INŽENÝRSKÁ MATEMATIKA
DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE 1

Robert Mařík

2. října 2009

Obsah

1 Diferenciální rovnice – úvod

Motivace – základní úloha integrálního počtu. Na intervalu I je dána spojitá funkce $f(x)$. Nalezněte funkci $y = y(x)$, která na intervalu I splňuje vztah

$$y'(x) = f(x). \tag{1}$$

Řešení

$$y(x) = \int f(x)\,\mathrm{d}x + C, \tag{2}$$

kde $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ je libovolná primitivní funkce k funkci $f(x)$ na intervalu I a C je integrační konstanta, která může nabývat libovolné reálné hodnoty.

Motivace – počáteční podmínka. Základní úloha integrálního počtu má nekonečně mnoho řešení, které závisí na jedné reálné konstantě. V praxi je zpravidla nutno z této množiny vybrat nějaké konkrétní (tzv. *partikulární*) řešení, které splňuje jistou dodatečnou podmínku – tzv. *počáteční podmínku*. Taková úloha, která se skládá z diferenciální rovnice a počáteční podmínky, se nazývá *počáteční úloha*.

Příklad 1 (počáteční úloha)**.** Hledejme řešení počáteční úlohy

$$y' = 2x, \quad y(1) = 2.$$

Řešení: Integrací rovnice získáváme $y(x) = \int 2x\,\mathrm{d}x = x^2 + C$. Z podmínky $y(1) = 2$ plyne, že je-li $x = 1$, musí být $y = 2$. Dosadíme tyto hodnoty do posledního vztahu, čímž obdržíme

$$2 = 1^2 + C$$

a odsud $C = 1$. Řešením počáteční úlohy je tedy funkce $y(x) = x^2 + 1$.

Definice (obyčejná diferenciální rovnice). *Obyčejnou diferenciální rovnicí prvního řádu rozřešenou vzhledem k derivaci* s neznámou y rozumíme rovnici tvaru

$$y' = \varphi(x, y), \tag{R}$$

kde φ je funkce dvou proměnných.

Řešením (též *integrálem*) rovnice na intervalu I rozumíme každou funkci $y = y(x)$, která je diferencovatelná na I a splňuje zde identicky rovnici (R).

Nechť x_0, y_0 jsou reálná čísla. Úloha najít řešení rovnice (R), které splňuje zadanou *počáteční podmínku*

$$y(x_0) = y_0 \tag{PP}$$

se nazývá *počáteční* (též *Cauchyova*) *úloha*. Jejím řešením rozumíme funkci, která splňuje podmínku (PP) a je na nějakém intervalu obsahujícím bod x_0 řešením rovnice (R).

Řešení Cauchyovy úlohy nazýváme též *partikulárním řešením rovnice* (R). Graf libovolného partikulárního řešení se nazývá *integrální křivka*.

Příklad 2. Uvažujme rovnici $y' = 2y$ a počáteční podmínku $y(0) = 5$. Nechť C je libovolné reálné číslo. Funkce $y = Ce^{2x}$ je řešením rovnice, protože

$$y' = \left(Ce^{2x}\right)' = Ce^{2x}2 = 2y.$$

Pro $x = 0$ a $y = 5$ dostáváme

$$5 = Ce^0,$$

tj. $C = 5$.
Řešením počáteční úlohy je tedy funkce $y = 5e^{2x}$.

Poznámka 1 (formulace hlavních problémů). V souvislosti s diferenciálními rovnicemi nás zajímají především následující otázky

- Má daná počáteční úloha řešení?
- Je toto řešení určeno jednoznačně?
- Na jakém intervalu je toto řešení definováno?
- Je možné toto řešení nalézt analytickou cestou? Pokud ano, jak?

Většina inženýrských aplikací vyžaduje, aby odpověď na první dvě otázky byla kladná. Toto je možné zaručit tehdy, není-li chování funkce $\varphi(x, y)$ vzhledem k proměnné y "příliš divoké". Přesněji, platí následující.

- Je-li funkce $\varphi(x, y)$ spojitá, je počáteční úloha řešitelná (Peanova věta).
- Má-li funkce $\varphi(x, y)$ ohraničenou parciální derivaci podle y, je řešení v nějakém okolí počáteční podmínky určeno jednoznačně (Picardova věta).

2 DR se separovanými proměnnými

Definice (DR se separovanými proměnnými)**.** Diferenciální rovnice tvaru

$$y' = f(x)g(y), \tag{S}$$

kde f a g jsou funkce spojité na (nějakých) otevřených intervalech se nazývá *obyčejná diferenciální rovnice se separovanými proměnnými.*

Příklad 3. Rovnice

$$y' - x - y = 0$$

není rovnice se separovanými proměnnými. Rovnice

$$e^{-x}y' + e^{x+y}y = 0$$

je rovnice se separovanými proměnnými:

$$y' = \frac{-e^{x+y}y}{e^{-x}}$$

$$y' = -ye^{y} \cdot e^{2x}.$$

Následující věta udává jednoduše použitelené kritérium, které umožní poznat, zda je diferenciální rovnice rovnicí se separovanými proměnnými.

Věta 1 (kritérium na ověření separability)**.** Nechť funkce dvou proměnných $\varphi(x, y)$ je nenulová na konvexní oblasti G a má zde spojité všechny parciální derivace do řádu dva, včetně. Rovnice

$$y' = \varphi(x, y)$$

je rovnice se separovanými proměnnými a lze ji upravit na tvar

$$y' = f(x)g(y), \tag{S}$$

právě tehdy, když je na množině G nulový determinant

$$\begin{vmatrix} \varphi(x, y) & \varphi'_x(x, y) \\ \varphi'_y(x, y) & \varphi''_{xy}(x, y) \end{vmatrix}.$$

Řešení DR se separovanými proměnnými Algoritmus:

1. Má-li algebraická rovnice $g(y) = 0$ řešení $k_1, k_2, \dots, k_n$, jsou konstantní funkce $y \equiv k_1$, $y \equiv k_2$, …, $y \equiv k_n$ řešeními rovnice.
2. Pracujme na intervalech, kde $g(y) \neq 0$. Formálně nahradíme derivaci y' podílem diferenciálů $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x)g(y). \tag{3}$$
3. Odseparujeme proměnné
$$\frac{\mathrm{d}y}{g(y)} = f(x)\,\mathrm{d}x. \tag{4}$$
4. Získanou rovnost (4) integrujeme
$$\int \frac{\mathrm{d}y}{g(y)} = \int f(x)\,\mathrm{d}x + C. \tag{5}$$

DR se separovanými proměnnými

$$y' = f(x)g(y)$$

Rovnice se separovanými proměnnými.

DR se separovanými proměnnými

$$y' = f(x)g(y)$$

Rovnice má konstatní řešení tvaru $y = y_i$, kde y_i jsou řešeními rovnice $g(y_i) = 0$.

Nejdřív najdeme konstantní řešení.

DR se separovanými proměnnými

$$y' = f(x)g(y)$$

Rovnice má konstatní řešení tvaru $y = y_i$, kde y_i jsou řešeními rovnice $g(y_i) = 0$. Dále budeme hledat nekonstantní řešení.

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x)g(y)$$

napíšeme derivaci jako podíl diferenciálů $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

DR se separovanými proměnnými

$$y' = f(x)g(y)$$

Rovnice má konstatní řešení tvaru $y = y_i$, kde y_i jsou řešeními rovnice $g(y_i) = 0$. Dále budeme hledat nekonstantní řešení.

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x)g(y)$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{g(y)} = f(x)\,\mathrm{d}x$$

Vynásobíme rovnici jmenovateli zlomků a odseparujeme tak proměnné.

DR se separovanými proměnnými

$$y' = f(x)g(y)$$

Rovnice má konstatní řešení tvaru $y = y_i$, kde y_i jsou řešeními rovnice $g(y_i) = 0$. Dále budeme hledat nekonstantní řešení.

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x)g(y)$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{g(y)} = f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{g(y)} = \int f(x)\,\mathrm{d}x + C$$

Zintegrujeme obě strany rovnice. Použijeme jenom jednu integrační konstantu. Získáme obecné řešení.

DR se separovanými proměnnými

$$y' = f(x)g(y)$$

Rovnice má konstatní řešení tvaru $y = y_i$, kde y_i jsou řešeními rovnice $g(y_i) = 0$. Dále budeme hledat nekonstantní řešení.

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x)g(y)$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{g(y)} = f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{g(y)} = \int f(x)\,\mathrm{d}x + C$$

Je-li zadána počáteční podmínka, najdeme nejprve konstantu C pro kterou je počáteční podmínka splněna.

Najděte funkci $y(x)$ splňující $\boxed{y' = y\cos x}$ a $\boxed{y(0) = 0.1}$

Najděte funkci $y(x)$ splňující $\boxed{y' = y\cos x}$ a $\boxed{y(0) = 0.1}$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y \cdot \cos x$$

Napíšeme derivaci y' jako podíl diferenciálů $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$

Najděte funkci $y(x)$ splňující $\boxed{y' = y\cos x}$ a $\boxed{y(0) = 0.1}$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y \cdot \cos x$$

$$\frac{1}{y}\,\mathrm{d}y = \cos x \,\mathrm{d}x$$

- Násobením rovnice výrazy ve jmenovatelích odseparuje proměnné.
- Z podmínky $y(0) = 0.1$ je zřejmé, že funkce není rovna nule (alespoň v nějakém okolí bodu $x = 0$).

Najděte funkci $y(x)$ splňující $\boxed{y' = y\cos x}$ a $\boxed{y(0) = 0.1}$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y \cdot \cos x$$

$$\int \frac{1}{y}\,\mathrm{d}y = \int \cos x \;\mathrm{d}x$$

Připíšeme integrály. Vlevo integrujeme podle y, vpravo podle x.

Najděte funkci $y(x)$ splňující $\boxed{y' = y\cos x}$ a $\boxed{y(0) = 0.1}$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y \cdot \cos x$$

$$\int \frac{1}{y}\,\mathrm{d}y = \int \cos x \;\mathrm{d}x$$

$$\ln y = \sin x + C$$

- Vypočteme integrály. Funkce y je kladná (alespoň v nějakém okolí bodu $x = 0$). Uvažujeme jenom jednu integrační konstantu.
- Získáváme rovnici popisující **všechna řešení** rovnice $y' = y \cdot \cos x$.

Najděte funkci $y(x)$ splňující $\boxed{y' = y\cos x}$ a $\boxed{y(0) = 0.1}$

$$\frac{dy}{dx} = y \cdot \cos x$$

$$\int \frac{1}{y}\,dy = \int \cos x\,dx$$

$$\ln y = \sin x + C$$

$$\ln 0.1 = \sin 0 + C$$

Použijeme počáteční podmínku $y(0) = 0.1$ pro nalezení integrační konstanty.

Najděte funkci $y(x)$ splňující $\boxed{y' = y\cos x}$ a $\boxed{y(0) = 0.1}$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y \cdot \cos x$$

$$\int \frac{1}{y}\,\mathrm{d}y = \int \cos x \ \mathrm{d}x$$

$$\ln y = \sin x + C$$

$$\ln 0.1 = \sin 0 + C$$

$$C = \ln 0.1$$

Vypočteme C.

Najděte funkci $y(x)$ splňující $\boxed{y' = y\cos x}$ a $\boxed{y(0) = 0.1}$

$$\frac{dy}{dx} = y \cdot \cos x$$

$$\int \frac{1}{y}\,dy = \int \cos x \, dx$$

$$\ln y = \sin x + C$$

$$\ln 0.1 = \sin 0 + C$$

$$C = \ln 0.1$$

$$\ln y = \sin x + \ln 0.1$$

Dosadíme za C a získáme **partikulární řešení** zadané **počáteční úlohy**. Toto řešení je zatím v implicitním tvaru.

Najděte funkci $y(x)$ splňující $\boxed{y' = y\cos x}$ a $\boxed{y(0) = 0.1}$

$$\frac{dy}{dx} = y \cdot \cos x$$

$$\int \frac{1}{y}\, dy = \int \cos x \; dx$$

$$\ln y = \sin x + C$$

$$\ln 0.1 = \sin 0 + C$$

$$C = \ln 0.1$$

$$\ln y = \sin x + \ln 0.1$$

$$\ln y - \ln 0.1 = \sin x$$

Převedeme logaritmy na jednu stranu.

Najděte funkci $y(x)$ splňující $\boxed{y' = y\cos x}$ a $\boxed{y(0) = 0.1}$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y \cdot \cos x$$
$$\int \frac{1}{y}\,\mathrm{d}y = \int \cos x\ \mathrm{d}x$$
$$\ln y = \sin x + C$$
$$\ln 0.1 = \sin 0 + C$$
$$C = \ln 0.1$$
$$\ln y = \sin x + \ln 0.1$$

$$\ln y - \ln 0.1 = \sin x$$
$$\ln \frac{y}{0.1} = \sin x$$

Odečteme logaritmy.

Najděte funkci $y(x)$ splňující $\boxed{y' = y\cos x}$ a $\boxed{y(0) = 0.1}$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y \cdot \cos x$$
$$\int \frac{1}{y}\,\mathrm{d}y = \int \cos x \,\mathrm{d}x$$
$$\ln y = \sin x + C$$
$$\ln 0.1 = \sin 0 + C$$
$$C = \ln 0.1$$
$$\ln y = \sin x + \ln 0.1$$

$$\ln y - \ln 0.1 = \sin x$$
$$\ln \frac{y}{0.1} = \sin x$$
$$\frac{y}{0.1} = e^{\sin x}$$

Odstraníme logaritmus použitím inverzní funkce.

Najděte funkci $y(x)$ splňující $\boxed{y' = y\cos x}$ a $\boxed{y(0) = 0.1}$

$$\frac{dy}{dx} = y \cdot \cos x$$
$$\int \frac{1}{y}\,dy = \int \cos x \, dx$$
$$\ln y = \sin x + C$$
$$\ln 0.1 = \sin 0 + C$$
$$C = \ln 0.1$$
$$\ln y = \sin x + \ln 0.1$$

$$\ln y - \ln 0.1 = \sin x$$
$$\ln \frac{y}{0.1} = \sin x$$
$$\frac{y}{0.1} = e^{\sin x}$$
$$y = 0.1 \cdot e^{\sin x}$$

Osamostatníme y. Získáme řešení v explicitním tvaru.

