $y(x) = -\sin x + \cos x$

Hotovo!

Řešte DR $4y'' + 4y' + y = 0.$

Řešte DR $4y'' + 4y' + y = 0.$

$4z^2 + 4z + 1 = 0$

Sestavíme charakteristickou rovnici. . .

Řešte DR $\quad 4y'' + 4y' + y = 0.$

$4z^2 + 4z + 1 = 0$

$$z_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4.4.1}}{2.4}$$

…a vyřešíme ji. Pro řešení kvadratické rovnice

$$az^2 + bz + c = 0$$

používáme vzorec

$$z_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Řešte DR $4y'' + 4y' + y = 0.$

$$4z^2 + 4z + 1 = 0$$

$$z_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4.4.1}}{2.4} = \frac{-4 \pm 0}{8}$$

Upravíme.

Řešte DR $\quad 4y'' + 4y' + y = 0.$

$$4z^2 + 4z + 1 = 0$$

$$z_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4.4.1}}{2.4} = \frac{-4 \pm 0}{8} = -\frac{1}{2} \dots \text{dvojnásobný kořen}$$

Charakteristická rovnice má dvojnásobný kořen $z_{1,2} = -\dfrac{1}{2}$.

Řešte DR $4y'' + 4y' + y = 0.$

$4z^2 + 4z + 1 = 0$

$$z_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4.4.1}}{2.4} = \frac{-4 \pm 0}{8} = -\frac{1}{2} \ldots \text{dvojnásobný kořen}$$

Fundamentální systém: $\begin{cases} y_1 = e^{-\frac{x}{2}} \\ y_2 = xe^{-\frac{x}{2}} \end{cases}$

V případě dvojnásobného kořene z charakteristické rovnice je fundamentální systém tvořen funkcemi

$$y_1(x) = e^{zx}, \qquad y_2(x) = xe^{zx}.$$

Řešte DR $4y'' + 4y' + y = 0.$

$4z^2 + 4z + 1 = 0$

$$z_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4.4.1}}{2.4} = \frac{-4 \pm 0}{8} = -\frac{1}{2} \text{ . . . dvojnásobný kořen}$$

Fundamentální systém: $\begin{cases} y_1 = e^{-\frac{x}{2}} \\ y_2 = xe^{-\frac{x}{2}} \end{cases}$

Obecné řešení: $y(x) = C_1 e^{-\frac{x}{2}} + C_2 x e^{-\frac{x}{2}}$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

Obecné řešení je lineární kombinací funcí z fundamentálního systému řešení.

Řešte DR $4y'' + 4y' + y = 0.$

$4z^2 + 4z + 1 = 0$

$$z_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4.4.1}}{2.4} = \frac{-4 \pm 0}{8} = -\frac{1}{2}$$ ... dvojnásobný kořen

Fundamentální systém: $\begin{cases} y_1 = e^{-\frac{x}{2}} \\ y_2 = xe^{-\frac{x}{2}} \end{cases}$

Obecné řešení: $y(x) = C_1 e^{-\frac{x}{2}} + C_2 x e^{-\frac{x}{2}} = e^{-\frac{x}{2}}(C_1 + C_2 x)$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

Upravíme obecné řešení. Hotovo!

Řešte DR $y'' + 4y' + 29y = 0,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 10.$

Řešte DR $y'' + 4y' + 29y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 10.$

$$z^2 + 4z + 29 = 0$$

Rovnice je lineární homogenní druhého řádu. Sestavíme nejprve charakteristickou rovnici.

Řešte DR $y'' + 4y' + 29y = 0,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 10.$

$z^2 + 4z + 29 = 0$

$$z_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 4.1.29}}{2.1}$$

Řešením rovnice

$$az^2 + bz + c = 0$$

jsou čísla která obdržíme ze vzorce

$$z_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Řešte DR $y'' + 4y' + 29y = 0,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 10.$

$$z^2 + 4z + 29 = 0$$

$$z_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 4.1.29}}{2.1} = \frac{-4 \pm \sqrt{-100}}{2}$$

Upravíme . . .

Řešte DR $y'' + 4y' + 29y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 10$.

$$z^2 + 4z + 29 = 0$$

$$z_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 4.1.29}}{2.1} = \frac{-4 \pm \sqrt{-100}}{2} = -2 \pm 5i$$

…a najdeme řešení charakteristické rovnice. použijeme skutečnost, že

$$\sqrt{-100} = \sqrt{100}\sqrt{-1} = 10\sqrt{-1} = 10i.$$

Řešte DR $y'' + 4y' + 29y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 10$.

$$z^2 + 4z + 29 = 0$$

$$z_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 4.1.29}}{2.1} = \frac{-4 \pm \sqrt{-100}}{2} = -2 \pm 5i$$

$y_1(x) = e^{-2x}\cos(5x)$ $\qquad$ $y_2(x) = e^{-2x}\sin(5x)$

Z kořenů charakteristické rovnice sestavíme fundamentální systém řešení. Reálná část kořenů je $\alpha = -2$, imaginární je $\beta = 5$. Fundamentální systém je tvořen funkcemi

$$y_1(x) = e^{\alpha x}\cos(\beta x) \quad \text{a} \quad y_2(x) = e^{\alpha x}\sin(\beta x).$$

Řešte DR $y'' + 4y' + 29y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 10$.

$$z^2 + 4z + 29 = 0$$

$$z_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 4.1.29}}{2.1} = \frac{-4 \pm \sqrt{-100}}{2} = -2 \pm 5i$$

$y_1(x) = e^{-2x}\cos(5x)$ $y_2(x) = e^{-2x}\sin(5x)$

$$y(x) = C_1 e^{-2x}\cos(5x) + C_2 e^{-2x}\sin(5x)$$

Obecné řešení je lineární kombinací funkcí z fundamentálního systému řešení.

Řešte DR $y'' + 4y' + 29y = 0,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 10.$

$$z^2 + 4z + 29 = 0$$

$$z_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 4.1.29}}{2.1} = \frac{-4 \pm \sqrt{-100}}{2} = -2 \pm 5i$$

$$y_1(x) = e^{-2x}\cos(5x) \qquad y_2(x) = e^{-2x}\sin(5x)$$

$$y(x) = C_1 e^{-2x}\cos(5x) + C_2 e^{-2x}\sin(5x)$$

$$y'(x) = C_1\left[-2e^{-2x}\cos(5x) - 5e^{-2x}\sin(5x)\right] + C_2\left[-2e^{-2x}\sin(5x) + 5e^{-2x}\cos(5x)\right]$$

Vypočteme derivaci y'. Musíme použít pravidlo pro derivaci součinu

$$(uv)' = u'v + uv'.$$

Při derivování e^{-2x} a $\sin(5x)$ použijeme pravidlo pro derivaci složené funkce.

Řešte DR $y'' + 4y' + 29y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 10$.

$$z^2 + 4z + 29 = 0$$

$$z_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 4.1.29}}{2.1} = \frac{-4 \pm \sqrt{-100}}{2} = -2 \pm 5i$$

$y_1(x) = e^{-2x}\cos(5x)$ $\qquad$ $y_2(x) = e^{-2x}\sin(5x)$

$$y(x) = C_1 e^{-2x}\cos(5x) + C_2 e^{-2x}\sin(5x)$$

$$\begin{aligned} y'(x) =& C_1\left[-2e^{-2x}\cos(5x) - 5e^{-2x}\sin(5x)\right] \\ &+ C_2\left[-2e^{-2x}\sin(5x) + 5e^{-2x}\cos(5x)\right] \end{aligned}$$

$$0 = C_1 + 0C_2$$

Dosadíme za y...

Řešte DR $y'' + 4y' + 29y = 0,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 10.$

$$z^2 + 4z + 29 = 0$$

$$z_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 4.1.29}}{2.1} = \frac{-4 \pm \sqrt{-100}}{2} = -2 \pm 5i$$

$$y_1(x) = e^{-2x}\cos(5x) \qquad y_2(x) = e^{-2x}\sin(5x)$$

$$\begin{aligned} y(x) =& C_1 e^{-2x}\cos(5x) + C_2 e^{-2x}\sin(5x) \\ y'(x) =& C_1\left[-2e^{-2x}\cos(5x) - 5e^{-2x}\sin(5x)\right] \\ &+ C_2\left[-2e^{-2x}\sin(5x) + 5e^{-2x}\cos(5x)\right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 &= C_1 + 0C_2 \\ 10 &= -2C_1 + 5C_2 \end{aligned}$$

…a za y'.

Řešte DR $y'' + 4y' + 29y = 0,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 10.$

$$z^2 + 4z + 29 = 0$$

$$z_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 4.1.29}}{2.1} = \frac{-4 \pm \sqrt{-100}}{2} = -2 \pm 5i$$

$y_1(x) = e^{-2x}\cos(5x)$ $\qquad$ $y_2(x) = e^{-2x}\sin(5x)$

$$\begin{aligned} y(x) &= C_1 e^{-2x}\cos(5x) + C_2 e^{-2x}\sin(5x) \\ y'(x) &= C_1\left[-2e^{-2x}\cos(5x) - 5e^{-2x}\sin(5x)\right] \\ &\quad + C_2\left[-2e^{-2x}\sin(5x) + 5e^{-2x}\cos(5x)\right] \end{aligned}$$

$$\boxed{\begin{aligned} 0 &= C_1 + 0C_2 \\ 10 &= -2C_1 + 5C_2 \end{aligned}} \Rightarrow C_1 = 0,\ C_2 = 2$$

Vyřešíme soustavu rovnic pro C_1 a C_2.

Řešte DR $y'' + 4y' + 29y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 10$.

$$z^2 + 4z + 29 = 0$$

$$z_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 4.1.29}}{2.1} = \frac{-4 \pm \sqrt{-100}}{2} = -2 \pm 5i$$

$y_1(x) = e^{-2x}\cos(5x)$ $y_2(x) = e^{-2x}\sin(5x)$

$$y(x) = C_1 e^{-2x}\cos(5x) + C_2 e^{-2x}\sin(5x)$$

$$y'(x) = C_1\left[-2e^{-2x}\cos(5x) - 5e^{-2x}\sin(5x)\right] + C_2\left[-2e^{-2x}\sin(5x) + 5e^{-2x}\cos(5x)\right]$$

$$\boxed{\begin{aligned} 0 &= C_1 + 0C_2 \\ 10 &= -2C_1 + 5C_2 \end{aligned}} \Rightarrow C_1 = 0,\ C_2 = 2$$

$$y_p(x) = 2e^{-2x}\sin(5x)$$

Dosadíme vypočtené hodnoty koeficientů C_1 a C_2. hotovo!

4 Nehomogenní LDR

$$y'' + py' + qy = f(x) \tag{L2}$$

Věta 5 (důsledek principu superpozice)**.** Součet libovolného partikulárního řešení nehomogenní lineární diferenciální rovnice a obecného řešení asociované homogenní rovnice je obecným řešením původní nehomogenní rovnice

Jak najít partikulární řešení?

- Metoda *variace konstant* – podobná jako u LDR prvního řádu. Konstanty v obecném řešení nahradíme funkcemi, které jsme schopni najít (po vyřešení soustavy rovnic a dvojí integraci).

- Metoda *kvalifikovaného odhadu* – pokud je pravá strana do jisté míry speciální, je možno partikulární řešení uhodnout. Například jedním z řešení rovnice

  $$y'' + y = 6$$

  je zcela jistě funkce $y(x) = 6$. (Vidíme přímo po dosazení.) Obecné řešení je tedy

  $$y(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x + 6$$

  Je-li pravá strana rovnice polynom, exponenciální funkce nebo sinus či kosinus (případně součin či součet uvedených funkcí) je možno odhadnout "hrubý tvar" partikulárního řešení (až na nějaké konstanty) a tento potom pouze jemně "doladit" tak, abychom obdrželi skutečně řešení naší rovnice.

5 Odhad partikulárního řešení

Věta 6 (odhad partikulárního řešení). Nechť pravá strana rovnice (L2) má tvar $f(x) = e^{\alpha x}\Big(P_n(x)\cos(\beta x) + Q_m(x)\sin(\beta x)\Big)$, kde $P_n(x)$ je polynom stupně n a $Q_m(x)$ je polynom stupně m.

- Označme $k = \max\{n, m\}$ větší ze stupňů obou polynomů. Pokud některý z polynomů na pravé straně nefiguruje, dosazujeme za jeho stupeň nulu.
- Uvažujme charakteristickou rovnici pro asociovanou homogenní rovnici, tj. rovnici (7). Pokud (obecně komplexní) číslo $\alpha + i\beta$ není kořenem této rovnice, položme $r = 0$. Pokud je číslo $\alpha + i\beta$ jednoduchým kořenem této rovnic, položme $r = 1$ a pokud dvojnásobným, položme $r = 2$.

Partikulární řešení je možno nalézt ve tvaru

$$y_p(x) = e^{\alpha x} x^r \Big(\widehat{P}_k(x)\cos(\beta x) + \widehat{Q}_k(x)\sin(\beta x)\Big), \tag{8}$$

kde $\widehat{P}_k(x)$ a $\widehat{Q}_k(x)$ jsou polynomy stupně nejvýše k. Tyto polynomy je možno najít metodou neurčitých koeficientů bez použití integrování.

Řešte DR $y'' - 4y = x^2 - 1$.

Návod: partikulární řešení hledejte jako kvadratickou funkci.

Máme za úkol řešit lineární nehomogenní rovnici druhého řádu.