Najděte funkci $y(x)$ splňující $\boxed{y' = y\cos x}$ a $\boxed{y(0) = 0.1}$

$$\frac{dy}{dx} = y\cdot\cos x$$

$$\int \frac{1}{y}\,dy = \int \cos x\ dx$$

$$\ln y = \sin x + C$$

$$\ln 0.1 = \sin 0 + C$$

$$C = \ln 0.1$$

$$\ln y = \sin x + \ln 0.1$$

$$\ln y - \ln 0.1 = \sin x$$

$$\ln\frac{y}{0.1} = \sin x$$

$$\frac{y}{0.1} = e^{\sin x}$$

$$y = 0.1\cdot e^{\sin x}$$

Označení:

$\boxed{\text{diferenciální rovnice}}$ + $\boxed{\text{počáteční podmínka}}$ = *počáteční úloha*,
obecné řešení, partikulární řešení

Poznámka 2 (řešitelnost a jednoznačnost)**.** Je-li $g(y_0) \neq 0$, je řešení počáteční úlohy (S), (PP), které obdržíme pomocí předchozího postupu, definované a jednoznačně určené v nějakém okolí bodu x_0.

Poznámka 3 (využití určitého integrálu namísto neurčitého)**.** Partikulární řešení počáteční úlohy (S)–(PP) lze místo (5) psát též přímo ve tvaru určitého integrálu

$$\int_{y_0}^{y} \frac{\mathrm{d}t}{g(t)} = \int_{x_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t. \tag{6}$$

Poznámka 4 (autonomní rovnice)**.** V mnoha biologických i technických aplikacích se setkáváme se speciálním případem rovnice se separovanými proměnnými, ve které na pravé straně *nefiguruje* nezávislá proměnná, tj. s rovnicí typu

$$y' = g(y). \tag{7}$$

Tyto rovnice se nazývají *autonomní diferenciální rovnice*. Pro rovnici (7) platí všechno co bylo dříve vysloveno pro rovnici (S). Rovnice (7) má však navíc poměrně často jednu důležitou vlastnost: v mnoha případech lze ukázat, že ohraničená řešení se pro $x \to \infty$ a pro $x \to -\infty$ v limitě blíží k některému z konstantních řešení.

Příklad 4. Hledejme všechna konstantní řešení rovnice

$$y' = y - 1 - \frac{3y-1}{y^2+1}.$$

Jiná než konstantní řešení hledat nebudeme.

Řešení: Konstantní funkce má nulovou derivaci.

$$0 = y - 1 - \frac{3y-1}{y^2+1}.$$

Jedná se algebraickou rovnici tj. neznámá y je reálné číslo, nikoliv funkce. Řešením této rovnice postupně získáváme

$$0 = \frac{y^3 - y^2 - 2y}{y^2+1},$$
$$0 = y^3 - y^2 - 2y,$$
$$0 = y(y^2 - y - 2),$$
$$0 = y(y-2)(y+1).$$

Poslední rovnice má tři kořeny $y_1 = 0$, $y_2 = 2$ a $y_3 = -1$. Jedinými konstantními řešeními jsou tedy funkce $y \equiv 0$, $y \equiv 2$ a $y \equiv -1$.

Řešte $\quad y^2 - 1 + yy'(x^2 - 1) = 0, \quad y(0) = 2.$

Řešte $y^2 - 1 + yy'(x^2 - 1) = 0, \quad y(0) = 2.$

$$yy'(1 - x^2) = y^2 - 1$$

Osamostatníme y'.

Řešte $\quad y^2 - 1 + yy'(x^2 - 1) = 0, \quad y(0) = 2.$

$$yy'(1 - x^2) = y^2 - 1$$

$$y' = \frac{y^2 - 1}{y} \frac{1}{1 - x^2}$$

Rovnice má separované proměnné a má smysl pro $y \neq 0$ a $x \neq \pm 1$.

Řešte $y^2 - 1 + yy'(x^2 - 1) = 0, \quad y(0) = 2.$

$$yy'(1 - x^2) = y^2 - 1$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{y^2 - 1}{y} \frac{1}{1 - x^2}$$

Přepíšeme derivaci jako podíl diferenciálů.

Řešte $y^2 - 1 + yy'(x^2 - 1) = 0, \quad y(0) = 2.$

$$yy'(1 - x^2) = y^2 - 1$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2 - 1}{y} \frac{1}{1 - x^2}$$

$$\frac{y}{y^2 - 1} dy = \frac{1}{1 - x^2} dx$$

Odseparujem proměnné. Pŕči tom násobíme rovnici výrazem $\frac{y}{y^2 - 1}$. Toto lze provést pokud $y \neq \pm 1$, což je garantováno počáteční podmínkou.

Řešte $\quad y^2 - 1 + yy'(x^2 - 1) = 0, \quad y(0) = 2.$

$$yy'(1 - x^2) = y^2 - 1$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{y^2 - 1}{y} \frac{1}{1 - x^2}$$

$$\int \frac{y}{y^2 - 1}\,\mathrm{d}y = \int \frac{1}{1 - x^2}\,\mathrm{d}x$$

Připíšeme integrály...

Řešte $y^2 - 1 + yy'(x^2 - 1) = 0, \quad y(0) = 2.$

$$yy'(1 - x^2) = y^2 - 1$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{y^2 - 1}{y} \frac{1}{1 - x^2}$$

$$\int \frac{y}{y^2 - 1}\,\mathrm{d}y = \int \frac{1}{1 - x^2}\,\mathrm{d}x$$

$$\frac{1}{2} \ln |y^2 - 1| =$$

…a integrujeme. První integrál je (až na aditivní konstantu) typu $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x$.

Řešte $\quad y^2 - 1 + yy'(x^2-1) = 0, \quad y(0) = 2.$

$$yy'(1-x^2) = y^2 - 1$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{y^2-1}{y}\,\frac{1}{1-x^2}$$

$$\int \frac{y}{y^2-1}\,\mathrm{d}y = \int \frac{1}{1-x^2}\,\mathrm{d}x$$

$$\frac{1}{2}\ln|y^2-1| = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + c$$

Druhý integrál napíšeme pomocí vzorců.

Řešte $\quad y^2 - 1 + yy'(x^2 - 1) = 0, \quad y(0) = 2.$

$$yy'(1 - x^2) = y^2 - 1$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{y^2 - 1}{y}\,\frac{1}{1 - x^2}$$

$$\int \frac{y}{y^2 - 1}\,\mathrm{d}y = \int \frac{1}{1 - x^2}\,\mathrm{d}x$$

$$\frac{1}{2}\ln|y^2 - 1| = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1 + x}{1 - x}\right| + c$$

$$\ln(y^2 - 1) = \ln\frac{1 + x}{1 - x} + 2c$$

vynásobíme rovnici dvěma. Vzhledem k počáteční podmínce vynecháme absolutní hodnoty.

Řešte $\quad y^2 - 1 + yy'(x^2-1) = 0, \quad y(0) = 2.$

$$yy'(1-x^2) = y^2 - 1$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{y^2-1}{y}\,\frac{1}{1-x^2}$$

$$\int \frac{y}{y^2-1}\,\mathrm{d}y = \int \frac{1}{1-x^2}\,\mathrm{d}x$$

$$\frac{1}{2}\ln|y^2-1| = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + c$$

$$\ln(y^2-1) = \ln\frac{1+x}{1-x} + 2c$$

$$\ln(y^2-1) = \ln\frac{1+x}{1-x} + \ln e^{2c}$$

Napíšeme $2c$ ve tvaru logaritmu $\ln e^{2c}$...

Řešte $y^2 - 1 + yy'(x^2 - 1) = 0, \quad y(0) = 2.$

$$yy'(1 - x^2) = y^2 - 1$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2 - 1}{y} \frac{1}{1 - x^2}$$

$$\int \frac{y}{y^2 - 1} \, dy = \int \frac{1}{1 - x^2} \, dx$$

$$\frac{1}{2} \ln |y^2 - 1| = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1 + x}{1 - x} \right| + c$$

$$\ln(y^2 - 1) = \ln \frac{1 + x}{1 - x} + 2c$$

$$\ln(y^2 - 1) = \ln \frac{1 + x}{1 - x} + \ln e^{2c}$$

$$\ln(y^2 - 1) = \ln\left(\frac{1 + x}{1 - x} e^{2c}\right)$$

…a sečteme logaritmy.

Řešte $\quad y^2 - 1 + yy'(x^2 - 1) = 0, \quad y(0) = 2.$

$$yy'(1 - x^2) = y^2 - 1$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2 - 1}{y}\,\frac{1}{1 - x^2}$$

$$\int \frac{y}{y^2 - 1}\,dy = \int \frac{1}{1 - x^2}\,dx$$

$$\frac{1}{2}\ln|y^2 - 1| = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1 + x}{1 - x}\right| + c$$

$$\ln(y^2 - 1) = \ln\frac{1 + x}{1 - x} + 2c$$

$$\ln(y^2 - 1) = \ln\frac{1 + x}{1 - x} + \ln e^{2c}$$

$$\cancel{\ln}(y^2 - 1) = \cancel{\ln}\left(\frac{1 + x}{1 - x}e^{2c}\right)$$

$$y^2 - 1 = \frac{1 + x}{1 - x}e^{2c}$$

Logaritmus je prostá funkce a můžeme jej na obou stranách rovnice vynechat.

Řešte $y^2 - 1 + yy'(x^2 - 1) = 0, \quad y(0) = 2.$

$$yy'(1 - x^2) = y^2 - 1$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{y^2 - 1}{y}\,\frac{1}{1 - x^2}$$

$$\int \frac{y}{y^2 - 1}\,\mathrm{d}y = \int \frac{1}{1 - x^2}\,\mathrm{d}x$$

$$\frac{1}{2}\ln|y^2 - 1| = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1 + x}{1 - x}\right| + c$$

$$\ln(y^2 - 1) = \ln\frac{1 + x}{1 - x} + 2c$$

$$\ln(y^2 - 1) = \ln\frac{1 + x}{1 - x} + \ln e^{2c}$$

$$\ln(y^2 - 1) = \ln\left(\frac{1 + x}{1 - x}e^{2c}\right)$$

$$y^2 - 1 = \frac{1 + x}{1 - x}e^{2c}$$

$$y^2 = 1 + C \cdot \frac{1 + x}{1 - x}$$

Obecné řešení. $C = e^{2c}$ je nová konstanta.

Řešte $y^2 - 1 + yy'(x^2 - 1) = 0, \quad y(0) = 2.$

$$yy'(1 - x^2) = y^2 - 1$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2 - 1}{y}\,\frac{1}{1 - x^2}$$

$$\int \frac{y}{y^2 - 1}\,dy = \int \frac{1}{1 - x^2}\,dx$$

$$\frac{1}{2}\ln|y^2 - 1| = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1 + x}{1 - x}\right| + c$$

$$\ln(y^2 - 1) = \ln\frac{1 + x}{1 - x} + 2c$$

$$\ln(y^2 - 1) = \ln\frac{1 + x}{1 - x} + \ln e^{2c}$$

$$\ln(y^2 - 1) = \ln\left(\frac{1 + x}{1 - x}e^{2c}\right)$$

$x = 0$

$y = 2$

$$y^2 - 1 = \frac{1 + x}{1 - x}e^{2c}$$

$$y^2 = 1 + C \cdot \frac{1 + x}{1 - x}$$

$$2^2 = 1 + C\frac{1 + 0}{1 - 0}$$

Dosadíme hodnoty z počáteční podmínky…

Řešte $y^2 - 1 + yy'(x^2-1) = 0, \quad y(0) = 2.$

$$yy'(1-x^2) = y^2 - 1$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{y^2-1}{y}\,\frac{1}{1-x^2}$$

$$\int \frac{y}{y^2-1}\,\mathrm{d}y = \int \frac{1}{1-x^2}\,\mathrm{d}x$$

$$\frac{1}{2}\ln|y^2-1| = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + c$$

$$\ln(y^2-1) = \ln\frac{1+x}{1-x} + 2c$$

$$\ln(y^2-1) = \ln\frac{1+x}{1-x} + \ln e^{2c}$$

$$\ln(y^2-1) = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}e^{2c}\right)$$

$$y^2 - 1 = \frac{1+x}{1-x}e^{2c}$$

$$y^2 = 1 + C\cdot\frac{1+x}{1-x}$$

$$2^2 = 1 + C\frac{1+0}{1-0}$$

$$C = 3$$

…a nalezneme C.

Řešte $y^2 - 1 + yy'(x^2 - 1) = 0, \quad y(0) = 2.$

$$yy'(1 - x^2) = y^2 - 1$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2 - 1}{y} \frac{1}{1 - x^2}$$

$$\int \frac{y}{y^2 - 1}\,dy = \int \frac{1}{1 - x^2}\,dx$$

$$\frac{1}{2} \ln|y^2 - 1| = \frac{1}{2} \ln\left|\frac{1 + x}{1 - x}\right| + c$$

$$\ln(y^2 - 1) = \ln\frac{1 + x}{1 - x} + 2c$$

$$\ln(y^2 - 1) = \ln\frac{1 + x}{1 - x} + \ln e^{2c}$$

$$\ln(y^2 - 1) = \ln\left(\frac{1 + x}{1 - x} e^{2c}\right)$$

$$y^2 - 1 = \frac{1 + x}{1 - x} e^{2c}$$

$$y^2 = 1 + C \cdot \frac{1 + x}{1 - x}$$

$$2^2 = 1 + C\frac{1 + 0}{1 - 0}$$

$$C = 3$$

$$y^2 = 1 + 3\frac{1 + x}{1 - x}$$

Použijeme toto C v obecném řešení.

Řešte $y^2 - 1 + yy'(x^2 - 1) = 0, \quad y(0) = 2.$

$$yy'(1 - x^2) = y^2 - 1$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2 - 1}{y}\,\frac{1}{1 - x^2}$$

$$\int \frac{y}{y^2 - 1}\,dy = \int \frac{1}{1 - x^2}\,dx$$

$$\frac{1}{2}\ln|y^2 - 1| = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1 + x}{1 - x}\right| + c$$

$$\ln(y^2 - 1) = \ln\frac{1 + x}{1 - x} + 2c$$

$$\ln(y^2 - 1) = \ln\frac{1 + x}{1 - x} + \ln e^{2c}$$

$$\ln(y^2 - 1) = \ln\left(\frac{1 + x}{1 - x}e^{2c}\right)$$

$$y^2 - 1 = \frac{1 + x}{1 - x}e^{2c}$$

$$y^2 = 1 + C \cdot \frac{1 + x}{1 - x}$$

$$2^2 = 1 + C\frac{1 + 0}{1 - 0}$$

$$C = 3$$

$$y^2 = 1 + 3\frac{1 + x}{1 - x}$$

$$y^2 = \frac{4 + 2x}{1 - x}$$

Upravíme. Problém je vyřešen.

Řešte počáteční úlohu $\quad y' = \dfrac{2x+1}{2(y-1)}, \quad y(2) = 0$

Řešte počáteční úlohu $y' = \dfrac{2x+1}{2(y-1)}, \quad y(2) = 0$

$$y' = \frac{2x+1}{2(y-1)}$$

Nejprve budeme hledat obecné řešení.

Řešte počáteční úlohu $y' = \dfrac{2x+1}{2(y-1)}, \quad y(2) = 0$

$$y' = \frac{2x+1}{2(y-1)}$$

$$(2y-2)\,\mathrm{d}y = (2x+1)\,\mathrm{d}x$$

Rovnice má separované proměnné a má smysl pro $y \neq 1$. Pro odseparování budeme rovnici násobit výrazem $2(y-1)$. Nenulovost tohoto výrazu zajišťuje počáteční podmínka.

Řešte počáteční úlohu $\quad y' = \dfrac{2x+1}{2(y-1)}, \quad y(2) = 0$

$$y' = \frac{2x+1}{2(y-1)}$$

$$\int (2y-2)\,\mathrm{d}y = \int (2x+1)\,\mathrm{d}x$$

Připíšeme integrály.

Řešte počáteční úlohu $\quad y' = \dfrac{2x+1}{2(y-1)}, \quad y(2) = 0$

$$y' = \frac{2x+1}{2(y-1)}$$

$$\int (2y-2)\,\mathrm{d}y = \int (2x+1)\,\mathrm{d}x$$

$$y^2 - 2y = x^2 + x + C$$

Vypočteme integrály na obou stranách rovnice. Dostáváme $\boxed{\int 2y - 2\,\mathrm{d}y = y^2 - 2y}$ a $\boxed{\int 2x + 1\,\mathrm{d}x = x^2 + x}$. Integrační konstantu použijeme na pravé straně. Tím získáme obecné řešení v implicitním tvaru.

Řešte počáteční úlohu $\quad y' = \dfrac{2x+1}{2(y-1)}, \quad y(2) = 0$

$$y' = \frac{2x+1}{2(y-1)}$$

$$\int (2y-2)\,\mathrm{d}y = \int (2x+1)\,\mathrm{d}x$$

$$y^2 - 2y = x^2 + x + C$$

$$(y-1)^2 - 1 = x^2 + x + C$$

$$(y-1)^2 = x^2 + x + C + 1$$

Pro explicitní vyjádření funkce y upravíme na čtverec.

Řešte počáteční úlohu $y' = \dfrac{2x+1}{2(y-1)}, \quad y(2) = 0$

$$
\begin{aligned}
y' &= \frac{2x+1}{2(y-1)} \\
\int (2y-2)\,\mathrm{d}y &= \int (2x+1)\,\mathrm{d}x \\
y^2 - 2y &= x^2 + x + C \\
(y-1)^2 - 1 &= x^2 + x + C \\
(y-1)^2 &= x^2 + x + C + 1 \\
y - 1 &= \pm\sqrt{x^2 + x + K}
\end{aligned}
$$

Zaveďme novou konstantu $K = C + 1$. Vypočteme odmocninu obou stran rovnice…

Řešte počáteční úlohu $\quad y' = \dfrac{2x+1}{2(y-1)}, \quad y(2) = 0$

$$\begin{aligned}
y' &= \frac{2x+1}{2(y-1)} \\
\int (2y-2)\,\mathrm{d}y &= \int (2x+1)\,\mathrm{d}x \\
y^2 - 2y &= x^2 + x + C \\
(y-1)^2 - 1 &= x^2 + x + C \\
(y-1)^2 &= x^2 + x + C + 1 \\
y - 1 &= \pm\sqrt{x^2 + x + K} \\
y &= 1 \pm \sqrt{x^2 + x + K}
\end{aligned}$$

…a vyjádříme y.

Řešte počáteční úlohu $y' = \frac{2x+1}{2(y-1)}, \quad y(2) = 0$

$$y' = \frac{2x+1}{2(y-1)}$$

$$\int (2y-2)\,\mathrm{d}y = \int (2x+1)\,\mathrm{d}x$$

$$y^2 - 2y = x^2 + x + C$$

$$(y-1)^2 - 1 = x^2 + x + C$$

$$(y-1)^2 = x^2 + x + C + 1$$

$$y - 1 = \pm\sqrt{x^2 + x + K}$$

$$y = 1 \pm \sqrt{x^2 + x + K}$$

$$y_1 = 1 + \sqrt{x^2 + x + K}$$

$$y_2 = 1 - \sqrt{x^2 + x + K}$$

Explicitní formule pro obecné řešení se rozpadá na dvě větve, přičemž $y_1(x) \geq 1$ a $y_2(x) \leq 1$ pro všechna x. Vzhledem k počáteční podmínce budeme uvažovat jen y_2.

Řešte počáteční úlohu $y' = \dfrac{2x+1}{2(y-1)}, \quad y(2) = 0$

$$y' = \frac{2x+1}{2(y-1)}$$

$$\int (2y-2)\,\mathrm{d}y = \int (2x+1)\,\mathrm{d}x$$

$$y^2 - 2y = x^2 + x + C$$

$$(y-1)^2 - 1 = x^2 + x + C$$

$$(y-1)^2 = x^2 + x + C + 1$$

$$y - 1 = \pm\sqrt{x^2 + x + K}$$

$$y = 1 \pm \sqrt{x^2 + x + K}$$

$y = 0$ $x = 2$

$$\cancel{y_1 = 1 + \sqrt{x^2 + x + K}}$$

$$y_2 = 1 - \sqrt{x^2 + x + K}$$

$$0 = 1 - \sqrt{4 + 2 + K}$$

Dosadíme počáteční podmínky do y_2.

Řešte počáteční úlohu $y' = \dfrac{2x+1}{2(y-1)}, \quad y(2) = 0$

$$y' = \frac{2x+1}{2(y-1)}$$

$$\int (2y-2)\,\mathrm{d}y = \int (2x+1)\,\mathrm{d}x$$

$$y^2 - 2y = x^2 + x + C$$

$$(y-1)^2 - 1 = x^2 + x + C$$

$$(y-1)^2 = x^2 + x + C + 1$$

$$y - 1 = \pm\sqrt{x^2 + x + K}$$

$$y = 1 \pm \sqrt{x^2 + x + K}$$

$$\cancel{y_1 = 1 + \sqrt{x^2 + x + K}}$$

$$y_2 = 1 - \sqrt{x^2 + x + K}$$

$$0 = 1 - \sqrt{4 + 2 + K}$$

$$K = -5$$

Řešení rovnice $0 = 1 - \sqrt{4+2+K}$ je $K = -5$.

Řešte počáteční úlohu $\quad y' = \dfrac{2x+1}{2(y-1)}, \quad y(2) = 0$

$$y' = \frac{2x+1}{2(y-1)}$$
$$\int (2y-2)\,\mathrm{d}y = \int (2x+1)\,\mathrm{d}x$$
$$y^2 - 2y = x^2 + x + C$$
$$(y-1)^2 - 1 = x^2 + x + C$$
$$(y-1)^2 = x^2 + x + C + 1$$
$$y - 1 = \pm\sqrt{x^2 + x + K}$$
$$y = 1 \pm \sqrt{x^2 + x + K}$$

$$\cancel{y_1 = 1 + \sqrt{x^2 + x + K}}$$
$$y_2 = 1 - \sqrt{x^2 + x + K}$$
$$0 = 1 - \sqrt{4 + 2 + K}$$
$$K = -5$$

$$y_p = 1 - \sqrt{x^2 + x - 5}$$

Použijeme obdrženou hodnotu konstanty K ve vztahu pro y_2.

Řešte $\quad 3xy^2y' = (y^3 - 1)(x^3 - 1).$

Řešte $3xy^2y' = (y^3-1)(x^3-1)$.

$$y' = \frac{y^3-1}{3y^2}\cdot\frac{x^3-1}{x}$$

- Vyjádříme z rovnice y'.
- Rovnice má skutečně separované proměnné a má smysl pro $x \neq 0$ a $y \neq 0$.

Řešte $3xy^2y' = (y^3 - 1)(x^3 - 1)$.

$$y' = \frac{y^3 - 1}{3y^2} \cdot \frac{x^3 - 1}{x}$$

Funkce $y \equiv 1$ je řešením.

Pravá strana je nulová pro $y = 1$. Konstatní řešení je tedy funkce $y(x) = 1$. (Toto lze ověřit i přímým dosazením).

Řešte $3xy^2y' = (y^3-1)(x^3-1)$.

$$y' = \frac{y^3-1}{3y^2}\cdot\frac{x^3-1}{x}$$

Funkce $y \equiv 1$ je řešením. Předpokládejme dále že $y \not\equiv 1$.

Předpokládejme nadále že $y \not\equiv 1$. V tomto případě lze vynásobit rovnici výrazem $\dfrac{3y^2}{y^3-1}$. Tím odseparujeme proměnné.

Řešte $3xy^2y' = (y^3 - 1)(x^3 - 1)$.

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y' = \frac{y^3 - 1}{3y^2} \cdot \frac{x^3 - 1}{x}$$

Funkce $y \equiv 1$ je řešením. Předpokládejme dále že $y \not\equiv 1$.

$$\frac{3y^2}{y^3 - 1}\,\mathrm{d}y = \frac{x^3 - 1}{x}\,\mathrm{d}x$$

Proměnná y je na levé straně a proměnná x na straně pravé.

Řešte $3xy^2y' = (y^3-1)(x^3-1)$.

Funkce $y \equiv 1$ je řešením. Předpokládejme dále že $y \not\equiv 1$.

$$\int \frac{3y^2}{y^3-1}\,\mathrm{d}y = \int \frac{x^3-1}{x}\,\mathrm{d}x$$

Připíšeme integrály ...

Řešte $\quad 3xy^2y' = (y^3-1)(x^3-1).$

Funkce $y \equiv 1$ je řešením. Předpokládejme dále že $y \not\equiv 1$.

$$\int \frac{3y^2}{y^3-1}\,\mathrm{d}y = \int \frac{x^3-1}{x}\,\mathrm{d}x$$

$$\ln|y^3-1| = \frac{x^3}{3} - \ln|x| + c$$

…a tyto integrály vypočteme. Integtrál vlevo je integrál typu $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x$ a integrál vpravo může být rozpesán následovně

$$\int \frac{x^3-1}{x}\,\mathrm{d}x = \int x^2 - \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{x^3}{3} - \ln|x|.$$

Řešte $\quad 3xy^2y' = (y^3-1)(x^3-1).$

Funkce $y \equiv 1$ je řešením. Předpokládejme dále že $y \not\equiv 1$.

$$\int \frac{3y^2}{y^3-1}\,\mathrm{d}y = \int \frac{x^3-1}{x}\,\mathrm{d}x$$

$$\ln|y^3-1| = \frac{x^3}{3} - \ln|x| + c$$

$$\ln|y^3-1| = \ln\left(e^{x^3/3}\frac{1}{|x|}e^c\right)$$

Zapíšeme výrazy $\frac{x^3}{3}$ a c v logaritmickém tvaru $\ln e^{x^3/3}$ a $\ln e^c$ a sečteme logaritmy.

Řešte $3xy^2y' = (y^3-1)(x^3-1)$.

Funkce $y \equiv 1$ je řešením. Předpokládejme dále že $y \not\equiv 1$.

$$\int \frac{3y^2}{y^3-1}\,\mathrm{d}y = \int \frac{x^3-1}{x}\,\mathrm{d}x$$

$$\ln|y^3-1| = \frac{x^3}{3} - \ln|x| + c$$

$$\cancel{\ln}|y^3-1| = \cancel{\ln}\left(e^{x^3/3}\frac{1}{|x|}e^c\right)$$

$$|y^3-1| = e^{x^3/3}\frac{1}{|x|}e^c$$

Protože je logaritmus prostá funkce, je možno jej odstranit z obou stran rovnice.

Řešte $3xy^2y' = (y^3-1)(x^3-1)$.

Funkce $y \equiv 1$ je řešením. Předpokládejme dále že $y \not\equiv 1$.

$$\int \frac{3y^2}{y^3-1}\,\mathrm{d}y = \int \frac{x^3-1}{x}\,\mathrm{d}x$$

$$\ln|y^3-1| = \frac{x^3}{3} - \ln|x| + c$$

$$\ln|y^3-1| = \ln\left(e^{x^3/3}\,\frac{1}{|x|}\,e^c\right)$$

$$|y^3-1| = e^{x^3/3}\,\frac{1}{|x|}\,e^c$$

$$y^3-1 = (\pm e^c)\,e^{x^3/3}\,\frac{1}{x}$$

Vynecháním absolutní hodnoty se mohou levá a pravá strana rovnice lišit znaménkem. Pro všechny případy proto přidejme na jednu stranu obě alternativy $\pm$. Toto znaménko přidíáme ke konstatnímu členu e^c.

Řešte $\quad 3xy^2y' = (y^3-1)(x^3-1)$.