Řešte DR $y'' - 4y = \cancel{x^2 - 1}$.
Návod: partikulární řešení hledejte jako kvadratickou funkci.

$$y'' - 4y = 0$$

Budeme uvažovat nejprve asociovanou homogenní rovnici.

Řešte DR $y'' - 4y = \cancel{x^2 - 1}$.

Návod: partikulární řešení hledejte jako kvadratickou funkci.

$y'' - 4y = 0$

$z^2 - 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad z_{1,2} = \pm 2$

Sestavíme charakteristickou rovnici a vyřešíme ji.

Řešte DR $y'' - 4y = \cancel{x^2 - 1}$.
Návod: partikulární řešení hledejte jako kvadratickou funkci.

$y'' - 4y = 0 \quad \Rightarrow \quad y_{OH} = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x}$

$z^2 - 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad z_{1,2} = \pm 2$

Z kořenů charakteristické rovnice určíme fundamentální systém řešení a obecné řešení *homogenní* rovnice.

Řešte DR $y'' - 4y = x^2 - 1.$

Návod: partikulární řešení hledejte jako kvadratickou funkci.

$y'' - 4y = 0 \quad \Rightarrow \quad y_{OH} = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x}$

$z^2 - 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad z_{1,2} = \pm 2$

$y_p = ax^2 + bx + c$

Budeme postupovat podle návodu a hledat partikulární řešení, které je kvadratickou funkcí. Nejobecnější možná kvadratická funkce je $y = ax^2 + bx + c$.

Řešte DR $y'' - 4y = x^2 - 1$.
Návod: partikulární řešení hledejte jako kvadratickou funkci.

$y'' - 4y = 0 \quad \Rightarrow \quad y_{OH} = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x}$
$z^2 - 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad z_{1,2} = \pm 2$
$y_p = ax^2 + bx + c \quad \Rightarrow \quad y_p' = 2ax + b \quad \Rightarrow \quad y_p'' = 2a$

Hledáme hodnoty parametrů a, b a c tak, aby tato funkce byl řešením zadané rovnice. Abychom mohli do rovnice dosadit, je nutno vypočítat druhou derivaci.

Řešte DR $y'' - 4y = x^2 - 1.$
Návod: partikulární řešení hledejte jako kvadratickou funkci.

$y'' - 4y = 0 \quad \Rightarrow \quad y_{OH} = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x}$

$z^2 - 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad z_{1,2} = \pm 2$

$y_p = ax^2 + bx + c \quad \Rightarrow \quad y_p' = 2ax + b \quad \Rightarrow \quad y_p'' = 2a$

$y'' - 4y = x^2 - 1$

Vrátíme se k zadané rovnici.

Řešte DR $y'' - 4y = x^2 - 1.$
Návod: partikulární řešení hledejte jako kvadratickou funkci.

$$y'' - 4y = 0 \quad \Rightarrow \quad y_{OH} = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x}$$

$$z^2 - 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad z_{1,2} = \pm 2$$

$$y_p = ax^2 + bx + c \quad \Rightarrow \quad y_p' = 2ax + b \quad \Rightarrow \quad y_p'' = 2a$$

$$y'' - 4y = x^2 - 1$$

$$2a - 4 \cdot (ax^2 + bx + c) = x^2 - 1$$

Dosadíme.

Řešte DR $y'' - 4y = x^2 - 1.$
Návod: partikulární řešení hledejte jako kvadratickou funkci.

$y'' - 4y = 0 \quad \Rightarrow \quad y_{OH} = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x}$

$z^2 - 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad z_{1,2} = \pm 2$

$y_p = ax^2 + bx + c \quad \Rightarrow \quad y_p' = 2ax + b \quad \Rightarrow \quad y_p'' = 2a$

$$y'' - 4y = x^2 - 1$$

$$2a - 4 \cdot (ax^2 + bx + c) = x^2 - 1$$

$$-4a \cdot x^2 - 4b \cdot x + 2a - 4c = 1 \cdot x^2 + 0 \cdot x - 1$$

Roznásobíme závorku a přeskupíme členy polynomu tak, abychom viděli koeficienty u jednotlivých mocnin.

Řešte DR $y'' - 4y = x^2 - 1$.
Návod: partikulární řešení hledejte jako kvadratickou funkci.

$$y'' - 4y = 0 \quad \Rightarrow \quad y_{OH} = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x}$$
$$z^2 - 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad z_{1,2} = \pm 2$$
$$y_p = ax^2 + bx + c \quad \Rightarrow \quad y_p' = 2ax + b \quad \Rightarrow \quad y_p'' = 2a$$

$$y'' - 4y = x^2 - 1$$
$$2a - 4 \cdot (ax^2 + bx + c) = x^2 - 1$$
$$-4a \cdot x^2 - 4b \cdot x + 2a - 4c = 1 \cdot x^2 + 0 \cdot x - 1$$

$$\boxed{\begin{aligned} -4a &= 1 \\ -4b &= 0 \\ 2a - 4c &= -1 \end{aligned}}$$

Polynom na levé straně se bude rovnat polynomu na straně pravé právě tehdy, když koeficienty u odpovídajících si mocnin budou totožné.

Řešte DR $y'' - 4y = x^2 - 1$.
Návod: partikulární řešení hledejte jako kvadratickou funkci.

$$y'' - 4y = 0 \quad \Rightarrow \quad y_{OH} = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x}$$
$$z^2 - 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad z_{1,2} = \pm 2$$
$$y_p = ax^2 + bx + c \quad \Rightarrow \quad y_p' = 2ax + b \quad \Rightarrow \quad y_p'' = 2a$$

$$y'' - 4y = x^2 - 1$$
$$2a - 4\cdot(ax^2 + bx + c) = x^2 - 1$$
$$-4a\cdot x^2 - 4b\cdot x + 2a - 4c = 1\cdot x^2 + 0\cdot x - 1$$

$$\begin{aligned} -4a &= 1 \\ -4b &= 0 \\ 2a - 4c &= -1 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} a &= -\frac{1}{4} \\ b &= 0 \\ c &= \frac{1}{8} \end{aligned}$$

Vyřešíme soustavu rovnic.

Řešte DR $y'' - 4y = x^2 - 1$.
Návod: partikulární řešení hledejte jako kvadratickou funkci.

$$y'' - 4y = 0 \quad \Rightarrow \quad y_{OH} = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x}$$

$$z^2 - 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad z_{1,2} = \pm 2$$

$$y_p = ax^2 + bx + c \quad \Rightarrow \quad y_p' = 2ax + b \quad \Rightarrow \quad y_p'' = 2a$$

$$y'' - 4y = x^2 - 1$$

$$2a - 4 \cdot (ax^2 + bx + c) = x^2 - 1$$

$$-4a \cdot x^2 - 4b \cdot x + 2a - 4c = 1 \cdot x^2 + 0 \cdot x - 1$$

$$\boxed{\begin{aligned} -4a &= 1 \\ -4b &= 0 \\ 2a - 4c &= -1 \end{aligned}} \Rightarrow \boxed{\begin{aligned} a &= -\frac{1}{4} \\ b &= 0 \\ c &= \frac{1}{8} \end{aligned}} \Rightarrow \boxed{y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x} - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{8}}$$

Sestrojíme obecné řešení. Hotovo!

Řešte $y'' - 4y' + 4y = e^{-x}$.
Návod: partikulární řešení hledejte ve tvaru $y_p(x) = Ae^{-x}$, $A \in \mathbb{R}$.

Řešte $y'' - 4y' + 4y = \cancel{e^{-x}}$.
Návod: partikulární řešení hledejte ve tvaru $y_p(x) = Ae^{-x}$, $A \in \mathbb{R}$.

$$y'' - 4y' + 4y = 0$$

Rovnice není homogenní. Budeme řešit nejprve asociovanou homogenní rovnici.

Řešte $y'' - 4y' + 4y = \cancel{e^{-x}}$.
Návod: partikulární řešení hledejte ve tvaru $y_p(x) = Ae^{-x}$, $A \in \mathbb{R}$.

$$y'' - 4y' + 4y = 0 \quad \Rightarrow \quad z^2 - 4z + 4 = 0$$

Sestrojíme charakteristickou rovnici . . .

Řešte $y'' - 4y' + 4y = \cancel{e^{-x}}$.
Návod: partikulární řešení hledejte ve tvaru $y_p(x) = Ae^{-x}$, $A \in \mathbb{R}$.

$$y'' - 4y' + 4y = 0 \quad \Rightarrow \quad z^2 - 4z + 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad z_{1,2} = \frac{4 - \sqrt{16 - 4.1.4}}{2.1}$$

…a najdeme její kořeny.

Řešte $y'' - 4y' + 4y = \cancel{e^{-x}}$.
Návod: partikulární řešení hledejte ve tvaru $y_p(x) = Ae^{-x}$, $A \in \mathbb{R}$.

$$y'' - 4y' + 4y = 0 \quad \Rightarrow \quad z^2 - 4z + 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad z_{1,2} = \frac{4 - \sqrt{16 - 4.1.4}}{2.1} = 2$$

Charakteristická rovnice má dvojnásobný kořen $z_{1,2} = 2$.

Řešte $y'' - 4y' + 4y = \cancel{e^{-x}}$.
Návod: partikulární řešení hledejte ve tvaru $y_p(x) = Ae^{-x}$, $A \in \mathbb{R}$.

$$y'' - 4y' + 4y = 0 \quad \Rightarrow \quad z^2 - 4z + 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad z_{1,2} = \frac{4 - \sqrt{16 - 4.1.4}}{2.1} = 2$$

$y_1(x) = e^{2x}$, $y_2(x) = xe^{2x}$

Fundamentální systém tvoří funkce

$$y_1 = e^{zx}, \quad y_2 = xe^{zx}.$$

Řešte $y'' - 4y' + 4y = e^{-x}$.
Návod: partikulární řešení hledejte ve tvaru $y_p(x) = Ae^{-x}$, $A \in \mathbb{R}$.

$$y'' - 4y' + 4y = 0 \quad \Rightarrow \quad z^2 - 4z + 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad z_{1,2} = \frac{4 - \sqrt{16 - 4.1.4}}{2.1} = 2$$

$y_1(x) = e^{2x}$, $y_2(x) = xe^{2x}$ $\qquad$ $y_p(x) = Ae^{-x}$

Budeme hledat partikulární řešení ve tvaru $y_p(x) = Ae^{-x}$ kde A je konstanta.

Řešte $y'' - 4y' + 4y = e^{-x}$.
Návod: partikulární řešení hledejte ve tvaru $y_p(x) = Ae^{-x}$, $A \in \mathbb{R}$.

$$y'' - 4y' + 4y = 0 \quad \Rightarrow \quad z^2 - 4z + 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad z_{1,2} = \frac{4 - \sqrt{16 - 4.1.4}}{2.1} = 2$$

$y_1(x) = e^{2x}$, $y_2(x) = xe^{2x}$ $\qquad$ $y_p(x) = Ae^{-x}$

$y_p'(x) = -Ae^{-x}$ $\quad$ $y_p''(x) = Ae^{-x}$

Najdeme derivace partikulárního řešení.

Řešte $y'' - 4y' + 4y = e^{-x}$.
Návod: partikulární řešení hledejte ve tvaru $y_p(x) = Ae^{-x}$, $A \in \mathbb{R}$.

$$y'' - 4y' + 4y = 0 \quad \Rightarrow \quad z^2 - 4z + 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad z_{1,2} = \frac{4 - \sqrt{16 - 4.1.4}}{2.1} = 2$$

$y_1(x) = e^{2x}$, $y_2(x) = xe^{2x}$ $\qquad$ $y_p(x) = Ae^{-x}$

$y_p'(x) = -Ae^{-x}$ $\quad$ $y_p''(x) = Ae^{-x}$

$$y'' - 4y' + 4y = e^{-x}$$
$$Ae^{-x} - 4(-Ae^{-x}) + 4Ae^{-x} = e^{-x}$$

Dosadíme do zadané nehomogenní rovnice.

Řešte $y'' - 4y' + 4y = e^{-x}$.
Návod: partikulární řešení hledejte ve tvaru $y_p(x) = Ae^{-x}$, $A \in \mathbb{R}$.

$$y'' - 4y' + 4y = 0 \quad \Rightarrow \quad z^2 - 4z + 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad z_{1,2} = \frac{4 - \sqrt{16 - 4.1.4}}{2.1} = 2$$

$y_1(x) = e^{2x}$, $y_2(x) = xe^{2x}$ $\qquad$ $y_p(x) = Ae^{-x}$

$y_p'(x) = -Ae^{-x}$ $\quad$ $y_p''(x) = Ae^{-x}$

$$\begin{aligned} y'' - 4y' + 4y &= e^{-x} \\ Ae^{-x} - 4(-Ae^{-x}) + 4Ae^{-x} &= e^{-x} \\ 9Ae^{-x} &= e^{-x} \end{aligned}$$

Upravíme.

Řešte $y'' - 4y' + 4y = e^{-x}$.
Návod: partikulární řešení hledejte ve tvaru $y_p(x) = Ae^{-x}$, $A \in \mathbb{R}$.

$$y'' - 4y' + 4y = 0 \quad \Rightarrow \quad z^2 - 4z + 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad z_{1,2} = \frac{4 - \sqrt{16 - 4.1.4}}{2.1} = 2$$

$y_1(x) = e^{2x}$, $y_2(x) = xe^{2x}$

$y_p(x) = Ae^{-x}$

$y_p'(x) = -Ae^{-x} \quad y_p''(x) = Ae^{-x}$

$$\begin{aligned} y'' - 4y' + 4y &= e^{-x} \\ Ae^{-x} - 4(-Ae^{-x}) + 4Ae^{-x} &= e^{-x} \\ 9Ae^{-x} &= e^{-x} \\ 9A &= 1 \end{aligned}$$

Vydělíme obě strany rovnice exponenciálním faktorem e^{-x}.