Funkce $y \equiv 1$ je řešením. Předpokládejme dále že $y \not\equiv 1$.

$$\int \frac{3y^2}{y^3-1}\,\mathrm{d}y = \int \frac{x^3-1}{x}\,\mathrm{d}x$$

$$\ln|y^3-1| = \frac{x^3}{3} - \ln|x| + c$$

$$\ln|y^3-1| = \ln\left(e^{x^3/3}\,\frac{1}{|x|}\,e^c\right)$$

$$|y^3-1| = e^{x^3/3}\,\frac{1}{|x|}\,e^c$$

$$y^3-1 = (\pm e^c)\,e^{x^3/3}\,\frac{1}{x} \qquad C = \pm e^c \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$$

Zavedeme novou konstantu $C = \pm e^c$. Protože c může nabývat libovolných reálných hodnot, pak výraz e^c může nabývat libovolnou kladnou hodnotu a výraz $\pm e^c$ libovolnou kladnou nebo zápornou (tj. libovolnou neulovou) hodnotu.

Řešte $3xy^2y' = (y^3-1)(x^3-1).$

Funkce $y \equiv 1$ je řešením. Předpokládejme dále že $y \not\equiv 1$.

$$\int \frac{3y^2}{y^3-1}\,\mathrm{d}y = \int \frac{x^3-1}{x}\,\mathrm{d}x$$

$$\ln|y^3-1| = \frac{x^3}{3} - \ln|x| + c$$

$$\ln|y^3-1| = \ln\left(e^{x^3/3}\frac{1}{|x|}e^c\right)$$

$$|y^3-1| = e^{x^3/3}\frac{1}{|x|}e^c$$

$$y^3-1 = (\pm e^c)\,e^{x^3/3}\frac{1}{x} \qquad C = \pm e^c \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$$

$$y^3-1 = \frac{C}{x}e^{x^3/3} \qquad C \in \mathbb{R}$$

Zahrnutím možnosti $C = 0$ do obecného řešení získáme i konstantní řešení $y = 1$, které jsme dosud uvažovali odděleně. Povolíme tedy, že C může nabývat libovolnou reálnou hodnotu.

Řešte $\quad 3xy^2y' = (y^3-1)(x^3-1).$

Funkce $y \equiv 1$ je řešením. Předpokládejme dále že $y \not\equiv 1$.

$$\int \frac{3y^2}{y^3-1}\,\mathrm{d}y = \int \frac{x^3-1}{x}\,\mathrm{d}x$$

$$\ln|y^3-1| = \frac{x^3}{3} - \ln|x| + c$$

$$\ln|y^3-1| = \ln\left(e^{x^3/3}\frac{1}{|x|}e^c\right)$$

$$|y^3-1| = e^{x^3/3}\frac{1}{|x|}e^c$$

$$y^3-1 = (\pm e^c)\,e^{x^3/3}\frac{1}{x} \qquad C = \pm e^c \in \mathbb{R}$$

$$y^3-1 = \frac{C}{x}e^{x^3/3} \qquad C \in \mathbb{R}$$

Vyřešeno.

Řešte rovnici $(1 + e^x)y' + e^x y = 0$

Řešte rovnici $(1 + e^x)y' + e^x y = 0$

$$(1 + e^x)y' = -e^x y$$

Osamostatníme členy s y'.

Řešte rovnici $(1 + e^x)y' + e^x y = 0$

$$(1 + e^x)y' = -e^x y$$

$$y' = -\frac{e^x}{e^x + 1} y$$

Vypočteme y'.

Řešte rovnici $(1 + e^x)y' + e^x y = 0$

$$(1 + e^x)y' = -e^x y$$

$$y' = -\frac{e^x}{e^x + 1} y$$

Funkce $y \equiv 0$ je řešením. Dále předpokládáme $y \neq 0$.

Pravá strana je nulová pro $y = 0$.

Řešte rovnici $(1+e^x)y' + e^x y = 0$

$$(1+e^x)y' = -e^x y$$

$$y' = -\frac{e^x}{e^x+1} y$$

Funkce $y \equiv 0$ je řešením. Dále předpokládáme $y \neq 0$.

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{e^x}{e^x+1} y$$

Dosadíme $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ za y'.

Řešte rovnici $(1+e^x)y' + e^x y = 0$

$$(1+e^x)y' = -e^x y$$
$$y' = -\frac{e^x}{e^x+1}y$$

Funkce $y \equiv 0$ je řešením. Dále předpokládáme $y \neq 0$.

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{e^x}{e^x+1}y$$
$$\frac{\mathrm{d}y}{y} = -\frac{e^x}{1+e^x}\,\mathrm{d}x$$

Vynásobíme výrazem $\mathrm{d}x$ a vydělíme y. Protože lze předpokládat $y \neq 0$, můžeme takové dělení provést.

Řešte rovnici $(1+e^x)y' + e^x y = 0$

$$(1+e^x)y' = -e^x y$$

$$y' = -\frac{e^x}{e^x+1}y$$

Funkce $y \equiv 0$ je řešením. Dále předpokládáme $y \neq 0$.

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{e^x}{e^x+1}y$$

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{y} = -\int \frac{e^x}{1+e^x}\,\mathrm{d}x$$

Doplníme integrály.

Řešte rovnici $(1+e^x)y' + e^x y = 0$

$$(1+e^x)y' = -e^x y$$
$$y' = -\frac{e^x}{e^x+1}y$$

Funkce $y \equiv 0$ je řešením. Dále předpokládáme $y \neq 0$.

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{e^x}{e^x+1}y$$
$$\int \frac{\mathrm{d}y}{y} = -\int \frac{e^x}{1+e^x}\,\mathrm{d}x$$
$$\ln|y| = -\ln(1+e^x) + c$$

Vypočteme integrály. Zlomek na pravé straně má v čitateli derivaci jmenovatele.

Řešte rovnici $(1 + e^x)y' + e^x y = 0$

$$(1 + e^x)y' = -e^x y$$
$$y' = -\frac{e^x}{e^x + 1} y$$

Funkce $y \equiv 0$ je řešením. Dále předpokládáme $y \neq 0$.

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{e^x}{e^x + 1} y$$
$$\int \frac{\mathrm{d}y}{y} = -\int \frac{e^x}{1 + e^x}\,\mathrm{d}x$$
$$\ln|y| = -\ln(1 + e^x) + c$$

$$\ln\left[|y|\left(1 + e^x\right)\right] = \ln e^c$$

Převedeme logaritmy na levou stranu a sečteme. číslo c zapíšeme jako logaritmus.

Řešte rovnici $(1+e^x)y' + e^x y = 0$

$$(1+e^x)y' = -e^x y$$

$$y' = -\frac{e^x}{e^x+1}y$$

Funkce $y \equiv 0$ je řešením. Dále předpokládáme $y \neq 0$.

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{e^x}{e^x+1}y$$

$$\int \frac{dy}{y} = -\int \frac{e^x}{1+e^x}\,dx$$

$$\ln|y| = -\ln(1+e^x) + c$$

$$\cancel{\ln}\left[|y|(1+e^x)\right] = \cancel{\ln} e^c$$

$$|y|(1+e^x) = e^c$$

Logaritmická funkce je prostá a je možno ji vynechat z obou stran rovnice.

Řešte rovnici $(1+e^x)y' + e^x y = 0$

$$(1+e^x)y' = -e^x y$$
$$y' = -\frac{e^x}{e^x+1}y$$

Funkce $y \equiv 0$ je řešením. Dále předpokládáme $y \neq 0$.

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{e^x}{e^x+1}y$$
$$\int \frac{\mathrm{d}y}{y} = -\int \frac{e^x}{1+e^x}\,\mathrm{d}x$$
$$\ln|y| = -\ln(1+e^x) + c$$

$$\ln\left[|y|\left(1+e^x\right)\right] = \ln e^c$$
$$|y|(1+e^x) = e^c$$
$$y(1+e^x) = K \qquad K = \pm e^c$$

Odstraníme absolutní hodnotu. Abychom neporušili platnost rovnice, přidáme na pravou stranu obě varianty znaménka $\pm$. Toto znaménko vytvoří společně s číslem e^c novou konstantu K.

Řešte rovnici $\qquad (1+e^x)y' + e^x y = 0$

$$(1+e^x)y' = -e^x y$$
$$y' = -\frac{e^x}{e^x+1}y$$

Funkce $y \equiv 0$ je řešením. Dále předpokládáme $y \neq 0$.

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{e^x}{e^x+1}y$$
$$\int \frac{\mathrm{d}y}{y} = -\int \frac{e^x}{1+e^x}\,\mathrm{d}x$$
$$\ln|y| = -\ln(1+e^x) + c$$

$$\ln\Big[|y|\big(1+e^x\big)\Big] = \ln e^c$$
$$|y|(1+e^x) = e^c$$
$$y(1+e^x) = K \qquad K = \pm e^c$$
$$y = \frac{K}{1+e^x} \qquad K \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$$

Vyřešíme rovnici explicitně vzhledem k y.

Řešte rovnici $\qquad (1+e^x)y' + e^x y = 0$

$$(1+e^x)y' = -e^x y$$
$$y' = -\frac{e^x}{e^x+1}y$$

Funkce $y \equiv 0$ je řešením. Dále předpokládáme $y \neq 0$.

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{e^x}{e^x+1}y$$
$$\int \frac{\mathrm{d}y}{y} = -\int \frac{e^x}{1+e^x}\,\mathrm{d}x$$
$$\ln|y| = -\ln(1+e^x) + c$$

$$\ln\left[|y|\left(1+e^x\right)\right] = \ln e^c$$
$$|y|(1+e^x) = e^c$$
$$y(1+e^x) = K \qquad K = \pm e^c$$
$$y = \frac{K}{1+e^x} \qquad K \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$$

Volbou $K = 0$ obdržíme $y \equiv 0$, což odpovídá již získanému konstantnímu řešení.

Řešte rovnici $(1+e^x)y' + e^x y = 0$

$$(1+e^x)y' = -e^x y$$

$$y' = -\frac{e^x}{e^x+1}y$$

Funkce $y \equiv 0$ je řešením. Dále předpokládáme $y \neq 0$.

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{e^x}{e^x+1}y$$

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{y} = -\int \frac{e^x}{1+e^x}\,\mathrm{d}x$$

$$\ln|y| = -\ln(1+e^x) + c$$

$$\ln\left[|y|\left(1+e^x\right)\right] = \ln e^c$$

$$|y|(1+e^x) = e^c$$

$$y(1+e^x) = K \qquad K = \pm e^c$$

$$y = \frac{K}{1+e^x} \qquad K \in \mathbb{R}$$

Vyřešeno.

Řešte rovnici $y' e^{x^2+y} = -\dfrac{x}{y}$

Řešte rovnici $y' e^{x^2+y} = -\frac{x}{y}$

$$y' e^{x^2} e^{y} = -x\frac{1}{y}$$

Exponenciální výraz e^{x^2+y} rozložíme na součin.

Řešte rovnici $\quad y' e^{x^2+y} = -\frac{x}{y}$

$$y' e^{x^2} e^{y} = -x \frac{1}{y}$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} e^{x^2} e^{y} = -x \frac{1}{y}$$

Dosadíme $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ za y'.

Řešte rovnici $\quad y' e^{x^2+y} = -\frac{x}{y}$

$$y' e^{x^2} e^{y} = -x\frac{1}{y}$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} e^{x^2} e^{y} = -x\frac{1}{y}$$

$$y e^{y}\,\mathrm{d}y = - \; x e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$$

Vynásobíme rovnici výrazem y a vydělíme e^{x^2} (což je ekvivalentní násobení výrazem e^{-x^2}).

Řešte rovnici $\quad y' e^{x^2+y} = -\frac{x}{y}$

$$y' e^{x^2} e^{y} = -x\frac{1}{y}$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} e^{x^2} e^{y} = -x\frac{1}{y}$$

$$\int y e^{y}\,\mathrm{d}y = -\int x e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$$

Doplníme integrály.

Řešte rovnici $\qquad y' e^{x^2+y} = -\frac{x}{y}$

$$y' e^{x^2} e^y = -x \frac{1}{y}$$

$$\frac{dy}{dx} e^{x^2} e^y = -x \frac{1}{y}$$

$$\int y e^y \, dy = -\int x e^{-x^2} \, dx$$

$$y e^y - e^y =$$

Na levé straně použijeme integraci per-partés:

$$\int y e^y \, dy \quad \boxed{\begin{array}{ll} u = y & u' = 1 \\ v' = e^y & v = e^y \end{array}} = y e^y - \int e^y \, dy = y e^y - e^y$$

Řešte rovnici $\quad y' e^{x^2+y} = -\frac{x}{y}$

$$y' e^{x^2} e^y = -x\frac{1}{y}$$

$$\frac{dy}{dx} e^{x^2} e^y = -x\frac{1}{y}$$

$$\int y e^y \, dy = -\int x e^{-x^2} \, dx$$

$$y e^y - e^y = \frac{1}{2} e^{-x^2} + C$$

Na pravé straně použijeme substituční metodu

$$-\int x e^{-x^2} \, dx \quad \boxed{\begin{aligned} -x^2 &= t \\ -2x\,dx &= dt \\ -x\,dx &= \frac{1}{2}\,dt \end{aligned}} \quad = \frac{1}{2}\int e^t \, dt = \frac{1}{2} e^t = \frac{1}{2} e^{-x^2}$$

Řešte rovnici $\quad y' e^{x^2+y} = -\dfrac{x}{y}$

$$y' e^{x^2} e^{y} = -x\frac{1}{y}$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} e^{x^2} e^{y} = -x\frac{1}{y}$$

$$\int y e^{y}\,\mathrm{d}y = -\int x e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$$

$$y e^{y} - e^{y} = \frac{1}{2} e^{-x^2} + C$$

$$2y e^{y} - 2e^{y} = e^{-x^2} + C \qquad C \in \mathbb{R}$$

Vynásobíme rovnici číslem 2. Řešení je nutno nechat v implicitním tvaru. Převod do explicitního tvaru není možný.

Řešte rovnici $\quad y' e^{x^2+y} = -\frac{x}{y}$

$$y' e^{x^2} e^{y} = -x\frac{1}{y}$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} e^{x^2} e^{y} = -x\frac{1}{y}$$

$$\int y e^{y}\,\mathrm{d}y = -\int x e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$$

$$y e^{y} - e^{y} = \frac{1}{2} e^{-x^2} + C$$

$$2y e^{y} - 2e^{y} = e^{-x^2} + C \qquad C \in \mathbb{R}$$

Vyřešeno.

3 Lineární diferenciální rovnice

Definice (lineární DR)**.** Nechť funkce a, b jsou spojité na intervalu I. Rovnice

$$y' + a(x)y = b(x) \tag{L}$$

se nazývá *obyčejná lineární diferenciální rovnice prvního řádu* (zkráceně píšeme LDR). Je-li navíc $b(x) \equiv 0$ na I, nazývá se rovnice (L) *homogenní*, v opačném případě *nehomogenní*.

Poznámka 5 (řešitelnost a jednoznačnost)**.** Jsou-li funkce a, b spojité na intervalu I, $x_0 \in I$ a $y_0 \in \mathbb{R}$ libovolné, má každá počáteční úloha (L)–(PP) právě jedno řešení definované na celém intervalu I.

Definice (homogenní rovnice). Buď dána rovnice (L). Homogenní rovnice, která vznikne z rovnice (L) nahrazením pravé strany nulovou funkcí, tj. rovnice

$$y' + a(x)y = 0 \tag{LH}$$

se nazývá *homogenní rovnice asociovaná s nehomogenní rovnicí* (L).

Poznámka 6 (triviální řešení)**.** Homogenní lineární diferenciální rovnice má vždy (bez ohledu na konkrétní tvar funkce $a(x)$) konstantní řešení $y = 0$, jak lze ověřit přímým dosazením. Toto řešení se nazývá *triviální řešení* a v praktických úlohách zpravidla nemívá žádný význam.

Poznámka 7 (operátorová symbolika)**.** Definujeme-li na množině všech funkcí diferencovatelných na intervalu I operátor $L[\cdot]$ vztahem

$$L[y](x) = y'(x) + a(x)y(x)$$

pro každé $x \in I$, je možno diferenciální rovnici (L) a k asociovanou homogenní rovnici zapsat v krátkém tvaru $L[y] = b(x)$ a $L[y] = 0$.

Poznámka 8 (linearita operátoru $L[\cdot]$)**.** Operátor $L[\cdot]$ splňuje pro všechna reálná čísla C_1, C_2 a všechny diferencovatelné funkce $y_1(x)$, $y_2(x)$ vztah

$$L[C_1y_1 + C_2y_2] = C_1L[y_1] + C_2L[y_2].$$

Vskutku:

$$\begin{aligned} L[C_1y_1 + C_2y_2](x) &= \Big(C_1y_1(x) + C_2y_2(x)\Big)' + a(x)\Big(C_1y_1(x) + C_2y_2(x)\Big) \\ &= C_1y_1'(x) + C_2y_2'(x) + a(x)C_1y_1(x) + a(x)C_2y_2(x) \\ &= C_1\Big(y_1'(x) + a(x)y_1(x)\Big) + C_2\Big(y_2'(x) + a(x)y_2(x)\Big) \\ &= C_1L[y_1](x) + C_2L[y_2](x). \end{aligned}$$

Věta 2 (princip superpozice)**.** Pro libovolné diferencovatelné funkce y, y_1 a y_2 a libovolné reálné číslo C platí

$$\begin{aligned}
L[y_1] = 0 \quad &\Rightarrow \quad L[C \cdot y_1] = C \cdot 0 = 0, \\
L[y_1] = 0 \text{ a } L[y_2] = f(x) \quad &\Rightarrow \quad L[C \cdot y_1 + y_2] = C \cdot 0 + f(x) = f(x), \\
L[y_1] = L[y_2] = f(x) \quad &\Rightarrow \quad L[y_1 - y_2] = f(x) - f(x) = 0,
\end{aligned}$$

Slovně:

> Všechna řešení homogenní lineární rovnice jsou násobky jednoho libovolného nenulového řešení této rovnice.
>
> Součet jednoho libovolného řešení zadané nehomogenní a obecného řešení asociované homogenní lineární rovnice je obecným řešením dané nehomogenní rovnice.

Stačí tedy najít dvě (do jisté míry speciální) řešení a z nich snadno sestavíme obecné řešení zadané rovnice.

$$y' = -a(x) \cdot y$$

U homogenní rovnice je derivace řešení rovna $-a(x)$ násobku tohoto řešení.

Homogenní LDR $\quad y' + a(x)y = 0.$

$$y' = -a(x) \cdot y$$

$$y = e^{-\int a(x)\,\mathrm{d}x},$$

$$\left(e^{f(x)}\right)' = e^{f(x)} \cdot f'(x)$$

Porovnáme-li rovnici s derivací složené funkce s exponenciální vnější složkou vidíme okamžitě jedno řešení.

Homogenní LDR $\quad y' + a(x)y = 0.$

$$y' = -a(x) \cdot y$$
$$y = C \cdot e^{-\int a(x)\,\mathrm{d}x}, \quad C \in \mathbb{R}$$

$$\left(e^{f(x)}\right)' = e^{f(x)} \cdot f'(x)$$

Všechna řešení jsou v souladu s principem superpozice násobky tohoto jednoho řešení.

Nehomogenní LDR $y' + a(x) \cdot y = b(x).$

- Řešme nehomogenní LDR.
- Je-li $y_P(x)$ partikulární řešení a $y_{OH}(x)$ je obecné řešení asociované homogenní LDR, je funkce

$$y(x, C) = y_P(x) + y_{OH}(x)$$

obecným řešením nehomogenní rovnice.

Nehomogenní LDR $y' + a(x) \cdot y = \cancel{b(x)}.$

Asociovaná hom. LDR $\boxed{y' + a(x)y = 0}$

Obecné řešení hom. LDR $\boxed{y_{OH}(x) = Ce^{-\int a(x)\,\mathrm{d}x} = C \cdot y_{PH(x)}}$

- Uvažujme nejprve asociovanou homogenní rovnici.
- Obecné řešení této rovnice již známe.

$$\boxed{\text{Nehomogenní LDR} \qquad y' + a(x)\cdot y = b(x).}$$

Asociovaná hom. LDR $\boxed{y' + a(x)y = 0}$

Obecné řešení hom. LDR $\boxed{y_{OH}(x) = Ce^{-\int a(x)\,\mathrm{d}x} = C \cdot y_{PH(x)}}$

$y_P(x) = K(x) \cdot y_{PH}(x)$

variace konstanty

- Nyní stačí najít alespoň jedno řešení rovnice nehomogenní.
- Nahradíme konstantu C v obecném řešení homogenní LDR zatím neznámou funkcí $K(x)$ a budeme hledat, za jakých podmínek je výsledná funkce řešením nehomogenní LDR.

Nehomogenní LDR $\boxed{y' + a(x) \cdot y = b(x).}$

Asociovaná hom. LDR $\boxed{y' + a(x)y = 0}$

Obecné řešení hom. LDR $\boxed{y_{OH}(x) = Ce^{-\int a(x)\,\mathrm{d}x} = C \cdot y_{PH(x)}}$

$$y_P(x) = K(x) \cdot y_{PH}(x)$$

$$y'_P(x) = K'(x) \cdot y_{PH}(x) + K(x) \cdot y'_{PH}(x)$$

- Musíme najít funkci $K(x)$.
- Pro dosazení do rovnice je nutné znát derivaci y'.
- Derivujeme jako součin podle vzorce $(uv)' = u' \cdot v + u \cdot v'$

Nehomogenní LDR $\quad y' + a(x)\cdot y = b(x).$

Asociovaná hom. LDR $\boxed{y' + a(x)y = 0}$

Obecné řešení hom. LDR $\boxed{y_{OH}(x) = Ce^{-\int a(x)\,\mathrm{d}x} = C\cdot y_{PH(x)}}$

$$y_P(x) = K(x)\cdot y_{PH}(x)$$

$$y_P'(x) = K'(x)\cdot y_{PH}(x) + K(x)\cdot y_{PH}'(x)$$

$$\overbrace{K'(x)y_{PH}(x) + K(x)y_{PH}'(x)}^{y'}$$

Dosadíme do rovnice.

$\boxed{\text{Nehomogenní LDR} \qquad y' + a(x)\cdot y = b(x).}$

Asociovaná hom. LDR $\boxed{y' + a(x)y = 0}$

Obecné řešení hom. LDR $\boxed{y_{OH}(x) = Ce^{-\int a(x)\,\mathrm{d}x} = C \cdot y_{PH(x)}}$

$$y_P(x) = K(x)\cdot y_{PH}(x)$$

$$y_P'(x) = K'(x)\cdot y_{PH}(x) + K(x)\cdot y_{PH}'(x)$$

$$\overbrace{K'(x)y_{PH}(x) + K(x)y_{PH}'(x)}^{y'} + a(x)\cdot \overbrace{K(x)y_{PH}(x)}^{y} = b(x)$$

Dosadíme do rovnice.

Nehomogenní LDR $y' + a(x)\cdot y = b(x).$

Asociovaná hom. LDR $\boxed{y' + a(x)y = 0}$

Obecné řešení hom. LDR $\boxed{y_{OH}(x) = Ce^{-\int a(x)\,\mathrm{d}x} = C\cdot y_{PH(x)}}$

$$y_P(x) = K(x)\cdot y_{PH}(x)$$

$$y_P'(x) = K'(x)\cdot y_{PH}(x) + K(x)\cdot y_{PH}'(x)$$

$$\overbrace{K'(x)y_{PH}(x) + K(x)y_{PH}'(x)}^{y'} + a(x)\cdot\overbrace{K(x)y_{PH}(x)}^{y} = b(x)$$

$$K'(x)y_{PH}(x) + K(x)\left[y_{PH}'(x) + a(x)y_{PH}(x)\right] = b(x)$$

Vytkneme na levé straně $K(x)$.

$\boxed{\text{Nehomogenní LDR} \qquad y' + a(x)\cdot y = b(x).}$

Asociovaná hom. LDR $\boxed{y' + a(x)y = 0}$

Obecné řešení hom. LDR $\boxed{y_{OH}(x) = Ce^{-\int a(x)\,\mathrm{d}x} = C\cdot y_{PH(x)}}$

$$y_P(x) = K(x)\cdot y_{PH}(x)$$

$$y_P'(x) = K'(x)\cdot y_{PH}(x) + K(x)\cdot y_{PH}'(x)$$

$$\overbrace{K'(x)y_{PH}(x) + K(x)y_{PH}'(x)}^{y'} + a(x)\cdot\overbrace{K(x)y_{PH}(x)}^{y} = b(x)$$

$$K'(x)y_{PH}(x) + K(x)\left[y_{PH}'(x) + a(x)y_{PH}(x)\right] = b(x)$$

$$K'(x)y_{PH}(x) = b(x)$$

Vyznačený výraz je roven nule.

Nehomogenní LDR $y' + a(x)\cdot y = b(x)$.

Asociovaná hom. LDR $\boxed{y' + a(x)y = 0}$

Obecné řešení hom. LDR $\boxed{y_{OH}(x) = Ce^{-\int a(x)\,\mathrm{d}x} = C\cdot y_{PH(x)}}$

$y_P(x) = K(x)\cdot y_{PH}(x)$

$y_P'(x) = K'(x)\cdot y_{PH}(x) + K(x)\cdot y_{PH}'(x)$

$$\overbrace{K'(x)y_{PH}(x) + K(x)y_{PH}'(x)}^{y'} + a(x)\cdot \overbrace{K(x)y_{PH}(x)}^{y} = b(x)$$

$$K'(x)y_{PH}(x) + K(x)\left[y_{PH}'(x) + a(x)y_{PH}(x)\right] = b(x)$$

$$K'(x)y_{PH}(x) = b(x)$$

$$K'(x) = \frac{b(x)}{y_{PH}(x)}$$

Dostali jsme rovnici, která neobsahuje funkci $K(x)$, ale jenom její derivaci $K'(x)$. Vyjádříme $K'(x)$.

Nehomogenní LDR $\boxed{y' + a(x)\cdot y = b(x).}$

Asociovaná hom. LDR $\boxed{y' + a(x)y = 0}$

Obecné řešení hom. LDR $\boxed{y_{OH}(x) = Ce^{-\int a(x)\,\mathrm{d}x} = C\cdot y_{PH(x)}}$

$$y_P(x) = K(x)\cdot y_{PH}(x)$$

$$y_P'(x) = K'(x)\cdot y_{PH}(x) + K(x)\cdot y_{PH}'(x)$$

$$\begin{aligned}
\overbrace{K'(x)y_{PH}(x) + K(x)y_{PH}'(x)}^{y'} + a(x)\cdot \overbrace{K(x)y_{PH}(x)}^{y} &= b(x)\\
K'(x)y_{PH}(x) + K(x)\left[y_{PH}'(x) + a(x)y_{PH}(x)\right] &= b(x)\\
K'(x)y_{PH}(x) &= b(x)\\
K\ (x) &= \int \frac{b(x)}{y_{PH}(x)}\,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

Integrací nalezneme $K(x)$. Integrační konstantu volíme libovolnou.

$\boxed{\text{Nehomogenní LDR} \qquad y' + a(x)\cdot y = b(x).}$

Asociovaná hom. LDR $\boxed{y' + a(x)y = 0}$

Obecné řešení hom. LDR $\boxed{y_{OH}(x) = Ce^{-\int a(x)\,\mathrm{d}x} = C\cdot y_{PH(x)}}$

$$y_P(x) = K(x)\cdot y_{PH}(x)$$

$$y_P'(x) = K'(x)\cdot y_{PH}(x) + K(x)\cdot y_{PH}'(x)$$

$$\overbrace{K'(x)y_{PH}(x) + K(x)y_{PH}'(x)}^{y'} + a(x)\cdot\overbrace{K(x)y_{PH}(x)}^{y} = b(x)$$

$$K'(x)y_{PH}(x) + K(x)\left[y_{PH}'(x) + a(x)y_{PH}(x)\right] = b(x)$$

$$K'(x)y_{PH}(x) = b(x)$$

$$K(x) = \int \frac{b(x)}{y_{PH}(x)}\,\mathrm{d}x$$

Zapomeneme nyní již nepodstatné informace.