Řešte $y'' - 4y' + 4y = e^{-x}$.
Návod: partikulární řešení hledejte ve tvaru $y_p(x) = Ae^{-x}$, $A \in \mathbb{R}$.

$$y'' - 4y' + 4y = 0 \quad \Rightarrow \quad z^2 - 4z + 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad z_{1,2} = \frac{4 - \sqrt{16 - 4.1.4}}{2.1} = 2$$

$$y_1(x) = e^{2x},\ y_2(x) = xe^{2x} \qquad y_p(x) = Ae^{-x}$$

$$y_p'(x) = -Ae^{-x} \quad y_p''(x) = Ae^{-x}$$

$$\begin{aligned} y'' - 4y' + 4y &= e^{-x} \\ Ae^{-x} - 4(-Ae^{-x}) + 4Ae^{-x} &= e^{-x} \\ 9Ae^{-x} &= e^{-x} \\ 9A &= 1 \\ A &= \frac{1}{9} \end{aligned}$$

Vypočteme konstantu A

Řešte $y'' - 4y' + 4y = e^{-x}$.
Návod: partikulární řešení hledejte ve tvaru $y_p(x) = Ae^{-x}$, $A \in \mathbb{R}$.

$$y'' - 4y' + 4y = 0 \quad \Rightarrow \quad z^2 - 4z + 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad z_{1,2} = \frac{4 - \sqrt{16 - 4.1.4}}{2.1} = 2$$

$y_1(x) = e^{2x}$, $y_2(x) = xe^{2x}$ $\qquad y_p(x) = Ae^{-x}$

$y_p'(x) = -Ae^{-x} \quad y_p''(x) = Ae^{-x}$

$$\begin{aligned} y'' - 4y' + 4y &= e^{-x} \\ Ae^{-x} - 4(-Ae^{-x}) + 4Ae^{-x} &= e^{-x} \\ 9Ae^{-x} &= e^{-x} \\ 9A &= 1 \\ A &= \frac{1}{9} \end{aligned}$$

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x} + \frac{1}{9} e^{-x}$$

$C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

Sestavíme obecné řešení nehomogenní rovnice.

Řešte rovnici $y'' - 5y' + 6y = xe^x$.

Řešte rovnici $y'' - 5y' + 6y = \cancel{xe^x}$.

$$y'' - 5y' + 6y = 0$$

Budeme nejprve studovat asociovanou homogenní rovnici.

Řešte rovnici $y'' - 5y' + 6y = \cancel{xe^x}$.

$y'' - 5y' + 6y = 0 \qquad \Rightarrow \qquad z^2 - 5z + 6 = 0$

Sestavíme charakteristickou rovnici.

Řešte rovnici $y'' - 5y' + 6y = \cancel{xe^x}$.

$$y'' - 5y' + 6y = 0 \quad \Rightarrow \quad z^2 - 5z + 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad z_1 = 2, z_2 = 3$$

Charakteristická rovnice má reálné různé kořeny.

Řešte rovnici $y'' - 5y' + 6y = \cancel{xe^x}$.

$y'' - 5y' + 6y = 0 \quad \Rightarrow \quad z^2 - 5z + 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad z_1 = 2,\ z_2 = 3$

$y_1(x) = e^{2x} \qquad y_2(x) = e^{3x}$

Podle kořenů charakteristické rovnice stavíme fundamentální systém řešení.

Řešte rovnici $y'' - 5y' + 6y = xe^x$.

$y'' - 5y' + 6y = 0 \quad \Rightarrow \quad z^2 - 5z + 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad z_1 = 2,\ z_2 = 3$

$y_1(x) = e^{2x} \qquad y_2(x) = e^{3x}$

$y_p(x) = (Ax + B)e^x$

Budeme hledat partikulární řešení ve tvaru součinu lineární a exponenciální funkce.

Řešte rovnici $y'' - 5y' + 6y = xe^x$.

$y'' - 5y' + 6y = 0 \quad \Rightarrow \quad z^2 - 5z + 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad z_1 = 2, z_2 = 3$

$y_1(x) = e^{2x} \qquad y_2(x) = e^{3x}$

$y_p(x) = (Ax + B)e^x$

$y_p'(x) = (Ax + A + B)e^x, \qquad y_p''(x) = (Ax + 2A + B)e^x$

Funkci dvakrát zderivujeme, abychom mohli dosadit do zadání. Při každé derivaci použijeme pravidlo pro derivaci součinu dvou funkcí a po zderivování vytkneme e^x (na obrazovce vidíte až konečný výsledek po úpravě).

Řešte rovnici $y'' - 5y' + 6y = xe^x$.

$$y'' - 5y' + 6y = 0 \quad \Rightarrow \quad z^2 - 5z + 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad z_1 = 2,\ z_2 = 3$$

$$y_1(x) = e^{2x} \qquad y_2(x) = e^{3x}$$

$$y_p(x) = (Ax + B)e^x$$

$$y_p'(x) = (Ax + A + B)e^x, \qquad y_p''(x) = (Ax + 2A + B)e^x$$

$$y'' - 5y' + 6y = xe^x$$

$$(Ax + 2A + B)e^x - 5(Ax + A + B)e^x + 6(Ax + B)e^x = xe^x$$

Dosadíme do zadané rovnice.

Řešte rovnici $y'' - 5y' + 6y = xe^x$.

$y'' - 5y' + 6y = 0 \quad \Rightarrow \quad z^2 - 5z + 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad z_1 = 2, z_2 = 3$

$y_1(x) = e^{2x} \qquad y_2(x) = e^{3x}$

$y_p(x) = (Ax + B)e^x$

$y_p'(x) = (Ax + A + B)e^x, \qquad y_p''(x) = (Ax + 2A + B)e^x$

$$y'' - 5y' + 6y = xe^x$$

$$(Ax + 2A + B)e^x - 5(Ax + A + B)e^x + 6(Ax + B)e^x = xe^x$$

$$(Ax + 2A + B) - 5(Ax + A + B) + 6(Ax + B) = x$$

Vydělíme exponenciálním faktorem.

Řešte rovnici $y'' - 5y' + 6y = xe^x$.

$y'' - 5y' + 6y = 0 \quad \Rightarrow \quad z^2 - 5z + 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad z_1 = 2,\ z_2 = 3$

$y_1(x) = e^{2x} \qquad y_2(x) = e^{3x}$

$y_p(x) = (Ax + B)e^x$

$y_p'(x) = (Ax + A + B)e^x, \qquad y_p''(x) = (Ax + 2A + B)e^x$

$$
\begin{aligned}
y'' - 5y' + 6y &= xe^x \\
(Ax + 2A + B)e^x - 5(Ax + A + B)e^x + 6(Ax + B)e^x &= xe^x \\
(Ax + 2A + B) - 5(Ax + A + B) + 6(Ax + B) &= x \\
2Ax - 3A + 2B &= x + 0
\end{aligned}
$$

Sečteme lineární a absolutní členy polynomu na levé straně.

Řešte rovnici $y'' - 5y' + 6y = xe^x$.

$y'' - 5y' + 6y = 0 \quad \Rightarrow \quad z^2 - 5z + 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad z_1 = 2, z_2 = 3$

$y_1(x) = e^{2x} \qquad y_2(x) = e^{3x}$

$y_p(x) = (Ax + B)e^x$

$y_p'(x) = (Ax + A + B)e^x, \qquad y_p''(x) = (Ax + 2A + B)e^x$

$$
\begin{aligned}
y'' - 5y' + 6y &= xe^x \\
(Ax + 2A + B)e^x - 5(Ax + A + B)e^x + 6(Ax + B)e^x &= xe^x \\
(Ax + 2A + B) - 5(Ax + A + B) + 6(Ax + B) &= x \\
2Ax - 3A + 2B &= x + 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
2A &= 1 \\
-3A + 2B &= 0
\end{aligned}
\Rightarrow
$$

Sestavíme rovnice pro koeficienty A a B.

Řešte rovnici $y'' - 5y' + 6y = xe^x$.

$y'' - 5y' + 6y = 0 \quad \Rightarrow \quad z^2 - 5z + 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad z_1 = 2, z_2 = 3$

$y_1(x) = e^{2x} \qquad y_2(x) = e^{3x}$

$y_p(x) = (Ax + B)e^x$

$y_p'(x) = (Ax + A + B)e^x, \qquad y_p''(x) = (Ax + 2A + B)e^x$

$$\begin{aligned} y'' - 5y' + 6y &= xe^x \\ (Ax + 2A + B)e^x - 5(Ax + A + B)e^x + 6(Ax + B)e^x &= xe^x \\ (Ax + 2A + B) - 5(Ax + A + B) + 6(Ax + B) &= x \\ 2Ax - 3A + 2B &= x + 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2A &= 1 \\ -3A + 2B &= 0 \end{aligned} \Rightarrow A = \frac{1}{2}, \quad B = \frac{3}{2}A = \frac{3}{4}$$

Získanou soustavu lineárních rovnic vyřešíme.

Řešte rovnici $y'' - 5y' + 6y = xe^x$.

$y'' - 5y' + 6y = 0 \quad \Rightarrow \quad z^2 - 5z + 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad z_1 = 2, z_2 = 3$

$y_1(x) = e^{2x} \qquad y_2(x) = e^{3x}$

$y_p(x) = (Ax + B)e^x$

$y_p'(x) = (Ax + A + B)e^x, \qquad y_p''(x) = (Ax + 2A + B)e^x$

$$\begin{aligned} y'' - 5y' + 6y &= xe^x \\ (Ax + 2A + B)e^x - 5(Ax + A + B)e^x + 6(Ax + B)e^x &= xe^x \\ (Ax + 2A + B) - 5(Ax + A + B) + 6(Ax + B) &= x \\ 2Ax - 3A + 2B &= x + 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2A &= 1 \\ -3A + 2B &= 0 \end{aligned} \Rightarrow A = \frac{1}{2}, \quad B = \frac{3}{2}A = \frac{3}{4}$$

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x} + \left(\frac{1}{2}x + \frac{3}{4}\right) e^x \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

Získané informace využijeme k sestavení obecného řešení zadané rovnice.

Řešte $y'' - 3y' + 2y = x^2 - 4$.

Návod: partikulární řešení hledejte jako kvadratickou funkci.

Řešte $y'' - 3y' + 2y = \cancel{x^2 - 4}$.

$$y'' - 3y' + 2y = 0 \Rightarrow z^2 - 3z + 2 = 0 \Rightarrow z_{1,2} = \begin{cases} 1 \\ 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1(x) = e^x \\ y_2(x) = e^{2x} \end{cases}$$

Nalezneme fundamentální systém řešení asociované homogenní diferenciální rovnice.

Řešte $y'' - 3y' + 2y = x^2 - 4$.

$$y'' - 3y' + 2y = 0 \Rightarrow z^2 - 3z + 2 = 0 \Rightarrow z_{1,2} = \begin{cases} 1 \\ 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1(x) = e^x \\ y_2(x) = e^{2x} \end{cases}$$

$$y = ax^2 + bx + c$$

Hledejme nyní partikulární řešení mezi kvadratickými funkcemi. Budeme uvažovat nejobecnější možnou kvadratickou funkci a její koeficienty a, b a c nastavíme tak, aby tato funkce byla řešením (tj. “vyhovovala zkoušce”) pro všechan reálná x.

Řešte $y'' - 3y' + 2y = x^2 - 4.$

$$y'' - 3y' + 2y = 0 \Rightarrow z^2 - 3z + 2 = 0 \Rightarrow z_{1,2} = \begin{cases} 1 \\ 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1(x) = e^x \\ y_2(x) = e^{2x} \end{cases}$$

$$y = ax^2 + bx + c \qquad y' = 2ax + b \qquad y'' = 2a$$

Abychom mohli dosadit najdeme první dvě derivace.

Řešte $y'' - 3y' + 2y = x^2 - 4.$

$$y'' - 3y' + 2y = 0 \Rightarrow z^2 - 3z + 2 = 0 \Rightarrow z_{1,2} = \begin{cases} 1 \\ 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1(x) = e^x \\ y_2(x) = e^{2x} \end{cases}$$

$$y = ax^2 + bx + c \qquad y' = 2ax + b \qquad y'' = 2a$$

$$\overbrace{\boxed{2a}}^{y''} - 3\overbrace{\boxed{(2ax + b)}}^{y'} + 2\overbrace{\boxed{(ax^2 + bx + c)}}^{y} = x^2 - 4$$

Dosadíme funkci do zadané rovnice.

$\boxed{\text{Řešte } y'' - 3y' + 2y = x^2 - 4.}$

$$y'' - 3y' + 2y = 0 \Rightarrow z^2 - 3z + 2 = 0 \Rightarrow z_{1,2} = \begin{cases} 1 \\ 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1(x) = e^x \\ y_2(x) = e^{2x} \end{cases}$$

$$y = ax^2 + bx + c \qquad y' = 2ax + b \qquad y'' = 2a$$

$$\overbrace{2a}^{y''} - 3\overbrace{(2ax + b)}^{y'} + 2\overbrace{(ax^2 + bx + c)}^{y} = x^2 - 4$$

$$x^2(2a) + x(2b - 6a) + (2a - 3b + 2c) = 1 \cdot x^2 + 0 \cdot x - 4$$

Sečteme členy se stejnými mocnimami proměnné x a obdržíme tak rovnici která obsahuje na každé straně polynom a hledáme parametry tak aby rovnice platila pro všechna x. Pokud se to podaří, máme partikulární řešení.