Nehomogenní LDR $\boxed{y' + a(x) \cdot y = b(x).}$

Asociovaná hom. LDR $\boxed{y' + a(x)y = 0}$

Obecné řešení hom. LDR $\boxed{y_{OH}(x) = Ce^{-\int a(x)\,\mathrm{d}x} = C \cdot y_{PH(x)}}$

$$y_P(x) = K(x) \cdot y_{PH}(x)$$

$$K(x) = \int \frac{b(x)}{y_{PH}(x)}\,\mathrm{d}x$$

Zapomeneme nyní již nepodstatné informace.

Nehomogenní LDR $\quad y' + a(x)\cdot y = b(x).$

Asociovaná hom. LDR $\boxed{y' + a(x)y = 0}$

Obecné řešení hom. LDR $\boxed{y_{OH}(x) = Ce^{-\int a(x)\,\mathrm{d}x} = C\cdot y_{PH(x)}}$

$y_P(x) = K(x)\cdot y_{PH}(x)$

$$K(x) = \int \frac{b(x)}{y_{PH}(x)}\,\mathrm{d}x$$

$$y_P(x) = y_{PH}(x)\cdot\int \frac{b(x)}{y_{PH}(x)}\,\mathrm{d}x$$

Použijeme funkci $K(x)$ pro obdržení partikulárního řešení rovnice.

Nehomogenní LDR $\quad y' + a(x)\cdot y = b(x).$

Asociovaná hom. LDR $\boxed{y' + a(x)y = 0}$

Obecné řešení hom.

$$y_{OH}(x) = Ce^{-\int a(x)\,\mathrm{d}x} = C\cdot y_{PH(x)}$$

$$y_P(x) = K(x)\cdot y_{PH}(x)$$

$$K(x) = \int \frac{b(x)}{y_{PH}(x)}\,\mathrm{d}x$$

$$y_P(x) = y_{PH}(x)\cdot \int \frac{b(x)}{y_{PH}(x)}\,\mathrm{d}x$$

$$y(x) = y_P(x) + y_{OH}(x)$$

Sečteme partikulární řešení nehomogenní a obecné řešení homogenní rovnice a rovnice je vyřešena.

Řešení analytickou cestou:

Věta 3 (vzorec pro obecné řešení nehomogenní LDR)**.** Obecné řešení rovnice (L) je

$$y(x,C) = e^{-\int a(x)\,\mathrm{d}x}\left[\int b(x)e^{\int a(x)\,\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x + C\right], \quad C \in \mathbb{R}. \tag{8}$$

Přitom každý neurčitý integrál vyjadřuje jednu libovolnou z primitivních funkcí (integrační konstanty již neuvažujeme).

Řešte DR $\quad y' + \frac{2}{x} y = \frac{1}{x+1}$

Rovnice je lineární.

Řešte DR $y' + \frac{2}{x} y = \cancel{\frac{1}{x+1}}$

$$y' + \frac{2}{x}y = 0$$

- Uvažujme nejprve homogenní rovnici.
- Nahradíme pravou stranu rovnice nulou.

Řešte DR $y' + \frac{2}{x} y = \cancel{\frac{1}{x+1}}$

$$y' + \frac{2}{x} y = 0$$

$$y_{OH}(x) = K e^{-\int \frac{2}{x}\,\mathrm{d}x}$$

- Obecné řešení rovnice $y + a(x)y = 0$ je dáno formulkou $y = K e^{-\int a(x)\,\mathrm{d}x}$.
- V našem případě $a(x) = \frac{2}{x}$.

Řešte DR $y' + \frac{2}{x} y = \cancel{\frac{1}{x+1}}$

$$y' + \frac{2}{x} y = 0$$

$$y_{OH}(x) = K e^{-\int \frac{2}{x}\,\mathrm{d}x} = K e^{-2\ln|x|}$$

Integrujeme. . .

Řešte DR $\quad y' + \frac{2}{x}y = \cancel{\frac{1}{x+1}}$

$$y' + \frac{2}{x}y = 0$$

$$y_{OH}(x) = Ke^{-\int \frac{2}{x}\,\mathrm{d}x} = Ke^{-2\ln|x|} = Ke^{\ln x^{-2}}$$

…upravujeme …

Řešte DR $\quad y' + \frac{2}{x} y = \cancel{\frac{1}{x+1}}$

$$y_{OH}(x) = K x^{-2}$$

$$y' + \frac{2}{x} y = 0$$

$$y_{OH}(x) = K e^{-\int \frac{2}{x}\,\mathrm{d}x} = K e^{-2 \ln |x|} = K e^{\ln x^{-2}} = K x^{-2}$$

a upravujeme ještě více. Nezapomeňme že exponenciální a logaritmická funkce jsou navzájem inverzní a jejich složením dostaneme identitu.

Řešte DR $\quad y' + \dfrac{2}{x} y = \dfrac{1}{x+1}$

$$y_{OH}(x) = K x^{-2}$$

$$y_{PN}(x) = K(x) \cdot x^{-2}$$

- Nyní budeme hledat partikulární řešení nehomogenní rovnice.
- Nahradíme tedy konstantu v $y_{OH}(x)$ funkcí.

Řešte DR $y' + \frac{2}{x}y = \frac{1}{x+1}$

$y_{OH}(x) = Kx^{-2}$

$y_{PN}(x) = K(x) \cdot x^{-2}$

$y'_{PN} = K'(x)x^{-2} + (-2)K(x)x^{-3}$

- Najdeme derivaci $y'_{PN}(x)$.
- K tomu využijeme pravidlo pro derivaci součinu: $(uv)' = u'v + uv'$.

Řešte DR $y' + \frac{2}{x} y = \frac{1}{x+1}$

$y_{OH}(x) = Kx^{-2}$

$y_{PN}(x) = K(x) \cdot x^{-2}$

$y'_{PN} = K'(x)x^{-2} + (-2)K(x)x^{-3}$

$$\overbrace{K'(x)x^{-2} + (-2)K(x)x^{-3}}^{y'} + \frac{2}{x}\overbrace{K(x)x^{-2}}^{y} = \frac{1}{x+1}$$

Dosadíme do rovnice.

Řešte DR $\quad y' + \frac{2}{x} y = \frac{1}{x+1}$

$$y_{OH}(x) = K x^{-2}$$

$$y_{PN}(x) = K(x) \cdot x^{-2}$$

$$y'_{PN} = K'(x)x^{-2} + (-2)K(x)x^{-3}$$

$$\overbrace{K'(x)x^{-2} + (-2)K(x)x^{-3}}^{y'} + \frac{2}{x}\overbrace{K(x)x^{-2}}^{y} = \frac{1}{x+1}$$

$$K'(x) = \frac{x^2}{x+1}$$

- Nalezneme rovnici pro K'.
- Výrazy s K se podle očekávání odečtou.

  Skutečně: $(-2)Kx^{-3} + \frac{2}{x}Kx^{-2} = 0$.

Řešte DR $\quad y' + \frac{2}{x} y = \frac{1}{x+1}$

$$y_{OH}(x) = K x^{-2}$$

$$y_{PN}(x) = K(x) \cdot x^{-2}$$

$$y'_{PN} = K'(x)x^{-2} + (-2)K(x)x^{-3}$$

$$\overbrace{K'(x)x^{-2} + (-2)K(x)x^{-3}}^{y'} + \frac{2}{x}\overbrace{K(x)x^{-2}}^{y} = \frac{1}{x+1}$$

$$K'(x) = \frac{x^2}{x+1}$$

$$K'(x) = x - 1 + \frac{1}{x+1}$$

- Funkci K získáme jako libovolný integrál z K'.
- Před výpočtem integrálu musíme vydělit polynom v čitateli polynomem ve jmenovateli.

Řešte DR $y' + \dfrac{2}{x} y = \dfrac{1}{x+1}$

$y_{OH}(x) = K x^{-2}$

$y_{PN}(x) = K(x) \cdot x^{-2}$

$y'_{PN} = K'(x)x^{-2} + (-2)K(x)x^{-3}$

$$\overbrace{K'(x)x^{-2} + (-2)K(x)x^{-3}}^{y'} + \frac{2}{x}\overbrace{K(x)x^{-2}}^{y} = \frac{1}{x+1}$$

$$K'(x) = \frac{x^2}{x+1}$$

$$K'(x) = x - 1 + \frac{1}{x+1}$$

$$K(x) = \int x - 1 + \frac{1}{x+1}\,\mathrm{d}x$$

Integrujeme...

Řešte DR $\quad y' + \frac{2}{x} y = \frac{1}{x+1}$

$$y_{OH}(x) = K x^{-2}$$

$$y_{PN}(x) = K(x) \cdot x^{-2}$$

$$y'_{PN} = K'(x)x^{-2} + (-2)K(x)x^{-3}$$

$$\overbrace{K'(x)x^{-2} + (-2)K(x)x^{-3}}^{y'} + \frac{2}{x}\overbrace{K(x)x^{-2}}^{y} = \frac{1}{x+1}$$

$$K'(x) = \frac{x^2}{x+1}$$

$$K'(x) = x - 1 + \frac{1}{x+1}$$

$$K(x) = \int x - 1 + \frac{1}{x+1}\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{x^2}{2} - x + \ln|x+1|$$

…a dostáváme $K(x) = \frac{x^2}{2} + x + \ln|x+1|$.

Řešte DR $y' + \frac{2}{x} y = \frac{1}{x+1}$

$$y_{OH}(x) = K x^{-2}$$

$$y_{PN}(x) = K(x) \cdot x^{-2}$$

$$K(x)$$

$$= \frac{x^2}{2} - x + \ln|x+1|$$

Odstraníme nyní již nepotřebné výpočty.

Řešte DR $y' + \frac{2}{x} y = \frac{1}{x+1}$

$$y_{OH}(x) = K x^{-2}$$

$$y_{PN}(x) = K(x) \cdot x^{-2}$$

$$K(x) = \frac{x^2}{2} - x + \ln|x+1|$$

Známe funkci $K(x)$ a hledáme $y_{PN}(x)$.

Řešte DR $y' + \frac{2}{x} y = \frac{1}{x+1}$

$$y_{OH}(x) = K x^{-2}$$

$$y_{PN}(x) = K(x) \cdot x^{-2}$$

$$K(x) = \frac{x^2}{2} - x + \ln|x+1|$$

$$y_{PN}(x) = \left(\frac{x^2}{2} - x + \ln(x+1)\right) \cdot x^{-2}$$

Dosadíme $K(x)$...

Řešte DR $y' + \frac{2}{x} y = \frac{1}{x+1}$

$y_{OH}(x) = K x^{-2}$

$y_{PN}(x) = K(x) \cdot x^{-2}$

$$K(x) = \frac{x^2}{2} - x + \ln|x+1|$$

$$y_{PN}(x) = \left(\frac{x^2}{2} - x + \ln(x+1)\right) \cdot x^{-2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{x} + \frac{\ln(x+1)}{x^2}$$

...a upravíme

Řešte DR $\quad y' + \frac{2}{x} y = \frac{1}{x+1}$

$$y_{OH}(x) = K x^{-2}$$

$$y_{PN}(x) = K(x) \cdot x^{-2}$$

$$K(x) = \frac{x^2}{2} - x + \ln|x+1|$$

$$y_{PN}(x) = \left(\frac{x^2}{2} - x + \ln(x+1)\right) \cdot x^{-2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{x} + \frac{\ln(x+1)}{x^2}$$

$$y(x) = y_{OH}(x) + y_{PN}(x) = \frac{K}{x^2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{x} + \frac{\ln(x+1)}{x^2}$$

Sečteme partikulární řešení a řešení asociované homogení rovnice.

Řešte rovnici $y' = 1 + 3y \operatorname{tg} x$.

Problém je vyřešen.

Řešte rovnici $y' = 1 + 3y\operatorname{tg} x$.

$$y' - 3y\operatorname{tg} x = 1 \ldots \text{zadaná rovnice}$$

Převedeme rovnici do normovaného tvaru

$$y' - a(x)y = b(x).$$

Platí tedy $a(x) = -3\operatorname{tg} x$ a $b(x) = 1$.

Řešte rovnici $y' = 1 + 3y \operatorname{tg} x$.

$$y' - 3y \operatorname{tg} x = \cancel{1} \ldots \text{zadaná rovnice}$$

$$y' - 3y \operatorname{tg} x = 0 \ldots \text{asociovaná homogenní rovnice}$$

Sestavíme asociovanou homogenní rovnici. Nahradíme tedy pravou stranu nulou.

Řešte rovnici $y' = 1 + 3y \operatorname{tg} x$.

$$y' - 3y \operatorname{tg} x = 1 \dots \text{zadaná rovnice}$$
$$y' - 3y \operatorname{tg} x = 0 \dots \text{asociovaná homogenní rovnice}$$

$$y_{OH}(x) = Ce^{-\int -3 \operatorname{tg} x \, dx}$$

Obecné řešení rovnice

$$y' + a(x)y = 0$$

je dáno vzorcem $y = Ce^{-\int a(x)\,dx}$.

Řešte rovnici $y' = 1 + 3y\,\mathrm{tg}\,x$.

$$y' - 3y\,\mathrm{tg}\,x = 1 \ldots \text{zadaná rovnice}$$
$$y' - 3y\,\mathrm{tg}\,x = 0 \ldots \text{asociovaná homogenní rovnice}$$

$$y_{OH}(x) = Ce^{-\int -3\,\mathrm{tg}\,x\,\mathrm{d}x} = Ce^{-3\ln\cos x}$$

Vypočteme integrál:

$$\int -3\,\mathrm{tg}\,x\,\mathrm{d}x = \int 3\frac{-\sin x}{\cos x}\,\mathrm{d}x = 3\ln|\cos x|.$$

Přitom používáme vzorec $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x = \ln|f(x)|$. Dále budeme předpokládat, že pracujeme na intervalu kde platí $\cos x > 0$. Můžeme tedy vynechat absolutní hodnotu.