Řešte $y'' - 3y' + 2y = x^2 - 4$.

$$y'' - 3y' + 2y = 0 \Rightarrow z^2 - 3z + 2 = 0 \Rightarrow z_{1,2} = \begin{cases} 1 \\ 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1(x) = e^x \\ y_2(x) = e^{2x} \end{cases}$$

$$y = ax^2 + bx + c \qquad y' = 2ax + b \qquad y'' = 2a$$

$$\overbrace{2a}^{y''} - 3\overbrace{(2ax + b)}^{y'} + 2\overbrace{(ax^2 + bx + c)}^{y} = x^2 - 4$$

$$x^2(2a) + x(2b - 6a) + (2a - 3b + 2c) = 1 \cdot x^2 + 0 \cdot x - 4$$

$$2a = 1$$

$$2b - 6a = 0$$

$$2a - 3b + 2c = -4$$

Dva polynomy jsou stejné, mají-li stejné koeficienty u odpovídajících si mocnin.

$\boxed{\text{Řešte } y'' - 3y' + 2y = x^2 - 4.}$

$$y'' - 3y' + 2y = 0 \Rightarrow z^2 - 3z + 2 = 0 \Rightarrow z_{1,2} = \begin{cases} 1 \\ 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1(x) = e^x \\ y_2(x) = e^{2x} \end{cases}$$

$$y = ax^2 + bx + c \qquad y' = 2ax + b \qquad y'' = 2a$$

$$\overbrace{2a}^{y''} - 3\overbrace{(2ax + b)}^{y'} + 2\overbrace{(ax^2 + bx + c)}^{y} = x^2 - 4$$

$$x^2(2a) + x(2b - 6a) + (2a - 3b + 2c) = 1 \cdot x^2 + 0 \cdot x - 4$$

$$\begin{aligned} 2a &= 1 \\ 2b - 6a &= 0 \\ 2a - 3b + 2c &= -4 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad a = \frac{1}{2}$$

Vyřešíme obdrženou soustavu lieárních rovnic. Koeficient a naleznbeme přímo z první rovnice.

$$\boxed{\text{Řešte } y'' - 3y' + 2y = x^2 - 4.}$$

$$y'' - 3y' + 2y = 0 \Rightarrow z^2 - 3z + 2 = 0 \Rightarrow z_{1,2} = \begin{cases} 1 \\ 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1(x) = e^x \\ y_2(x) = e^{2x} \end{cases}$$

$$y = ax^2 + bx + c \qquad y' = 2ax + b \qquad y'' = 2a$$

$$\overbrace{2a}^{y''} - 3\overbrace{(2ax + b)}^{y'} + 2\overbrace{(ax^2 + bx + c)}^{y} = x^2 - 4$$

$$x^2(2a) + x(2b - 6a) + (2a - 3b + 2c) = 1 \cdot x^2 + 0 \cdot x - 4$$

$$\begin{aligned} 2a &= 1 \\ 2b - 6a &= 0 \\ 2a - 3b + 2c &= -4 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} a &= \frac{1}{2} \\ b &= 3a = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

Z druhé rovnice určíme koeficient b.

Řešte $y'' - 3y' + 2y = x^2 - 4$.

$$y'' - 3y' + 2y = 0 \Rightarrow z^2 - 3z + 2 = 0 \Rightarrow z_{1,2} = \begin{cases} 1 \\ 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1(x) = e^x \\ y_2(x) = e^{2x} \end{cases}$$

$$y = ax^2 + bx + c \qquad y' = 2ax + b \qquad y'' = 2a$$

$$\overbrace{2a}^{y''} - 3\overbrace{(2ax + b)}^{y'} + 2\overbrace{(ax^2 + bx + c)}^{y} = x^2 - 4$$

$$x^2(2a) + x(2b - 6a) + (2a - 3b + 2c) = 1 \cdot x^2 + 0 \cdot x - 4$$

$$\begin{aligned} 2a &= 1 \\ 2b - 6a &= 0 \\ 2a - 3b + 2c &= -4 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} a &= \frac{1}{2} \\ b &= 3a = \frac{3}{2} \\ c &= (-4 - 2a + 3b)\frac{1}{2} = \left(-4 - 1 + \frac{9}{2}\right)\frac{1}{2} = -\frac{1}{4} \end{aligned}$$

Z poslední rovnice určíme koeficient c.

Řešte $y'' - 3y' + 2y = x^2 - 4.$

$$y'' - 3y' + 2y = 0 \Rightarrow z^2 - 3z + 2 = 0 \Rightarrow z_{1,2} = \begin{cases} 1 \\ 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1(x) = e^x \\ y_2(x) = e^{2x} \end{cases}$$

$$y = ax^2 + bx + c \qquad y' = 2ax + b \qquad y'' = 2a$$

$$\overbrace{2a}^{y''} - 3\overbrace{(2ax + b)}^{y'} + 2\overbrace{(ax^2 + bx + c)}^{y} = x^2 - 4$$

$$x^2(2a) + x(2b - 6a) + (2a - 3b + 2c) = 1 \cdot x^2 + 0 \cdot x - 4$$

$$\begin{aligned} 2a &= 1 \\ 2b - 6a &= 0 \\ 2a - 3b + 2c &= -4 \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} a &= \frac{1}{2} \\ b &= 3a = \frac{3}{2} \\ c &= (-4 - 2a + 3b)\frac{1}{2} = \left(-4 - 1 + \frac{9}{2}\right)\frac{1}{2} = -\frac{1}{4} \end{aligned}$$

$$y = \boxed{C_1 e^x + C_2 e^{2x}} + \boxed{\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{1}{4}}$$

Sestavíme obecné řešení.

Řešte rovnici $y'' + 4y = xe^x$.

Návod: Partikulární řešení je možno najít ve tvaru

$$y(x) = \text{lineární polynom} \cdot e^x$$

Řešte rovnici $y'' + 4y = xe^x$.

$$y'' + 4y = 0 \Rightarrow z^2 + 4 = 0 \Rightarrow z = \pm 2i \Rightarrow \begin{cases} y_1(x) = \cos 2x \\ y_2(x) = \sin 2x \end{cases}$$

Sestavíme asociovanou homogenní rovnici, její charakteristickou rovnici a dvě lineárně nezávislá řešení.

Řešte rovnici $y'' + 4y = xe^x$.

$$y'' + 4y = 0 \Rightarrow z^2 + 4 = 0 \Rightarrow z = \pm 2i \Rightarrow \begin{cases} y_1(x) = \cos 2x \\ y_2(x) = \sin 2x \end{cases}$$

$y = (ax + b)e^x$

V souladu s nápovědou hledáme partikulární řešení ve tvaru

$$y(x) = (\text{lineární funkce}) \cdot e^x.$$

Použijeme nejobecnější možnou lineární funkci a úkolem je najít hodnoty parametrů a a b tak, aby sestavená funkce byla skutečně řešením rovnice.

Řešte rovnici $y'' + 4y = xe^x$.

$$y'' + 4y = 0 \Rightarrow z^2 + 4 = 0 \Rightarrow z = \pm 2i \Rightarrow \begin{cases} y_1(x) = \cos 2x \\ y_2(x) = \sin 2x \end{cases}$$

$y = (ax + b)e^x$

$y' = ae^x + (ax + b)e^x = (ax + a + b)e^x$

Hledáme druhou derivaci. Nejdřív tedy najdeme použitím vzorce pro derivaci součinu

$$(uv)' = u'v + uv'$$

první derivaci a výraz upravíme.

Řešte rovnici $y'' + 4y = xe^x$.

$$y'' + 4y = 0 \Rightarrow z^2 + 4 = 0 \Rightarrow z = \pm 2i \Rightarrow \begin{cases} y_1(x) = \cos 2x \\ y_2(x) = \sin 2x \end{cases}$$

$$y = (ax + b)e^x$$

$$y' = ae^x + (ax + b)e^x = (ax + a + b)e^x$$

$$y'' = ae^x + (ax + a + b)e^x = (ax + 2a + b)e^x$$

Najdeme druhou derivaci.

Řešte rovnici $y'' + 4y = xe^x$.

$$y'' + 4y = 0 \Rightarrow z^2 + 4 = 0 \Rightarrow z = \pm 2i \Rightarrow \begin{cases} y_1(x) = \cos 2x \\ y_2(x) = \sin 2x \end{cases}$$

$$y = (ax + b)e^x \qquad y' = (ax + a + b)e^x \qquad y'' = (ax + 2a + b)e^x$$

$$\overbrace{(ax + 2a + b)e^x}^{y''} + 4\overbrace{(ax + b)e^x}^{y} = xe^x$$

Dosadíme druhou derivaci do rovnice.

Řešte rovnici $y'' + 4y = xe^x$.

$$y'' + 4y = 0 \Rightarrow z^2 + 4 = 0 \Rightarrow z = \pm 2i \Rightarrow \begin{cases} y_1(x) = \cos 2x \\ y_2(x) = \sin 2x \end{cases}$$

$y = (ax + b)e^x$ $\qquad$ $y' = (ax + a + b)e^x$ $\qquad$ $y'' = (ax + 2a + b)e^x$

$$\overbrace{(ax + 2a + b)e^x}^{y''} + 4\overbrace{(ax + b)e^x}^{y} = xe^x$$

$$(ax + 2a + b) + 4(ax + b) = x$$

Vydělíme rovnici výrayem e^x. Tato úprava převede rovnici na rovnost mezi dvěma polynomy.

Řešte rovnici $y'' + 4y = xe^x$.

$$y'' + 4y = 0 \Rightarrow z^2 + 4 = 0 \Rightarrow z = \pm 2i \Rightarrow \begin{cases} y_1(x) = \cos 2x \\ y_2(x) = \sin 2x \end{cases}$$

$y = (ax + b)e^x \qquad y' = (ax + a + b)e^x \qquad y'' = (ax + 2a + b)e^x$

$$\overbrace{(ax + 2a + b)e^x}^{y''} + 4\,\overbrace{(ax + b)e^x}^{y} = xe^x$$

$$(ax + 2a + b) + 4(ax + b) = x$$

$$x(a + 4a) + (2a + b + 4b) = x + 0$$

Seskupíme stejné mocniny proměnné x.

Řešte rovnici $y'' + 4y = xe^x$.

$$y'' + 4y = 0 \Rightarrow z^2 + 4 = 0 \Rightarrow z = \pm 2i \Rightarrow \begin{cases} y_1(x) = \cos 2x \\ y_2(x) = \sin 2x \end{cases}$$

$$y = (ax + b)e^x \qquad y' = (ax + a + b)e^x \qquad y'' = (ax + 2a + b)e^x$$

$$\overbrace{(ax + 2a + b)e^x}^{y''} + 4\overbrace{(ax + b)e^x}^{y} = xe^x$$

$$(ax + 2a + b) + 4(ax + b) = x$$

$$x(a + 4a) + (2a + b + 4b) = x + 0$$

$$5a = 1$$

$$2a + 5b = 0$$

Dva polynomy jsou shodné, jsou-li koeficienty u odpovídajících si mocnin shodné.

Řešte rovnici $y'' + 4y = xe^x$.

$$y'' + 4y = 0 \Rightarrow z^2 + 4 = 0 \Rightarrow z = \pm 2i \Rightarrow \begin{cases} y_1(x) = \cos 2x \\ y_2(x) = \sin 2x \end{cases}$$

$$y = (ax + b)e^x \qquad y' = (ax + a + b)e^x \qquad y'' = (ax + 2a + b)e^x$$

$$\overbrace{(ax + 2a + b)e^x}^{y''} + 4\overbrace{(ax + b)e^x}^{y} = xe^x$$

$$(ax + 2a + b) + 4(ax + b) = x$$

$$x(a + 4a) + (2a + b + 4b) = x + 0$$

$$\begin{aligned} 5a &= 1 \\ 2a + 5b &= 0 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} a &= \frac{1}{5} \\ b &= -\frac{2}{5}a = -\frac{2}{25} \end{aligned}$$

Vyřešíme soustavu rovnic pro a a b.

Řešte rovnici $y'' + 4y = xe^x$.

$$y'' + 4y = 0 \Rightarrow z^2 + 4 = 0 \Rightarrow z = \pm 2i \Rightarrow \begin{cases} y_1(x) = \cos 2x \\ y_2(x) = \sin 2x \end{cases}$$

$$y = (ax + b)e^x \qquad y' = (ax + a + b)e^x \qquad y'' = (ax + 2a + b)e^x$$

$$\overbrace{(ax + 2a + b)e^x}^{y''} + 4\overbrace{(ax + b)e^x}^{y} = xe^x$$

$$(ax + 2a + b) + 4(ax + b) = x$$

$$x(a + 4a) + (2a + b + 4b) = x + 0$$

$$\begin{aligned} 5a &= 1 \\ 2a + 5b &= 0 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} a &= \frac{1}{5} \\ b &= -\frac{2}{5}a = -\frac{2}{25} \end{aligned}$$

$$y(x) = \left(\frac{1}{5}x - \frac{2}{25}\right)e^x + C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x$$

Využitím předchozích kroků sestavíme partikulární a obecné řešení.