Řešte rovnici $y' = 1 + 3y \operatorname{tg} x$.

$$y' - 3y \operatorname{tg} x = 1 \ldots \text{zadaná rovnice}$$
$$y' - 3y \operatorname{tg} x = 0 \ldots \text{asociovaná homogenní rovnice}$$

$$y_{OH}(x) = Ce^{-\int -3 \operatorname{tg} x \, \mathrm{d}x} = Ce^{-3 \ln \cos x} = Ce^{\ln \cos^{-3} x}$$

Převedeme funkci na tvar, kdy vnitřní složka exponenciální funkce je logaritmus.

Řešte rovnici $y' = 1 + 3y \operatorname{tg} x$.

$$y' - 3y \operatorname{tg} x = 1 \ldots \text{zadaná rovnice}$$
$$y' - 3y \operatorname{tg} x = 0 \ldots \text{asociovaná homogenní rovnice}$$

$$y_{OH}(x) = Ce^{-\int -3 \operatorname{tg} x \,\mathrm{d}x} = Ce^{-3 \ln \cos x} = Ce^{\ln \cos^{-3} x} = C \cos^{-3} x$$

Funkce $\ln(x)$ a e^x jsou navzájem inverzní a jejich složení $e^{\ln x}$ je identita.

Řešte rovnici $y' = 1 + 3y \operatorname{tg} x$.

$$y' - 3y \operatorname{tg} x = 1 \dots \text{zadaná rovnice}$$
$$y' - 3y \operatorname{tg} x = 0 \dots \text{asociovaná homogenní rovnice}$$

$$y_{OH}(x) = Ce^{-\int -3 \operatorname{tg} x \, dx} = Ce^{-3 \ln \cos x} = Ce^{\ln \cos^{-3} x} = C \cos^{-3} x$$

$$y_{PN}(x) = K(x) \cos^{-3} x$$

- Nyní jsme našli obecné řešení asociované homogenní rovnice.
- Budeme hledat partikulární řešení nehomogenní rovnice. Konstantu v obecném řešení homogenní rovnice nahradíme funkcí $K(x)$.

Řešte rovnici $y' = 1 + 3y\operatorname{tg} x$.

$$y' - 3y\operatorname{tg} x = 1 \dots \text{zadaná rovnice}$$
$$y' - 3y\operatorname{tg} x = 0 \dots \text{asociovaná homogenní rovnice}$$

$$y_{OH}(x) = Ce^{-\int -3\operatorname{tg} x\,\mathrm{d}x} = Ce^{-3\ln\cos x} = Ce^{\ln\cos^{-3} x} = C\cos^{-3} x$$

$$y_{PN}(x) = K(x)\cos^{-3} x$$
$$y'_{PN}(x) = K'(x)\cos^{-3} x + K(x)(-3)\cos^{-4} x(-\sin x)$$

- Při výpočtu derivace $y'_{PN}(x)$ použijeme derivaci součinu $(uv)' = u'v + uv'$.
- Při derivování funkce $\cos^{-3} x$ postupujeme jako při derivaci složené funkce.

Řešte rovnici $y' = 1 + 3y \operatorname{tg} x$.

$$y' - 3y \operatorname{tg} x = 1 \ldots \text{zadaná rovnice}$$
$$y' - 3y \operatorname{tg} x = 0 \ldots \text{asociovaná homogenní rovnice}$$

$$y_{OH}(x) = Ce^{-\int -3 \operatorname{tg} x \, dx} = Ce^{-3 \ln \cos x} = Ce^{\ln \cos^{-3} x} = C \cos^{-3} x$$

$$y_{PN}(x) = K(x) \cos^{-3} x$$
$$y'_{PN}(x) = K'(x) \cos^{-3} x + K(x)(-3) \cos^{-4} x(-\sin x)$$

$$\overbrace{K'(x) \cos^{-3} x + K(x)(-3) \cos^{-4} x(-\sin x)}^{y'} - 3\overbrace{K(x) \cos^{-3} x}^{y} \operatorname{tg} x = 1$$

Dosadíme y a y' do zadané rovnice.

Řešte rovnici $y' = 1 + 3y \operatorname{tg} x$.

$y' - 3y \operatorname{tg} x = 1$ . . . zadaná rovnice

$y' - 3y \operatorname{tg} x = 0$ . . . asociovaná homogenní rovnice

$$y_{OH}(x) = Ce^{-\int -3 \operatorname{tg} x \, dx} = Ce^{-3 \ln \cos x} = Ce^{\ln \cos^{-3} x} = C \cos^{-3} x$$

$$y_{PN}(x) = K(x) \cos^{-3} x$$

$$y'_{PN}(x) = K'(x) \cos^{-3} x + K(x)(-3) \cos^{-4} x(-\sin x)$$

$$\overbrace{K'(x) \cos^{-3} x + K(x)(-3) \cos^{-4} x(-\sin x)}^{y'} - 3\overbrace{K(x) \cos^{-3} x}^{y} \operatorname{tg} x = 1$$

Vynecháme nyní již nepodstatné mezivýpočty.

Řešte rovnici $y' = 1 + 3y \operatorname{tg} x$.

Celkem: $y_{OH}(x) = C \cos^{-3} x$ $y_{PN}(x) = K(x) \cdot \cos^{-3}(x)$

$$\overbrace{K'(x)\cos^{-3} x + K(x)(-3)\cos^{-4} x(-\sin x)}^{y'} - 3\overbrace{K(x)\cos^{-3} x}^{y} \operatorname{tg} x = 1$$

$$K'(x)\cos^{-3} x = 1$$

Členy s $K(x)$ se vyruší. Vskutku,

$$K(x)(-3)\cos^{-4} x(-\sin x) - 3K(x)\cos^{-3} x \operatorname{tg} x = 0.$$

Takto dostáváme rovnici pro $K'(x)$.

Řešte rovnici $y' = 1 + 3y \operatorname{tg} x$.

Celkem: $y_{OH}(x) = C\cos^{-3} x \qquad y_{PN}(x) = K(x)\cdot\cos^{-3}(x)$

$$\overbrace{K'(x)\cos^{-3} x + K(x)(-3)\cos^{-4} x(-\sin x)}^{y'} - 3\overbrace{K(x)\cos^{-3} x}^{y} \operatorname{tg} x = 1$$

$$K'(x)\cos^{-3} x = 1$$

$$K'(x) = \cos^3 x$$

Vyřešíme rovnici vzhledem ke $K'(x)$.

Řešte rovnici $y' = 1 + 3y \operatorname{tg} x$.

Celkem: $y_{OH}(x) = C\cos^{-3} x$ $\qquad y_{PN}(x) = K(x)\cdot\cos^{-3}(x)$

$$\overbrace{K'(x)\cos^{-3} x + K(x)(-3)\cos^{-4} x(-\sin x)}^{y'} - 3\overbrace{K(x)\cos^{-3} x}^{y} \operatorname{tg} x = 1$$

$$K'(x)\cos^{-3} x = 1$$

$$K'(x) = \cos^3 x$$

$$K(x) = \int \cos^3 x \, \mathrm{d}x$$

Integrací $K'(x)$ získáme $K(x)$.

Řešte rovnici $y' = 1 + 3y \operatorname{tg} x$.

Celkem: $y_{OH}(x) = C\cos^{-3} x \qquad y_{PN}(x) = K(x)\cdot\cos^{-3}(x)$

$$\overbrace{K'(x)\cos^{-3} x + K(x)(-3)\cos^{-4} x(-\sin x)}^{y'} - 3\overbrace{K(x)\cos^{-3} x}^{y} \operatorname{tg} x = 1$$

$$K'(x)\cos^{-3} x = 1$$

$$K'(x) = \cos^3 x$$

$$K(x) = \int \cos^3 x \, \mathrm{d}x = \int (1-\sin^2 x)\cos x \, \mathrm{d}x$$

Lichou mocninu $\cos^3 x$ zapíšeme ve tvaru

$$\cos^3 x = \cos^2 x \cos x = (1-\sin^2 x)\cos x.$$

Řešte rovnici $y' = 1 + 3y \operatorname{tg} x$.

Celkem: $y_{OH}(x) = C\cos^{-3} x$ $\qquad y_{PN}(x) = K(x)\cdot\cos^{-3}(x)$

$$\overbrace{K'(x)\cos^{-3} x + K(x)(-3)\cos^{-4} x(-\sin x)}^{y'} - 3\overbrace{K(x)\cos^{-3} x}^{y} \operatorname{tg} x = 1$$

$$K'(x)\cos^{-3} x = 1$$

$$K'(x) = \cos^3 x$$

$$K(x) = \int \cos^3 x \,\mathrm{d}x = \int (1-\sin^2 x)\cos x \,\mathrm{d}x$$

$$= \sin x - \frac{\sin^3 x}{3}$$

Nyní je integrál předchystaný pro substituci $\sin x = t$, $\cos x\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t$. Tato substituce integrál převede na tvar

$$\int (1-t^2)\,\mathrm{d}t = t - \frac{t^3}{3} = \sin x - \frac{\sin^3 x}{3}.$$

Řešte rovnici $y' = 1 + 3y \operatorname{tg} x$.

Celkem: $y_{OH}(x) = C\cos^{-3} x$ $\qquad y_{PN}(x) = K(x) \cdot \cos^{-3}(x)$

$$\overbrace{K'(x)\cos^{-3} x + K(x)(-3)\cos^{-4} x(-\sin x)}^{y'} - 3\overbrace{K(x)\cos^{-3} x}^{y} \operatorname{tg} x = 1$$

$$K'(x)\cos^{-3} x = 1$$

$$K'(x) = \cos^3 x$$

$$K(x) = \int \cos^3 x \,\mathrm{d}x = \int (1 - \sin^2 x)\cos x \,\mathrm{d}x$$

$$= \sin x - \frac{\sin^3 x}{3}$$

$$y_{PN}(x) = \left(\sin x - \frac{\sin^3 x}{3}\right) \cdot \cos^{-3} x = \frac{\sin x}{\cos^3 x} - \frac{\sin^3 x}{3\cos^3 x}$$

Nalezenou funkci K použijeme ve tvaru partikulárního řešení y_{PN}.

Řešte rovnici $y' = 1 + 3y \operatorname{tg} x$.

Celkem: $y_{OH}(x) = C\cos^{-3} x$ $\qquad y_{PN}(x) = K(x) \cdot \cos^{-3}(x)$

$$\overbrace{K'(x)\cos^{-3} x + K(x)(-3)\cos^{-4} x(-\sin x)}^{y'} - 3\overbrace{K(x)\cos^{-3} x}^{y} \operatorname{tg} x = 1$$

$$K'(x)\cos^{-3} x = 1$$

$$K'(x) = \cos^3 x$$

$$K(x) = \int \cos^3 x \, dx = \int (1 - \sin^2 x)\cos x \, dx$$

Obecné řešení nehomogenní rovnice je součtem partikulárního řešení rovnice a obecného řešení asociované homogenní rovnice.

$$3$$

$$y_{PN}(x) = \left(\sin x - \frac{\sin^3 x}{3}\right) \cdot \cos^{-3} x = \frac{\sin x}{\cos^3 x} - \frac{\sin^3 x}{3\cos^3 x}$$

$$y_{GN}(x) = y_{OH}(x) + y_{PN}(x)$$

Řešte rovnici $y' = 1 + 3y \operatorname{tg} x$.

Celkem: $y_{OH}(x) = C\cos^{-3} x$ $\quad y_{PN}(x) = K(x)\cdot\cos^{-3}(x)$

$$\overbrace{K'(x)\cos^{-3} x + K(x)(-3)\cos^{-4} x(-\sin x)}^{y'} - \overbrace{3K(x)\cos^{-3} x}^{y} \operatorname{tg} x = 1$$

$$K'(x)\cos^{-3} x = 1$$

$$K'(x) = \cos^3 x$$

$$K(x) = \int \cos^3 x \,\mathrm{d}x = \int (1-\sin^2 x)\cos x \,\mathrm{d}x$$

Obě funkce y_{OH} a y_{PN} jsou vypočteny a stačí za ně dosadit.

$$3$$

$$y_{PN}(x) = \left(\sin x - \frac{\sin^3 x}{3}\right)\cdot\cos^{-3} x = \frac{\sin x}{\cos^3 x} - \frac{\sin^3 x}{3\cos^3 x}$$

$$y_{GN}(x) = y_{OH}(x) + y_{PN}(x) = \frac{C}{\cos^3 x} + \frac{\sin x}{\cos^3 x} - \frac{\sin^3 x}{3\cos^3 x}, \quad C \in \mathbb{R}$$

Řešte rovnici $y' = 1 + 3y \operatorname{tg} x$.

Celkem: $y_{OH}(x) = C\cos^{-3} x$ $\qquad$ $y_{PN}(x) = K(x)\cdot\cos^{-3}(x)$

$$\underbrace{K'(x)\cos^{-3} x + K(x)(-3)\cos^{-4} x(-\sin x)}_{y'} - 3\underbrace{K(x)\cos^{-3} x}_{y}\operatorname{tg} x = 1$$

$$K'(x)\cos^{-3} x = 1$$

$$K'(x) = \cos^3 x$$

$$K(x) = \int \cos^3 x\,\mathrm{d}x = \int (1-\sin^2 x)\cos x\,\mathrm{d}x$$

Vyřešeno.

3

$$y_{PN}(x) = \left(\sin x - \frac{\sin^3 x}{3}\right)\cdot\cos^{-3} x = \frac{\sin x}{\cos^3 x} - \frac{\sin^3 x}{3\cos^3 x}$$

$$y_{GN}(x) = y_{OH}(x) + y_{PN}(x) = \frac{C}{\cos^3 x} + \frac{\sin x}{\cos^3 x} - \frac{\sin^3 x}{3\cos^3 x}, \quad C \in \mathbb{R}$$

Řešte rovnici $xy' + y = x\ln(x+1)$

Řešte rovnici $xy' + y = x\ln(x+1)$

$$y' + \frac{1}{x}y = \ln(x+1)$$

- Převedeme rovnici na normovaný tvar $y' + a(x)y = b$.
- Vydělíme výrazem x. Budeme tedy hledat řešení buď na intervalu $(-1, 0)$ nebo $(0, \infty)$ (omezení $x > -1$ plyne z přítomnosti logaritmu).