Řešte rovnici $y'' + 4y = xe^x$.

$$y'' + 4y = 0 \Rightarrow z^2 + 4 = 0 \Rightarrow z = \pm 2i \Rightarrow \begin{cases} y_1(x) = \cos 2x \\ y_2(x) = \sin 2x \end{cases}$$

$$y = (ax + b)e^x \qquad y' = (ax + a + b)e^x \qquad y'' = (ax + 2a + b)e^x$$

$$\overbrace{(ax + 2a + b)e^x}^{y''} + 4\overbrace{(ax + b)e^x}^{y} = xe^x$$

$$(ax + 2a + b) + 4(ax + b) = x$$

$$x(a + 4a) + (2a + b + 4b) = x + 0$$

$$\begin{aligned} 5a &= 1 \\ 2a + 5b &= 0 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} a &= \frac{1}{5} \\ b &= -\frac{2}{5}a = -\frac{2}{25} \end{aligned}$$

$$y(x) = \left(\frac{1}{5}x - \frac{2}{25}\right)e^x + C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x$$

Hotovo!

Řešte $y'' + y' - 6y = e^{-x}(x+1)$.

Návod: partikulární řešení je tavru

$$y(x) = (\text{lineární funkce}) \cdot e^{-x}.$$

Řešte $y'' + y' - 6y = e^{-x}(x+1)$.

$$y'' + y' - 6y = 0 \Rightarrow z^2 + z - 6 \Rightarrow z_{1,2} = \begin{cases} 2 \\ -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1(x) = e^{2x} \\ y_2(x) = e^{-3x} \end{cases}$$

Najdeme lineárně nezávislá řešení asociované homogení rovnice.

Řešte $y'' + y' - 6y = e^{-x}(x+1)$.

$$y'' + y' - 6y = 0 \Rightarrow z^2 + z - 6 \Rightarrow z_{1,2} = \begin{cases} 2 \\ -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1(x) = e^{2x} \\ y_2(x) = e^{-3x} \end{cases}$$

$$y = e^{-x}(ax + b)$$

Napíšeme tvar ve kterém hledáme partikulární řešení. Musíme najít hodnoty konstant tak, aby se skutečně jednalo o funkci, které splňuje naši rovnici.

Řešte $y'' + y' - 6y = e^{-x}(x+1)$.

$$y'' + y' - 6y = 0 \Rightarrow z^2 + z - 6 \Rightarrow z_{1,2} = \begin{cases} 2 \\ -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1(x) = e^{2x} \\ y_2(x) = e^{-3x} \end{cases}$$

$$y = e^{-x}(ax+b)$$

$$y' = -e^{-x}(ax+b) + e^{-x}a = e^{-x}(a-b-ax)$$

Derivujeme pomocí derivace součinu a upravíme.

Řešte $y'' + y' - 6y = e^{-x}(x + 1)$.

$$y'' + y' - 6y = 0 \Rightarrow z^2 + z - 6 \Rightarrow z_{1,2} = \begin{cases} 2 \\ -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1(x) = e^{2x} \\ y_2(x) = e^{-3x} \end{cases}$$

$$y = e^{-x}(ax + b)$$

$$y' = -e^{-x}(ax + b) + e^{-x}a = e^{-x}(a - b - ax)$$

$$y'' = -e^{-x}(a - b - ax) + e^{-x}(-a) = e^{-x}(ax + b - 2a)$$

Derivujeme pomocí derivace součinu a upravíme.

Řešte $y'' + y' - 6y = e^{-x}(x+1)$.

$$y'' + y' - 6y = 0 \Rightarrow z^2 + z - 6 \Rightarrow z_{1,2} = \begin{cases} 2 \\ -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1(x) = e^{2x} \\ y_2(x) = e^{-3x} \end{cases}$$

$$y = e^{-x}(ax+b) \qquad y' = e^{-x}(a - b - ax) \qquad y'' = e^{-x}(ax + b - 2a)$$

$$\overbrace{e^{-x}(ax + b - 2a)}^{y''} + \overbrace{e^{-x}(a - b - ax)}^{y'} - 6\overbrace{e^{-x}(ax+b)}^{y} = e^{-x}(x+1)$$

Dosadíme funkci a její derivace do zadané rovnice.

Řešte $y'' + y' - 6y = e^{-x}(x+1)$.

$$y'' + y' - 6y = 0 \Rightarrow z^2 + z - 6 \Rightarrow z_{1,2} = \begin{cases} 2 \\ -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1(x) = e^{2x} \\ y_2(x) = e^{-3x} \end{cases}$$

$$y = e^{-x}(ax+b) \qquad y' = e^{-x}(a-b-ax) \qquad y'' = e^{-x}(ax+b-2a)$$

$$\overbrace{e^{-x}(ax+b-2a)}^{y''} + \overbrace{e^{-x}(a-b-ax)}^{y'} - 6\overbrace{e^{-x}(ax+b)}^{y} = e^{-x}(x+1)$$

$$ax + b - 2a + a - b - ax - 6ax - 6b = x + 1$$

$$x(-6a) - 6b - a = x + 1$$

Vydělíme rovnici výrazem e^{-x} a upravíme.

Řešte $y'' + y' - 6y = e^{-x}(x+1)$.

$$y'' + y' - 6y = 0 \Rightarrow z^2 + z - 6 \Rightarrow z_{1,2} = \begin{cases} 2 \\ -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1(x) = e^{2x} \\ y_2(x) = e^{-3x} \end{cases}$$

$$y = e^{-x}(ax+b) \qquad y' = e^{-x}(a-b-ax) \qquad y'' = e^{-x}(ax+b-2a)$$

$$\overbrace{e^{-x}(ax+b-2a)}^{y''} + \overbrace{e^{-x}(a-b-ax)}^{y'} - 6\,\overbrace{e^{-x}(ax+b)}^{y} = e^{-x}(x+1)$$

$$ax+b-2a+a-b-ax-6ax-6b = x+1$$

$$x(-6a) - 6b - a = x+1$$

$$-6a = 1$$

$$-6b - a = 1$$

Sestavíme z koeficientů polynomů rovnice pro parametry a a b.

Řešte $y'' + y' - 6y = e^{-x}(x+1)$.

$$y'' + y' - 6y = 0 \Rightarrow z^2 + z - 6 \Rightarrow z_{1,2} = \begin{cases} 2 \\ -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1(x) = e^{2x} \\ y_2(x) = e^{-3x} \end{cases}$$

$$y = e^{-x}(ax+b) \qquad y' = e^{-x}(a-b-ax) \qquad y'' = e^{-x}(ax+b-2a)$$

$$\overbrace{e^{-x}(ax+b-2a)}^{y''} + \overbrace{e^{-x}(a-b-ax)}^{y'} - 6\overbrace{e^{-x}(ax+b)}^{y} = e^{-x}(x+1)$$

$$ax+b-2a+a-b-ax-6ax-6b = x+1$$

$$x(-6a)-6b-a = x+1$$

$$\begin{aligned} -6a &= 1 \\ -6b - a &= 1 \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} a &= -\frac{1}{6} \\ b &= \frac{-a-1}{6} = -\frac{5}{36} \end{aligned}$$

Vypočítáme a a b.

Řešte $y'' + y' - 6y = e^{-x}(x+1)$.

$$y'' + y' - 6y = 0 \Rightarrow z^2 + z - 6 \Rightarrow z_{1,2} = \begin{cases} 2 \\ -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1(x) = e^{2x} \\ y_2(x) = e^{-3x} \end{cases}$$

$$y = e^{-x}(ax+b) \qquad y' = e^{-x}(a-b-ax) \qquad y'' = e^{-x}(ax+b-2a)$$

$$\overbrace{e^{-x}(ax+b-2a)}^{y''} + \overbrace{e^{-x}(a-b-ax)}^{y'} - 6\overbrace{e^{-x}(ax+b)}^{y} = e^{-x}(x+1)$$

$$ax + b - 2a + a - b - ax - 6ax - 6b = x + 1$$

$$x(-6a) - 6b - a = x + 1$$

$$\begin{aligned} -6a &= 1 \\ -6b - a &= 1 \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} a &= -\frac{1}{6} \\ b &= \frac{-a-1}{6} = -\frac{5}{36} \end{aligned}$$

$$y(x) = \boxed{-\left(\frac{1}{6}x + \frac{5}{36}\right)e^{-x}} + C_1 e^{2x} + C_2 e^{-3x}$$

Použijeme vypočtené hodnoty parametrů.

$$\boxed{\text{Řešte } y'' + y' - 6y = e^{-x}(x+1).}$$

$$y'' + y' - 6y = 0 \Rightarrow z^2 + z - 6 \Rightarrow z_{1,2} = \begin{cases} 2 \\ -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1(x) = e^{2x} \\ y_2(x) = e^{-3x} \end{cases}$$

$$y = e^{-x}(ax+b) \qquad y' = e^{-x}(a-b-ax) \qquad y'' = e^{-x}(ax+b-2a)$$

$$\overbrace{e^{-x}(ax+b-2a)}^{y''} + \overbrace{e^{-x}(a-b-ax)}^{y'} - 6\overbrace{e^{-x}(ax+b)}^{y} = e^{-x}(x+1)$$

$$ax+b-2a+a-b-ax-6ax-6b = x+1$$

$$x(-6a)-6b-a = x+1$$

$$\begin{aligned} -6a &= 1 \\ -6b-a &= 1 \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} a &= -\frac{1}{6} \\ b &= \frac{-a-1}{6} = -\frac{5}{36} \end{aligned}$$

$$y(x) = -\left(\frac{1}{6}x + \frac{5}{36}\right)e^{-x} + C_1 e^{2x} + C_2 e^{-3x}$$

6 Metoda variace konstant

Věta 7 (metoda variace konstant). Nechť y_1 a y_2 jsou funkce tvořící fundamentální systém řešení homogenní rovnice (LH2) a y_1', y_2' jsou jejich derivace. Nechť funkce $A(x)$ a $B(x)$ jsou funkce mající derivace $A'(x)$ a $B'(x)$, které splňují soustavu rovnic

$$\begin{cases} A'(x)y_1(x) + B'(x)y_2(x) = 0, \\ A'(x)y_1'(x) + B'(x)y_2'(x) = f(x). \end{cases} \tag{9}$$

Potom funkce y_p definovaná vzorcem

$$y_p(x) = A(x)y_1(x) + B(x)y_2(x) \tag{10}$$

je partikulárním řešením nehomogenní rovnice (L2). Obecné řešení rovnice (L2) je tedy tvaru

$$y(x) = C_1y_1(x) + C_2y_2(x) + y_p(x).$$

Díky nenulovosti Wronskiánu je zajištěno, že soustava (9) je vždy řešitelná a má právě jedno řešení. Toto řešení je možno najít „klasickými metodami“, jako je dosazovací nebo vylučovací metoda, v praxi se však využívá následující věta, známá z lineární algebry.

Věta 8 (Cramerovo pravidlo)**.** Uvažujme soustavu lineárních rovnic

$$ax + by = c$$
$$Ax + By = C$$

s koeficienty a, b, A, B, s pravými stranami c, C a s neznámými x, y. Je-li determinant D matice soustavy nenulový, tj. je-li

$$D = \begin{vmatrix} a & b \\ A & B \end{vmatrix} \neq 0$$

má soustava právě jedno řešení. Označíme-li

$$D_1 = \begin{vmatrix} c & b \\ C & B \end{vmatrix} \quad \text{a} \quad D_2 = \begin{vmatrix} a & c \\ A & C \end{vmatrix},$$

lze neznámé x a y najít jako podíly $x = \dfrac{D_1}{D}$ a $y = \dfrac{D_2}{D}$.

Aplikací Cramerova pravidla na soustavu (9) dostáváme následující: vypočteme-li Wronskián

$$W = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x) \neq 0.$$

a pomocné determinanty

$$W_1 = \begin{vmatrix} 0 & y_2(x) \\ f(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} \quad \text{a} \quad W_2 = \begin{vmatrix} y_1(x) & 0 \\ y_1'(x) & f(x) \end{vmatrix},$$

lze neznámé funkce $A'(x)$, $B'(x)$ obdržet jako podíly

$$A'(x) = \frac{W_1}{W}, \qquad B'(x) = \frac{W_2}{W}. \tag{11}$$

Hledané funkce $A(x)$, $B(x)$ poté obdržíme integrací a pomocí nich a pomocí fundamentálního systému řešení sestavíme partikulární řešení rovnice metodou popsanou již dříve.

Řešte $y'' - 5y' + 6y = xe^x$.

Řešte $y'' - 5y' + 6y = \cancel{xe^x}$.

$$y'' - 5y' + 6y = 0$$

Sestavíme asociovanou homoenní rovnici.

Řešte $y'' - 5y' + 6y = \cancel{xe^x}$.

$y'' - 5y' + 6y = 0 \quad \Rightarrow \quad z^2 - 5z + 6 = 0$

Asociovanou homoenní rovnici řešíme pomocí charakteristické rovnice.

Řešte $y'' - 5y' + 6y = \cancel{xe^x}$.

$y'' - 5y' + 6y = 0 \quad \Rightarrow \quad z^2 - 5z + 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad z_1 = 2, z_2 = 3$

Charakteristická rovnice má dva reálné různé kořeny.

Řešte $y'' - 5y' + 6y = \cancel{xe^x}$.

$y'' - 5y' + 6y = 0 \quad \Rightarrow \quad z^2 - 5z + 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad z_1 = 2,\ z_2 = 3$

$y_1(x) = e^{2x}$ $\qquad y_2(x) = e^{3x}$

Sestavíme fundamentální systém řešení.