Řešte rovnici $\quad xy' + y = x\ln(x+1)$

$$y' + \frac{1}{x}y = \cancel{\ln(x+1)} \qquad y' + \frac{1}{x}y = 0$$

Sestavíme asociovanou homogenní rovnici.

Řešte rovnici $\quad xy' + y = x\ln(x+1)$

$$y' + \frac{1}{x}y = \ln(x+1) \qquad y' + \frac{1}{x}y = 0$$

$$y_{OH} = Ce^{-\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x}$$

Obecné řešení asociované homogenní rovnice

$$y' + a(x)y = 0$$

je

$$y_{OH} = Ce^{-\int a(x)\,\mathrm{d}x}.$$

V našem případě platí $a(x) = \dfrac{1}{x}$.

Řešte rovnici $xy' + y = x\ln(x+1)$

$$y' + \frac{1}{x}y = \ln(x+1) \qquad y' + \frac{1}{x}y = 0$$

$$y_{OH} = Ce^{-\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x} = Ce^{-\ln|x|}$$

Vypočteme integrál.

Řešte rovnici $xy' + y = x\ln(x+1)$

$$y' + \frac{1}{x}y = \ln(x+1) \qquad y' + \frac{1}{x}y = 0$$

$$y_{OH} = Ce^{-\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x} = Ce^{-\ln|x|} = Ce^{\ln|x|^{-1}}$$

Upravíme.

Řešte rovnici $xy' + y = x\ln(x+1)$

$$y' + \frac{1}{x}y = \ln(x+1) \qquad y' + \frac{1}{x}y = 0$$

$$y_{OH} = Ce^{-\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x} = Ce^{-\ln|x|} = Ce^{\ln|x|^{-1}} = C|x|^{-1} = \frac{C}{|x|}$$

Složením funkcí $e^{\ln x}$ dostáváme identitu.

Řešte rovnici $\quad xy' + y = x\ln(x+1)$

$$y' + \frac{1}{x}y = \ln(x+1) \qquad\qquad y' + \frac{1}{x}y = 0$$

$$y_{OH} = Ce^{-\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x} = Ce^{-\ln|x|} = Ce^{\ln|x|^{-1}} = C|x|^{-1} = \frac{C}{|x|} = \frac{K}{x}$$

Zavedeme-li novou konstantu $C = \pm K$, můžeme psát řešení asociované homogenní rovnice ve tvaru $y_{OH} = \dfrac{K}{x}$

Řešte rovnici $xy' + y = x\ln(x+1)$

$$y' + \frac{1}{x}y = \ln(x+1) \qquad y' + \frac{1}{x}y = 0 \qquad y_{OH} = \frac{K}{x} = K \cdot \frac{1}{x}$$

$$y_{PN} = K(x)\frac{1}{x}$$

- Nyní budeme hledat řešení nehomogenní rovnice.
- Konstantu K ve vztahu pro y_{OH} nahradíme funkcí $K(x)$.

Řešte rovnici $xy' + y = x\ln(x+1)$

$$y' + \frac{1}{x}y = \ln(x+1) \qquad y' + \frac{1}{x}y = 0 \qquad y_{OH} = \frac{K}{x} = K\cdot\frac{1}{x}$$

$$y_{PN} = K(x)\frac{1}{x} \qquad y'_{PN} = K'(x)\frac{1}{x} + K(x)(-1)x^{-2}$$

Vypočteme derivaci funkce y_{PN}. Používáme přitom pravidlo pro derivaci součinu

$$(uv)' = u'v + uv'.$$

Funkci $\frac{1}{x}$ derivujeme jako mocninnou funkci

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = (x^{-1})' = (-1)x^{-2}.$$

Řešte rovnici $xy' + y = x\ln(x+1)$

$$y' + \frac{1}{x}y = \ln(x+1) \qquad y' + \frac{1}{x}y = 0 \qquad y_{OH} = \frac{K}{x} = K \cdot \frac{1}{x}$$

$$y_{PN} = K(x)\frac{1}{x} \qquad y'_{PN} = K'(x)\frac{1}{x} + K(x)(-1)x^{-2}$$

$$\overbrace{K'(x)\frac{1}{x} + K(x)(-1)x^{-2}}^{y'} + \frac{1}{x}\overbrace{K(x)\frac{1}{x}}^{y} = \ln(x+1)$$

Dosadíme y' a y do zadané rovnice

$$y' + \frac{1}{x}y = \ln(x+1).$$

Řešte rovnici $xy' + y = x\ln(x+1)$

$$y' + \frac{1}{x}y = \ln(x+1) \qquad y' + \frac{1}{x}y = 0 \qquad y_{OH} = \frac{K}{x} = K\cdot\frac{1}{x}$$

$$y_{PN} = K(x)\frac{1}{x} \qquad y'_{PN} = K'(x)\frac{1}{x} + K(x)(-1)x^{-2}$$

$$\overbrace{K'(x)\frac{1}{x} + K(x)(-1)x^{-2}}^{y'} + \frac{1}{x}\overbrace{K(x)\frac{1}{x}}^{y} = \ln(x+1)$$

$$K'(x)\frac{1}{x} = \ln(x+1)$$

Členy s $K(x)$ se zkrátí a zůstane pouze $K'(x)$.

Řešte rovnici $xy' + y = x\ln(x+1)$

$$y' + \frac{1}{x}y = \ln(x+1) \qquad y' + \frac{1}{x}y = 0 \qquad y_{OH} = \frac{K}{x} = K\cdot\frac{1}{x}$$

$$y_{PN} = K(x)\frac{1}{x} \qquad y'_{PN} = K'(x)\frac{1}{x} + K(x)(-1)x^{-2}$$

$$\overbrace{K'(x)\frac{1}{x} + K(x)(-1)x^{-2}}^{y'} + \frac{1}{x}\overbrace{K(x)\frac{1}{x}}^{y} = \ln(x+1)$$

$$K'(x)\frac{1}{x} = \ln(x+1) \qquad K'(x) = x\ln(x+1)$$

Vypočteme $K'(x)$.

Řešte rovnici $xy' + y = x\ln(x+1)$

$$y' + \frac{1}{x}y = \ln(x+1) \qquad y' + \frac{1}{x}y = 0 \qquad y_{OH} = \frac{K}{x} = K \cdot \frac{1}{x}$$

$$y_{PN} = K(x)\frac{1}{x} \qquad y'_{PN} = K'(x)\frac{1}{x} + K(x)(-1)x^{-2}$$

$$K(x) = \int x\ln(x+1)\,\mathrm{d}x$$

Zintegrujeme.

Řešte rovnici $\quad xy' + y = x\ln(x+1)$

$$y' + \frac{1}{x}y = \ln(x+1) \qquad y' + \frac{1}{x}y = 0 \qquad y_{OH} = \frac{K}{x} = K\cdot\frac{1}{x}$$

$$y_{PN} = K(x)\frac{1}{x} \qquad y'_{PN} = K'(x)\frac{1}{x} + K(x)(-1)x^{-2}$$

$$K(x) = \int x\ln(x+1)\,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2}\ln(x+1) - \frac{x^2}{4} + \frac{x}{2} - \frac{1}{2}\ln(x+1)$$

Integrujeme per-partés $\boxed{\begin{array}{ll} u = \ln(x+1) & u' = \dfrac{1}{x+1} \\ v' = x & v = \dfrac{x^2}{2} \end{array}}$.

$$\int x\ln(x+1)\,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2}\ln(x+1) - \frac{1}{2}\int\frac{x^2}{x+1}\,\mathrm{d}x$$
$$= \frac{x^2}{2}\ln(x+1) - \frac{1}{2}\int x - 1 + \frac{1}{x+1}\,\mathrm{d}x$$

Řešte rovnici $xy' + y = x\ln(x+1)$

$$y' + \frac{1}{x}y = \ln(x+1) \qquad y' + \frac{1}{x}y = 0 \qquad y_{OH} = \frac{K}{x} = K\cdot\frac{1}{x}$$

$$y_{PN} = K(x)\frac{1}{x} \qquad y'_{PN} = K'(x)\frac{1}{x} + K(x)(-1)x^{-2}$$

$$K(x) = \int x\ln(x+1)\,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2}\ln(x+1) - \frac{x^2}{4} + \frac{x}{2} - \frac{1}{2}\ln(x+1)$$

$$y_{PN}(x) = K(x)\frac{1}{x} = \frac{x}{2}\ln(x+1) - \frac{x}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2x}\ln(x+1)$$

Dosadíme za $K(x)$ do vztahu pro $y_{PN}(x)$

Řešte rovnici $xy' + y = x\ln(x+1)$

$$y' + \frac{1}{x}y = \ln(x+1) \qquad y' + \frac{1}{x}y = 0 \qquad y_{OH} = \frac{K}{x} = K\cdot\frac{1}{x}$$

$$y_{PN} = K(x)\frac{1}{x} \qquad y_{PN}' = K'(x)\frac{1}{x} + K(x)(-1)x^{-2}$$

$$K(x) = \int x\ln(x+1)\,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2}\ln(x+1) - \frac{x^2}{4} + \frac{x}{2} - \frac{1}{2}\ln(x+1)$$

$$y_{PN}(x) = K(x)\frac{1}{x} = \frac{x}{2}\ln(x+1) - \frac{x}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2x}\ln(x+1)$$

$$y_{GN} = y_{OH} + y_{PN}$$

Obecné řešení nehomogenní rovnice je součtem partikulárního řešení rovnice a obecného řešení asociované homogenní rovnice.

Řešte rovnici $\quad xy' + y = x\ln(x+1)$

$$y' + \frac{1}{x}y = \ln(x+1) \qquad y' + \frac{1}{x}y = 0 \qquad y_{OH} = \frac{K}{x} = K \cdot \frac{1}{x}$$

$$y_{PN} = K(x)\frac{1}{x} \qquad y'_{PN} = K'(x)\frac{1}{x} + K(x)(-1)x^{-2}$$

$$K(x) = \int x\ln(x+1)\,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2}\ln(x+1) - \frac{x^2}{4} + \frac{x}{2} - \frac{1}{2}\ln(x+1)$$

$$y_{PN}(x) = K(\quad \frac{x}{2}\ln(x+1) - \frac{x}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2x}\ln(x+1)$$

$$y_{GN} = y_{OH} + y_{PN} = \frac{K}{x} + \frac{x}{2}\ln(x+1) - \frac{x}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2x}\ln(x+1), \qquad K \in \mathbb{R}$$

Dáme dohromady potřebné mezivýpočty.

Řešte rovnici $xy' + y = x\ln(x+1)$

$$y' + \frac{1}{x}y = \ln(x+1) \qquad y' + \frac{1}{x}y = 0 \qquad y_{OH} = \frac{K}{x} = K \cdot \frac{1}{x}$$

$$y_{PN} = K(x)\frac{1}{x} \qquad y'_{PN} = K'(x)\frac{1}{x} + K(x)(-1)x^{-2}$$

$$K(x) = \int x\ln(x+1)\,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2}\ln(x+1) - \frac{x^2}{4} + \frac{x}{2} - \frac{1}{2}\ln(x+1)$$

$$y_{PN}(x) = K(x)\frac{1}{x} = \frac{x}{2}\ln(x+1) - \frac{x}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2x}\ln(x+1)$$

$$y_{GN} = y_{OH} + y_{PN} = \frac{K}{x} + \frac{x}{2}\ln(x+1) - \frac{x}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2x}\ln(x+1)\,, \qquad K \in \mathbb{R}$$

Vyřešeno.

4 Homogenní diferenciální rovnice

Definice (homogenní DR)**.** Nechť f je spojitá funkce. Diferenciální rovnice

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right) \tag{H}$$

se nazývá *homogenní diferenciální rovnice*.

Zavedeme-li novou funkci u vztahem $u(x) = \dfrac{y(x)}{x}$, získáme

$$y(x) = u(x)x, \qquad y'(x) = u'(x)x + u(x). \tag{9}$$

Po dosazení do (H) dostáváme

$$u'x + u = f(u), \tag{10}$$

což je ekvivalentní rovnici se separovanými proměnnými

$$u' = \big(f(u) - u\big)\frac{1}{x}.$$

5 Exaktní diferenciální rovnice

Definice (exaktní DR)**.** Nechť $P(x,y)$ a $Q(x,y)$ jsou funkce dvou proměnných, které mají spojité parciální derivace. Řekneme, že diferenciální rovnice

$$P(x,y) + Q(x,y)y' = 0 \tag{E}$$

je *exaktní*, jestliže výraz

$$P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y \tag{T}$$

je totálním diferenciálem nějaké funkce dvou proměnných.

Poznámka 9 (ekvivalentní tvar exaktní DR)**.** Exaktní diferenciální rovnici častěji uvádíme v ekvivalentním tvaru pomocí diferenciálu kmenové funkce

$$P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y = 0. \tag{E}$$

Poznámka 10. Rovnice (E) je tedy exaktní právě tehdy, když existuje funkce $F(x,y)$ proměnných x a y s vlastnostmi

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = P(x,y) \quad \text{a} \quad \frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = Q(x,y). \tag{11}$$

Věta 4 (řešení exaktní DR). Nechť $F(x,y)$ je kmenová funkce totálního diferenciálu (T). Rovnice (E) má obecné řešení implicitně určené rovnicí

$$F(x,y) = C, \qquad C \in \mathbb{R}. \tag{12}$$

Věta 5 (charakterizace totálního diferenciálu). Nechť funkce $P(x,y)$ a $Q(x,y)$ mají spojité parciální derivace na otevřené souvislé množině $M \subseteq \mathbb{R}^2$. Výraz (T) je na množině M totálním diferenciálem nějaké funkce právě tehdy, když na M platí

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}. \tag{13}$$

KONEC.