Řešte $y'' - 5y' + 6y = \cancel{xe^x}$.

$y'' - 5y' + 6y = 0 \quad \Rightarrow \quad z^2 - 5z + 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad z_1 = 2, z_2 = 3$

$y_1(x) = e^{2x}$ $\qquad$ $y_2(x) = e^{3x}$

$y_1'(x) = 2e^{2x}$ $\qquad$ $y_2'(x) = 3e^{3x}$

Vypočteme derivace funkcí z fundamentálního systému řešení.

Řešte $\quad y'' - 5y' + 6y = xe^x.$

$y'' - 5y' + 6y = 0 \quad \Rightarrow \quad z^2 - 5z + 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad z_1 = 2, z_2 = 3$

$y_1(x) = e^{2x} \qquad y_2(x) = e^{3x}$

$y_1'(x) = 2e^{2x} \qquad y_2'(x) = 3e^{3x}$

$y_p(x) = A(x)y_1(x) + B(x)y_2(x)$

Partikulární řešení budeme hledat metodou variace konstant.

Řešte $y'' - 5y' + 6y = xe^x$.

$y'' - 5y' + 6y = 0 \quad \Rightarrow \quad z^2 - 5z + 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad z_1 = 2, z_2 = 3$

$y_1(x) = e^{2x} \qquad y_2(x) = e^{3x}$

$y_1'(x) = 2e^{2x} \qquad y_2'(x) = 3e^{3x}$

$y_p(x) = A(x)y_1(x) + B(x)y_2(x)$

$$\boxed{\begin{aligned} A'e^{2x} + B'e^{3x} &= 0 \\ 2A'e^{2x} + 3B'e^{3x} &= xe^x \end{aligned}}$$

Derivace funkcí A a B splňují soustavu lineárních rovnic.

Řešte $y'' - 5y' + 6y = xe^x$.

$y'' - 5y' + 6y = 0 \quad \Rightarrow \quad z^2 - 5z + 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad z_1 = 2,\ z_2 = 3$

$y_1(x) = e^{2x}$ $\qquad$ $y_2(x) = e^{3x}$

$y_1'(x) = 2e^{2x}$ $\qquad$ $y_2'(x) = 3e^{3x}$

$y_p(x) = A(x)y_1(x) + B(x)y_2(x)$

$$\boxed{\begin{aligned} A'e^{2x} + B'e^{3x} &= 0 \\ 2A'e^{2x} + 3B'e^{3x} &= xe^x \end{aligned}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\begin{aligned} A' + B'e^{x} &= 0 \\ 2A' + 3B'e^{x} &= xe^{-x} \end{aligned}}$$

Soustavu upravíme.

Řešte $y'' - 5y' + 6y = xe^x$.

$y'' - 5y' + 6y = 0 \quad \Rightarrow \quad z^2 - 5z + 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad z_1 = 2,\ z_2 = 3$

$y_1(x) = e^{2x} \qquad y_2(x) = e^{3x}$

$y_1'(x) = 2e^{2x} \qquad y_2'(x) = 3e^{3x}$

$y_p(x) = A(x)y_1(x) + B(x)y_2(x)$

$$\boxed{\begin{aligned} A'e^{2x} + B'e^{3x} &= 0 \\ 2A'e^{2x} + 3B'e^{3x} &= xe^x \end{aligned}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\begin{aligned} A' + B'e^{x} &= 0 \\ 2A' + 3B'e^{x} &= xe^{-x} \end{aligned}}$$

$$A' = -B'e^x$$

Z první rovnice vypočteme A'.

$$\boxed{\text{Řešte} \quad y'' - 5y' + 6y = xe^x.}$$

$y'' - 5y' + 6y = 0 \quad \Rightarrow \quad z^2 - 5z + 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad z_1 = 2, z_2 = 3$

$y_1(x) = e^{2x}$ $\qquad y_2(x) = e^{3x}$

$y_1'(x) = 2e^{2x}$ $\qquad y_2'(x) = 3e^{3x}$

$y_p(x) = A(x)y_1(x) + B(x)y_2(x)$

$$\boxed{\begin{aligned} A'e^{2x} + B'e^{3x} &= 0 \\ 2A'e^{2x} + 3B'e^{3x} &= xe^x \end{aligned}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\begin{aligned} A' + B'e^x &= 0 \\ 2A' + 3B'e^x &= xe^{-x} \end{aligned}}$$

$$A' = -B'e^x$$

$$B'e^x = xe^{-x}$$

Dosadíme A' do druhé rovnice. Dostáváme

$$2(-B'e^{-x}) + 3B'e^x = xe^{-x},$$

což je ekvivalentní modře vyznačené rovnici.

Řešte $y'' - 5y' + 6y = xe^x$.

$$y'' - 5y' + 6y = 0 \quad \Rightarrow \quad z^2 - 5z + 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad z_1 = 2,\ z_2 = 3$$

$$y_1(x) = e^{2x} \qquad y_2(x) = e^{3x}$$

$$y_1'(x) = 2e^{2x} \qquad y_2'(x) = 3e^{3x}$$

$$y_p(x) = A(x)y_1(x) + B(x)y_2(x)$$

$$\boxed{\begin{aligned} A'e^{2x} + B'e^{3x} &= 0 \\ 2A'e^{2x} + 3B'e^{3x} &= xe^x \end{aligned}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\begin{aligned} A' + B'e^{x} &= 0 \\ 2A' + 3B'e^{x} &= xe^{-x} \end{aligned}}$$

$$A' = -B'e^x$$

$$B'e^x = xe^{-x}$$

$$B' = xe^{-2x}$$

Najdeme B'.

$$\boxed{\text{Řešte} \quad y'' - 5y' + 6y = xe^x.}$$

$y'' - 5y' + 6y = 0 \quad \Rightarrow \quad z^2 - 5z + 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad z_1 = 2, z_2 = 3$

$y_1(x) = e^{2x}$ $\qquad y_2(x) = e^{3x}$

$y_1'(x) = 2e^{2x}$ $\qquad y_2'(x) = 3e^{3x}$

$y_p(x) = A(x)y_1(x) + B(x)y_2(x)$

$$\begin{aligned} A'e^{2x} + B'e^{3x} &= 0 \\ 2A'e^{2x} + 3B'e^{3x} &= xe^x \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} A' + B'e^{x} &= 0 \\ 2A' + 3B'e^{x} &= xe^{-x} \end{aligned}$$

$$A' = -B'e^x$$

$$B'e^x = xe^{-x}$$

$$B' = xe^{-2x}$$

$$A' = -B'e^x = -xe^{-x}$$

Najdeme A'.

$$\boxed{\text{Řešte} \quad y'' - 5y' + 6y = xe^x.}$$

$y'' - 5y' + 6y = 0 \quad \Rightarrow \quad z^2 - 5z + 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad z_1 = 2,\ z_2 = 3$

$y_1(x) = e^{2x}$ $\qquad y_2(x) = e^{3x}$

$y_1'(x) = 2e^{2x}$ $\qquad y_2'(x) = 3e^{3x}$

$y_p(x) = A(x)y_1(x) + B(x)y_2(x)$

$$\begin{aligned} A'e^{2x} + B'e^{3x} &= 0 \\ 2A'e^{2x} + 3B'e^{3x} &= xe^x \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} A' + B'e^{x} &= 0 \\ 2A' + 3B'e^{x} &= xe^{-x} \end{aligned}$$

$A' = -xe^{-x},\ B' = xe^{-2x}$

Integrací funkcí $A'(x)$ a $B'(x)$ najdeme $A(x)$ a $B(x)$.

$$\boxed{\text{Řešte}\quad y'' - 5y' + 6y = xe^x.}$$

$y'' - 5y' + 6y = 0 \quad \Rightarrow \quad z^2 - 5z + 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad z_1 = 2,\ z_2 = 3$

$y_1(x) = e^{2x} \qquad y_2(x) = e^{3x}$

$y_1'(x) = 2e^{2x} \qquad y_2'(x) = 3e^{3x}$

$y_p(x) = A(x)y_1(x) + B(x)y_2(x)$

$$\boxed{\begin{aligned} A'e^{2x} + B'e^{3x} &= 0 \\ 2A'e^{2x} + 3B'e^{3x} &= xe^x \end{aligned}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\begin{aligned} A' + B'e^{x} &= 0 \\ 2A' + 3B'e^{x} &= xe^{-x} \end{aligned}}$$

$A' = -xe^{-x},\ B' = xe^{-2x}$

$A(x) = (x+1)e^{-x},$

Integrujeme metodou per partés

$$A = -\int xe^{-x}\,\mathrm{d}x \quad \boxed{\begin{matrix} u = x & u' = 1 \\ v' = e^{-x} & v = -e^{-x} \end{matrix}} = -\left(-xe^{-x} + \int e^{-x}\,\mathrm{d}x\right)$$

$$= -\left(-xe^{-x} - e^{-x}\right) = (x+1)e^{-x}$$

$\boxed{\text{Řešte} \quad y'' - 5y' + 6y = xe^x.}$

$y'' - 5y' + 6y = 0 \quad \Rightarrow \quad z^2 - 5z + 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad z_1 = 2, z_2 = 3$

$y_1(x) = e^{2x}$ $\qquad y_2(x) = e^{3x}$

$y_1'(x) = 2e^{2x}$ $\qquad y_2'(x) = 3e^{3x}$

$y_p(x) = A(x)y_1(x) + B(x)y_2(x)$

$$\boxed{\begin{aligned} A'e^{2x} + B'e^{3x} &= 0 \\ 2A'e^{2x} + 3B'e^{3x} &= xe^x \end{aligned}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\begin{aligned} A' + B'e^{x} &= 0 \\ 2A' + 3B'e^{x} &= xe^{-x} \end{aligned}}$$

$A' = -xe^{-x}$, $B' = xe^{-2x}$

$A(x) = (x+1)e^{-x}$, $\qquad B(x) = -\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\right)e^{-2x}$

$$B(x) = \int xe^{-2x}\,\mathrm{d}x \quad \boxed{\begin{matrix} u = x & u' = 1 \\ v' = e^{-2x} & v = -\frac{1}{2}e^{-2x} \end{matrix}}$$

$$= -\frac{1}{2}xe^{-2x} + \frac{1}{2}\int e^{-2x}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}xe^{-2x} - \frac{1}{4}e^{-2x}$$

Řešte $y'' - 5y' + 6y = xe^x$.

$y'' - 5y' + 6y = 0 \quad \Rightarrow \quad z^2 - 5z + 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad z_1 = 2,\ z_2 = 3$

$y_1(x) = e^{2x}$ $\qquad$ $y_2(x) = e^{3x}$

$y_1'(x) = 2e^{2x}$ $\qquad$ $y_2'(x) = 3e^{3x}$

$y_p(x) = A(x)y_1(x) + B(x)y_2(x)$

$$\boxed{\begin{aligned} A'e^{2x} + B'e^{3x} &= 0 \\ 2A'e^{2x} + 3B'e^{3x} &= xe^x \end{aligned}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\begin{aligned} A' + B'e^{x} &= 0 \\ 2A' + 3B'e^{x} &= xe^{-x} \end{aligned}}$$

$A' = -xe^{-x},\ B' = xe^{-2x}$

$A(x) = (x+1)e^{-x},$ $\qquad$ $B(x) = -\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\right)e^{-2x}$

$y_p(x) = A(x)y_1(x) + B(x)y_2(x)$

Použijeme opět tvar partikulárního řešení.

Řešte $y'' - 5y' + 6y = xe^x$.

$$y'' - 5y' + 6y = 0 \quad \Rightarrow \quad z^2 - 5z + 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad z_1 = 2,\ z_2 = 3$$

$y_1(x) = e^{2x}$ $\qquad$ $y_2(x) = e^{3x}$

$y_1'(x) = 2e^{2x}$ $\qquad$ $y_2'(x) = 3e^{3x}$

$y_p(x) = A(x)y_1(x) + B(x)y_2(x)$

$$\boxed{\begin{aligned} A'e^{2x} + B'e^{3x} &= 0 \\ 2A'e^{2x} + 3B'e^{3x} &= xe^x \end{aligned}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\begin{aligned} A' + B'e^{x} &= 0 \\ 2A' + 3B'e^{x} &= xe^{-x} \end{aligned}}$$

$A' = -xe^{-x}$, $B' = xe^{-2x}$

$A(x) = (x+1)e^{-x}$, $\qquad$ $B(x) = -\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\right)e^{-2x}$

$$y_p(x) = A(x)y_1(x) + B(x)y_2(x) = \underbrace{(x+1)e^{-x}}_{A}\underbrace{e^{2x}}_{y_1}\underbrace{-\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\right)e^{-2x}}_{B}\underbrace{e^{3x}}_{y_2}$$

Dosadíme.

Řešte $y'' - 5y' + 6y = xe^x$.

$y'' - 5y' + 6y = 0 \quad \Rightarrow \quad z^2 - 5z + 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad z_1 = 2, z_2 = 3$

$y_1(x) = e^{2x}$ $\qquad y_2(x) = e^{3x}$

$y_1'(x) = 2e^{2x}$ $\qquad y_2'(x) = 3e^{3x}$

$y_p(x) = A(x)y_1(x) + B(x)y_2(x)$

$$\boxed{\begin{aligned} A'e^{2x} + B'e^{3x} &= 0 \\ 2A'e^{2x} + 3B'e^{3x} &= xe^x \end{aligned}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\begin{aligned} A' + B'e^{x} &= 0 \\ 2A' + 3B'e^{x} &= xe^{-x} \end{aligned}}$$

$A' = -xe^{-x}, B' = xe^{-2x}$

$A(x) = (x+1)e^{-x}, \qquad B(x) = -\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\right)e^{-2x}$

$$y_p(x) = A(x)y_1(x) + B(x)y_2(x) = \underbrace{(x+1)e^{-x}}_{A}\underbrace{e^{2x}}_{y_1}\underbrace{-\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\right)e^{-2x}}_{B}\underbrace{e^{3x}}_{y_2}$$

$$= \frac{1}{4}e^x(2x+3)$$

Upravíme.

Řešte $y'' - 5y' + 6y = xe^x.$

$y'' - 5y' + 6y = 0 \quad \Rightarrow \quad z^2 - 5z + 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad z_1 = 2,\ z_2 = 3$

$y_1(x) = e^{2x}$ $\qquad y_2(x) = e^{3x}$

$y_1'(x) = 2e^{2x}$ $\qquad y_2'(x) = 3e^{3x}$

$y_p(x) = A(x)y_1(x) + B(x)y_2(x)$

$$\boxed{\begin{aligned} A'e^{2x} + B'e^{3x} &= 0 \\ 2A'e^{2x} + 3B'e^{3x} &= xe^x \end{aligned}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\begin{aligned} A' + B'e^{x} &= 0 \\ 2A' + 3B'e^{x} &= xe^{-x} \end{aligned}}$$

$A' = -xe^{-x},\ B' = xe^{-2x}$

$A(x) = (x+1)e^{-x}, \qquad B(x) = -\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\right)e^{-2x}$

$$y_p(x) = A(x)y_1(x) + B(x)y_2(x) = \underbrace{(x+1)e^{-x}}_{A}\underbrace{e^{2x}}_{y_1}\underbrace{-\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\right)e^{-2x}}_{B}\underbrace{e^{3x}}_{y_2}$$
$$= \frac{1}{4}e^x(2x+3)$$

$$y = C_1e^{2x} + C_2e^{3x} + \frac{1}{4}e^x(2x+3), \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

Sestavíme obecné řešení.

Řešte $y'' - 5y' + 6y = xe^x$.

$y'' - 5y' + 6y = 0 \quad \Rightarrow \quad z^2 - 5z + 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad z_1 = 2, z_2 = 3$

$y_1(x) = e^{2x}$ $\qquad y_2(x) = e^{3x}$

$y_1'(x) = 2e^{2x}$ $\qquad y_2'(x) = 3e^{3x}$

$y_p(x) = A(x)y_1(x) + B(x)y_2(x)$

$$\begin{aligned} A'e^{2x} + B'e^{3x} &= 0 \\ 2A'e^{2x} + 3B'e^{3x} &= xe^x \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} A' + B'e^{x} &= 0 \\ 2A' + 3B'e^{x} &= xe^{-x} \end{aligned}$$

$A' = -xe^{-x}$, $B' = xe^{-2x}$

$A(x) = (x+1)e^{-x}$, $\qquad B(x) = -\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\right)e^{-2x}$

$$y_p(x) = A(x)y_1(x) + B(x)y_2(x) = \underbrace{(x+1)e^{-x}}_{A}\underbrace{e^{2x}}_{y_1} \underbrace{-\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\right)e^{-2x}}_{B}\underbrace{e^{3x}}_{y_2}$$

$$= \frac{1}{4}e^x(2x+3)$$

$\boxed{y = C_1e^{2x} + C_2e^{3x} + \frac{1}{4}e^x(2x+3)}$, $\qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

Rovnice je vyřešena. Zkuste ji vyřešit i metodou odhadu partikulárního řešení.

Řešte rovnici $\quad y'' - 4y' + 4y = e^{-x}.$

Řešte rovnici $y'' - 4y' + 4y = \cancel{e^{-x}}$.

$$y'' - 4y' + 4y = 0$$

Rovnice je nehomogenní. Zaměříme se tedy nejprve na asociovanou homogenní rovnici.

Řešte rovnici $y'' - 4y' + 4y = e^{-x}$.

$$y'' - 4y' + 4y = 0 \quad \Rightarrow \quad z^2 - 4z + 4 = 0$$

Sestavíme charakteristickou rovnici . . .

Řešte rovnici $\quad y'' - 4y' + 4y = e^{-x}$.

$$y'' - 4y' + 4y = 0 \quad \Rightarrow \quad z^2 - 4z + 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad z_{1,2} = \frac{4 - \sqrt{16 - 4.1.4}}{2.1}$$

…a najdeme kořeny charakteristické rovnice.

Řešte rovnici $\quad y'' - 4y' + 4y = e^{-x}$.

$$y'' - 4y' + 4y = 0 \quad \Rightarrow \quad z^2 - 4z + 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad z_{1,2} = \frac{4 - \sqrt{16 - 4.1.4}}{2.1} = 2$$

Charakteristická rovnice má dvojnásobný kořen $z_{1,2} = 2$.

Řešte rovnici $y'' - 4y' + 4y = e^{-x}$.

$$y'' - 4y' + 4y = 0 \quad \Rightarrow \quad z^2 - 4z + 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad z_{1,2} = \frac{4 - \sqrt{16 - 4.1.4}}{2.1} = 2$$

$y_1(x) = e^{2x}$, $y_2(x) = xe^{2x}$

Fundamentální systém řešení je tvořen funkcemi

$$y_1 = e^{zx}, \quad y_2 = xe^{zx}.$$

Řešte rovnici $y'' - 4y' + 4y = e^{-x}$.

$y_1(x) = e^{2x}$, $y_2(x) = xe^{2x}$

$y_p(x) = A(x)y_1(x) + B(x)y_2(x)$

Budeme hledat partikulární řešení metodou variace konstanty.

Řešte rovnici $y'' - 4y' + 4y = e^{-x}$.

$y_1(x) = e^{2x}$, $y_2(x) = xe^{2x}$

$y_p(x) = A(x)y_1(x) + B(x)y_2(x)$

$y_1'(x) = 2e^{2x}$, $y_2'(x) = e^{2x}(1 + 2x)$

Vypočteme derivace $y_1'(x)$ a $y_2'(x)$.

Řešte rovnici $y'' - 4y' + 4y = e^{-x}$.

$y_1(x) = e^{2x}$, $y_2(x) = xe^{2x}$

$y_p(x) = A(x)y_1(x) + B(x)y_2(x)$

$y_1'(x) = 2e^{2x}$, $y_2'(x) = e^{2x}(1 + 2x)$

$$\boxed{\begin{aligned} A'e^{2x} + B'xe^{2x} &= 0 \\ 2A'e^{2x} + B'(1 + 2x)e^{2x} &= e^{-x} \end{aligned}}$$

Sestavíme soustavu pro funkce $A'(x)$ a $B'(x)$.

Řešte rovnici $y'' - 4y' + 4y = e^{-x}$.

$y_1(x) = e^{2x}$, $y_2(x) = xe^{2x}$

$y_p(x) = A(x)y_1(x) + B(x)y_2(x)$

$y_1'(x) = 2e^{2x}$, $y_2'(x) = e^{2x}(1 + 2x)$

$$\boxed{\begin{aligned} A'e^{2x} + B'xe^{2x} &= 0 \\ 2A'e^{2x} + B'(1+2x)e^{2x} &= e^{-x} \end{aligned}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\begin{aligned} A' + B'x &= 0 \\ 2A' + B'(1+2x) &= e^{-3x} \end{aligned}}$$

Vydělíme obě rovnice výrazem e^{2x}.

Řešte rovnici $y'' - 4y' + 4y = e^{-x}$.

$y_1(x) = e^{2x}$, $y_2(x) = xe^{2x}$

$y_p(x) = A(x)y_1(x) + B(x)y_2(x)$

$y_1'(x) = 2e^{2x}$, $y_2'(x) = e^{2x}(1 + 2x)$

$$\begin{aligned} A'e^{2x} + B'xe^{2x} &= 0 \\ 2A'e^{2x} + B'(1+2x)e^{2x} &= e^{-x} \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} A' + B'x &= 0 \\ 2A' + B'(1+2x) &= e^{-3x} \end{aligned}$$

$$B' = e^{-3x}$$

Vynásobíme první rovnici číslem (-2) a výslednou rovnici přičteme k rovnici druhé. Dostáváme

$$B' = e^{-3x}.$$

Řešte rovnici $y'' - 4y' + 4y = e^{-x}$.

$y_1(x) = e^{2x}$, $y_2(x) = xe^{2x}$ $\qquad$ $y_p(x) = A(x)y_1(x) + B(x)y_2(x)$

$y_1'(x) = 2e^{2x}$, $y_2'(x) = e^{2x}(1 + 2x)$

$$\boxed{\begin{aligned} A'e^{2x} + B'xe^{2x} &= 0 \\ 2A'e^{2x} + B'(1+2x)e^{2x} &= e^{-x} \end{aligned}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\begin{aligned} A' + B'x &= 0 \\ 2A' + B'(1+2x) &= e^{-3x} \end{aligned}}$$

$B' = e^{-3x}$ $\qquad$ $A' = -xe^{-3x}$

Dosadíme $B' = e^{-3x}$ do první rovnice, čímž získáme

$$A' + xe^{-3x} = 0.$$

Z této rovnice vyjádříme A'.

Řešte rovnici $\quad y'' - 4y' + 4y = e^{-x}.$

$y_1(x) = e^{2x}$, $y_2(x) = xe^{2x}$ $\qquad y_p(x) = A(x)y_1(x) + B(x)y_2(x)$

$y_1'(x) = 2e^{2x}$, $y_2'(x) = e^{2x}(1 + 2x)$

$$B' = e^{-3x} \qquad A' = -xe^{-3x}$$

$$A(x) = -\int xe^{-3x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}xe^{-3x} - \frac{1}{3}\int e^{-3x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}xe^{-3x} + \frac{1}{9}e^{-3x}$$

Integrujeme metodou per partés:

$$\int xe^{-3x}\,\mathrm{d}x \quad \boxed{\begin{array}{ll} u = x & u' = 1 \\ v' = e^{-3x} & v = -\frac{1}{3}e^{-3x} \end{array}} = -\frac{1}{3}e^{-3x}x - \int -\frac{1}{3}e^{-3x}\,\mathrm{d}x$$

$$= -\frac{1}{3}e^{-3x}x - \left(-\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{1}{3}\right)e^{-3x}$$

Řešte rovnici $y'' - 4y' + 4y = e^{-x}$.

$y_1(x) = e^{2x}$, $y_2(x) = xe^{2x}$

$y_p(x) = A(x)y_1(x) + B(x)y_2(x)$

$y_1'(x) = 2e^{2x}$, $y_2'(x) = e^{2x}(1 + 2x)$

$B' = e^{-3x}$ $\quad$ $A' = -xe^{-3x}$

$$A(x) = -\int xe^{-3x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}xe^{-3x} - \frac{1}{3}\int e^{-3x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}xe^{-3x} + \frac{1}{9}e^{-3x}$$

$$B(x) = \int e^{-3x}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{3}e^{-3x}$$

Integrovat funkci B' je snadné.

Řešte rovnici $y'' - 4y' + 4y = e^{-x}$.

$y_1(x) = e^{2x}$, $y_2(x) = xe^{2x}$ $\qquad$ $y_p(x) = A(x)y_1(x) + B(x)y_2(x)$

$y_1'(x) = 2e^{2x}$, $y_2'(x) = e^{2x}(1 + 2x)$

$$B' = e^{-3x} \qquad A' = -xe^{-3x}$$

$$A(x) = -\int xe^{-3x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}xe^{-3x} - \frac{1}{3}\int e^{-3x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}xe^{-3x} + \frac{1}{9}e^{-3x}$$

$$B(x) = \int e^{-3x}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{3}e^{-3x}$$

$y_p = Ay_1 + By_2$

Použijeme předpis partikulárního řešení.

Řešte rovnici $y'' - 4y' + 4y = e^{-x}$.

$y_1(x) = e^{2x}$, $y_2(x) = xe^{2x}$ $\qquad$ $y_p(x) = A(x)y_1(x) + B(x)y_2(x)$

$y_1'(x) = 2e^{2x}$, $y_2'(x) = e^{2x}(1 + 2x)$

$$B' = e^{-3x} \qquad A' = -xe^{-3x}$$

$$A(x) = -\int xe^{-3x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}xe^{-3x} - \frac{1}{3}\int e^{-3x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}xe^{-3x} + \frac{1}{9}e^{-3x}$$

$$B(x) = \int e^{-3x}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{3}e^{-3x}$$

$$y_p = Ay_1 + By_2 = \underbrace{\left(\frac{1}{3}xe^{-3x} + \frac{1}{9}e^{-3x}\right)}_{A} \cdot \underbrace{e^{2x}}_{y_1} \underbrace{-\frac{1}{3}e^{-3x}}_{B} \cdot \underbrace{xe^{2x}}_{y_2}$$

Všechny funkce A, B, y_1, y_2 známe a proto můžeme dosadit.

Řešte rovnici $y'' - 4y' + 4y = e^{-x}$.

$y_1(x) = e^{2x}$, $y_2(x) = xe^{2x}$ $\qquad$ $y_p(x) = A(x)y_1(x) + B(x)y_2(x)$

$y_1'(x) = 2e^{2x}$, $y_2'(x) = e^{2x}(1 + 2x)$

$B' = e^{-3x}$ $\qquad$ $A' = -xe^{-3x}$

$$A(x) = -\int xe^{-3x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}xe^{-3x} - \frac{1}{3}\int e^{-3x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}xe^{-3x} + \frac{1}{9}e^{-3x}$$

$$B(x) = \int e^{-3x}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{3}e^{-3x}$$

$$y_p = Ay_1 + By_2 = \underbrace{\left(\frac{1}{3}xe^{-3x} + \frac{1}{9}e^{-3x}\right)}_{A} \cdot \underbrace{e^{2x}}_{y_1} \underbrace{-\frac{1}{3}e^{-3x}}_{B} \cdot \underbrace{xe^{2x}}_{y_2} = \frac{1}{9}e^{-x}$$

Upravíme výraz

$$\left(\frac{1}{3}xe^{-3x} + \frac{1}{9}e^{-3x}\right)e^{2x} - \frac{1}{3}e^{-3x}xe^{2x} = \frac{1}{3}xe^{-x} + \frac{1}{9}e^{-x} - \frac{1}{3}xe^{-x}.$$

Řešte rovnici $y'' - 4y' + 4y = e^{-x}$.

$y_1(x) = e^{2x}, y_2(x) = xe^{2x}$ $\qquad$ $y_p(x) = A(x)y_1(x) + B(x)y_2(x)$

$y_1'(x) = 2e^{2x}, y_2'(x) = e^{2x}(1 + 2x)$

$B' = e^{-3x}$ $\qquad$ $A' = -xe^{-3x}$

$$A(x) = -\int xe^{-3x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}xe^{-3x} - \frac{1}{3}\int e^{-3x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}xe^{-3x} + \frac{1}{9}e^{-3x}$$

$$B(x) = \int e^{-3x}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{3}e^{-3x}$$

$$y_p = Ay_1 + By_2 = \underbrace{\left(\frac{1}{3}xe^{-3x} + \frac{1}{9}e^{-3x}\right)}_{A} \cdot \underbrace{e^{2x}}_{y_1} \underbrace{-\frac{1}{3}e^{-3x}}_{B} \cdot \underbrace{xe^{2x}}_{y_2} = \frac{1}{9}e^{-x}$$

$$y = C_1e^{2x} + C_2xe^{2x} + \frac{1}{9}e^{-x}, \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

Sestavíme obecné řešení nehomogenní rovnice.

Řešte rovnici $y'' - 4y' + 4y = e^{-x}$.

$y_1(x) = e^{2x}$, $y_2(x) = xe^{2x}$ $\qquad$ $y_p(x) = A(x)y_1(x) + B(x)y_2(x)$

$y_1'(x) = 2e^{2x}$, $y_2'(x) = e^{2x}(1 + 2x)$

$$B' = e^{-3x} \qquad A' = -xe^{-3x}$$

$$A(x) = -\int xe^{-3x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}xe^{-3x} - \frac{1}{3}\int e^{-3x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}xe^{-3x} + \frac{1}{9}e^{-3x}$$

$$B(x) = \int e^{-3x}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{3}e^{-3x}$$

$$y_p = Ay_1 + By_2 = \underbrace{\left(\frac{1}{3}xe^{-3x} + \frac{1}{9}e^{-3x}\right)}_{A} \cdot \underbrace{e^{2x}}_{y_1} \underbrace{-\frac{1}{3}e^{-3x}}_{B} \cdot \underbrace{xe^{2x}}_{y_2} = \frac{1}{9}e^{-x}$$

$$y = C_1e^{2x} + C_2xe^{2x} + \frac{1}{9}e^{-x}, \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

Rovnice je vyřešena. Zkuste ji vyřešit i metodou odhadu partikulárního řešení.

Řešte rovnici $y'' + 2y' + y = e^{-x} \ln x$.

Řešte rovnici $y'' + 2y' + y = e^{-x} \ln x$.

$$y'' + 2y' + y = 0 \Rightarrow z^2 + 2z + 1 = 0 \Rightarrow z_{1,2} = -1 \Rightarrow \begin{cases} y_1 = e^{-x} \\ y_2 = xe^{-x} \end{cases}$$

Najdeme dvě lineárně nezávislá řešení asociované homogenní rovnice.

Řešte rovnici $y'' + 2y' + y = e^{-x} \ln x$.

$$y'' + 2y' + y = 0 \Rightarrow z^2 + 2z + 1 = 0 \Rightarrow z_{1,2} = -1 \Rightarrow \begin{cases} y_1 = e^{-x} \\ y_2 = xe^{-x} \end{cases}$$

$$y = A(x)e^{-x} + B(x)xe^{-x}$$

Budeme hledat řešení nehomogenní rovnice pomocí variace konstant.

Řešte rovnici $y'' + 2y' + y = e^{-x} \ln x$.

$$y'' + 2y' + y = 0 \Rightarrow z^2 + 2z + 1 = 0 \Rightarrow z_{1,2} = -1 \Rightarrow \begin{cases} y_1 = e^{-x} \\ y_2 = xe^{-x} \end{cases}$$

$$y = A(x)e^{-x} + B(x)xe^{-x}$$

$$W = \begin{vmatrix} e^{-x} & xe^{-x} \\ -e^{-x} & (1-x)e^{-x} \end{vmatrix} = e^{-2x}$$

Vypočteme wronskián.

Řešte rovnici $y'' + 2y' + y = e^{-x} \ln x$.

$$y'' + 2y' + y = 0 \Rightarrow z^2 + 2z + 1 = 0 \Rightarrow z_{1,2} = -1 \Rightarrow \begin{cases} y_1 = e^{-x} \\ y_2 = xe^{-x} \end{cases}$$

$$y = A(x)e^{-x} + B(x)xe^{-x}$$

$$W = \begin{vmatrix} e^{-x} & xe^{-x} \\ -e^{-x} & (1-x)e^{-x} \end{vmatrix} = e^{-2x}$$

$$W_1 = \begin{vmatrix} 0 & xe^{-x} \\ e^{-x}\ln x & (1-x)e^{-x} \end{vmatrix} = -xe^{-2x}\ln x$$

Vypočteme pomocný determinant W_1.

Řešte rovnici $y'' + 2y' + y = e^{-x}\ln x$.

$$y'' + 2y' + y = 0 \Rightarrow z^2 + 2z + 1 = 0 \Rightarrow z_{1,2} = -1 \Rightarrow \begin{cases} y_1 = e^{-x} \\ y_2 = xe^{-x} \end{cases}$$

$$y = A(x)e^{-x} + B(x)xe^{-x}$$

$$W = \begin{vmatrix} e^{-x} & xe^{-x} \\ -e^{-x} & (1-x)e^{-x} \end{vmatrix} = e^{-2x}$$

$$W_1 = \begin{vmatrix} 0 & xe^{-x} \\ e^{-x}\ln x & (1-x)e^{-x} \end{vmatrix} = -xe^{-2x}\ln x$$

$$W_2 = \begin{vmatrix} e^{-x} & 0 \\ -e^{-x} & e^{-x}\ln x \end{vmatrix} = e^{-2x}\ln x$$

Vypočteme pomocný determinant W_2.

Řešte rovnici $y'' + 2y' + y = e^{-x}\ln x$.

$$y'' + 2y' + y = 0 \Rightarrow z^2 + 2z + 1 = 0 \Rightarrow z_{1,2} = -1 \Rightarrow \begin{cases} y_1 = e^{-x} \\ y_2 = xe^{-x} \end{cases}$$

$$y = A(x)e^{-x} + B(x)xe^{-x}$$

$W = e^{-2x}$ $\qquad W_1 = -xe^{-2x}\ln x$ $\qquad W_2 = e^{-2x}\ln x$

$$A = \int \frac{W_1}{W}\,\mathrm{d}x = -\int x\ln x\,\mathrm{d}x = -\frac{x^2}{2}\ln x + \int \frac{x}{2}\,\mathrm{d}x$$
$$= -\frac{x^2}{2}\ln x + \frac{x^2}{4} = \frac{x^2}{4}(1 - 2\ln x)$$

Pomocí W_1 a W najdeme A' a integrací získáme A. Integrujeme metodouper partés tak jak je zde naznačeno

$$\boxed{\begin{array}{ll} u = \ln x & u' = \dfrac{1}{x} \\ v' = x & v = \dfrac{x^2}{2} \end{array}}$$

Řešte rovnici $y'' + 2y' + y = e^{-x}\ln x$.

$$y'' + 2y' + y = 0 \;\Rightarrow\; z^2 + 2z + 1 = 0 \;\Rightarrow\; z_{1,2} = -1 \;\Rightarrow\; \begin{cases} y_1 = e^{-x} \\ y_2 = xe^{-x} \end{cases}$$

$$y = A(x)e^{-x} + B(x)xe^{-x}$$

$$W = e^{-2x} \qquad W_1 = -xe^{-2x}\ln x \qquad W_2 = e^{-2x}\ln x$$

$$A = \int \frac{W_1}{W}\,\mathrm{d}x = -\int x\ln x\,\mathrm{d}x = -\frac{x^2}{2}\ln x + \int \frac{x}{2}\,\mathrm{d}x$$

$$= -\frac{x^2}{2}\ln x + \frac{x^2}{4} = \frac{x^2}{4}(1 - 2\ln x)$$

$$B = \int \ln x\,\mathrm{d}x = x\ln x - \int 1\,\mathrm{d}x = x\ln x - x = x(\ln x - 1)$$

Pomocí W_1 a W vypočteme B' a integrací získáme B. Integrujeme opět metodou per partés.

$$\boxed{\begin{array}{ll} u = \ln x & u' = \dfrac{1}{x} \\ v' = 1 & v = x \end{array}}$$

Řešte rovnici $y'' + 2y' + y = e^{-x} \ln x$.

$$y'' + 2y' + y = 0 \Rightarrow z^2 + 2z + 1 = 0 \Rightarrow z_{1,2} = -1 \Rightarrow \begin{cases} y_1 = e^{-x} \\ y_2 = xe^{-x} \end{cases}$$

$$y = A(x)e^{-x} + B(x)xe^{-x}$$

$$W = e^{-2x} \qquad W_1 = -xe^{-2x} \ln x \qquad W_2 = e^{-2x} \ln x$$

$$A = \int \frac{W_1}{W}\,\mathrm{d}x = -\int x \ln x\,\mathrm{d}x = -\frac{x^2}{2} \ln x + \int \frac{x}{2}\,\mathrm{d}x$$
$$= -\frac{x^2}{2} \ln x + \frac{x^2}{4} = \frac{x^2}{4}(1 - 2\ln x)$$

$$B = \int \ln x\,\mathrm{d}x = x \ln x - \int 1\,\mathrm{d}x = x \ln x - x = x(\ln x - 1)$$

$$y_p(x) = \frac{x^2}{4}(1 - 2\ln x)e^{-x} + x(\ln x - 1)xe^{-x}$$

Sestavíme partikulární řešení.

Řešte rovnici $y'' + 2y' + y = e^{-x} \ln x$.

$$y'' + 2y' + y = 0 \Rightarrow z^2 + 2z + 1 = 0 \Rightarrow z_{1,2} = -1 \Rightarrow \begin{cases} y_1 = e^{-x} \\ y_2 = xe^{-x} \end{cases}$$

$$y = A(x)e^{-x} + B(x)xe^{-x}$$

$$W = e^{-2x} \qquad W_1 = -xe^{-2x}\ln x \qquad W_2 = e^{-2x}\ln x$$

$$A = \int \frac{W_1}{W}\,\mathrm{d}x = -\int x\ln x\,\mathrm{d}x = -\frac{x^2}{2}\ln x + \int \frac{x}{2}\,\mathrm{d}x$$

$$= -\frac{x^2}{2}\ln x + \frac{x^2}{4} = \frac{x^2}{4}(1 - 2\ln x)$$

$$B = \int \ln x\,\mathrm{d}x = x\ln x - \int 1\,\mathrm{d}x = x\ln x - x = x(\ln x - 1)$$

$$y_p(x) = \frac{x^2}{4}(1 - 2\ln x)e^{-x} + x(\ln x - 1)xe^{-x} = \frac{1}{4}x^2e^{-x}(2\ln x - 3)$$

Upravíme.

Řešte rovnici $y'' + 2y' + y = e^{-x} \ln x$.

$$y'' + 2y' + y = 0 \Rightarrow z^2 + 2z + 1 = 0 \Rightarrow z_{1,2} = -1 \Rightarrow \begin{cases} y_1 = e^{-x} \\ y_2 = xe^{-x} \end{cases}$$

$$y = A(x)e^{-x} + B(x)xe^{-x}$$

$$W = e^{-2x} \qquad W_1 = -xe^{-2x} \ln x \qquad W_2 = e^{-2x} \ln x$$

$$A = \int \frac{W_1}{W}\,\mathrm{d}x = -\int x \ln x\,\mathrm{d}x = -\frac{x^2}{2}\ln x + \int \frac{x}{2}\,\mathrm{d}x$$

$$= -\frac{x^2}{2}\ln x + \frac{x^2}{4} = \frac{x^2}{4}(1 - 2\ln x)$$

$$B = \int \ln x\,\mathrm{d}x = x\ln x - \int 1\,\mathrm{d}x = x\ln x - x = x(\ln x - 1)$$

$$y_p(x) = \frac{x^2}{4}(1 - 2\ln x)e^{-x} + x(\ln x - 1)xe^{-x} = \frac{1}{4}x^2e^{-x}(2\ln x - 3)$$

$$y(x) = \frac{1}{4}x^2e^{-x}(2\ln x - 3) + C_1e^{-x} + C_2xe^{-x}$$

Sestavíme obecné řešení.

KONEC.