Diferenciální rovnice a dynamické modely

Robert Mařík

31. srpna 2009

G. Galilei: Velkou knihu přírody mohou číst jen ti, kteří znají jazyk, jímž je tato kniha napsána. A tímto jazykem je **matematika**.

A. Turing: Věda je **diferenciální rovnice**. Náboženství je hraniční podmínka.

A. N. Whitehead: Není běžnějšího omylu než věřit, že když provedeme dlouhé a přesné matematické výpočty, je pak aplikace výsledku na nějaký fakt v přírodě absolutně jistá.

Rosenblueth & Wiener: Nejlepším modelem kočky je zase kočka, pokud možno ta samá.

Obsah

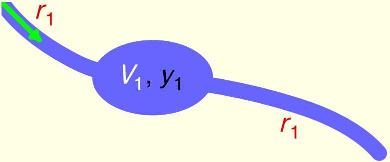
1 Motivace

Růst populace

Nechť veličina y udává velikost určité populace v čase x. Potom veličina y' udává rychlost změny této populace.

- Populací rozumíme v širším slova smyslu soubor objektů či jedinců, vykazujících určitou společnou vlastnost.
- Rychlostí změny rozumíme počet nových jedinců snížený o počet uhynulých či jinak odstraněných jedinců za jednotku času.
  - Kladná rychlost $\longrightarrow$ velikost populace roste
  - Záporná rychlost $\longrightarrow$ velikost populace klesá

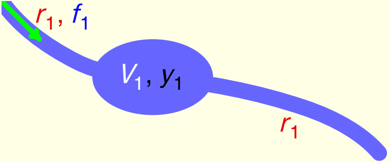
Rovnice samočištění jezer



$$y_1' = -\frac{r_1}{V_1} y_1$$

- V jezeře je znečištěná voda objemu V_1[m^3], intenzita znečištění je y_1[kg]. y_1' je rychlost vyplavování nečistot – množství nečistot[kg], které jsou za časovou jednotku vyplaveny z jezera.
- Do jezera vtéká čistá voda rychlostí r_1 a vytéká i s nečistotami toutéž rychlostí.
- Koncentrace nečistot je $\frac{y_1}{V_1}$[kg/m^{-3}] a za každou časovou jednotku z jezera vyteče r_1m^3 vody, které obsahují $\frac{y_1 \cdot r_1}{V_1}$ kg nečistot.

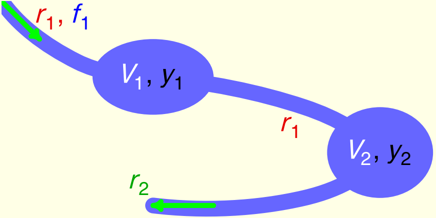
Rovnice samočištění jezer



$$y_1' = -\frac{r_1}{V_1} y_1 + f_1$$

Modifikace předchozí úlohy – předpokládejme navíc, že nečistoty jsou i v přítoku do jezera a f_1 je množství (v kg) nečistot, které se za časovou jednotku dostanou do jezera v přitékající vodě.

Rovnice samočištění jezer

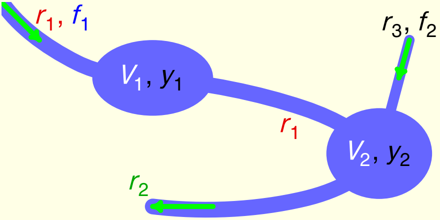


$$y_1' = -\frac{r_1}{V_1}y_1 + f_1$$

$$y_2' = \frac{r_1}{V_1}y_1 - \frac{r_2}{V_2}y_2$$

Další modifikace předchozí úlohy – předpokládáme, že voda teče do druhého jezera o objemu V_2, v němž je intenzita znečištění y_2 a vytéká rychlostí $r_2 = r_1$.

Rovnice samočištění jezer

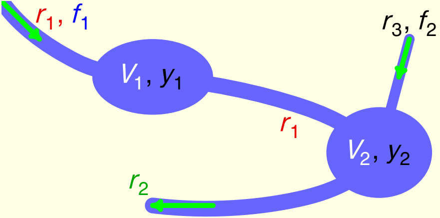


$$y_1' = -\frac{r_1}{V_1} y_1 + f_1$$

$$y_2' = \frac{r_1}{V_1} y_1 - \frac{r_2}{V_2} y_2 + f_2$$

Má-li druhé jezero **ještě jeden přítok**, o velikosti r_3, který je znečištěný tak, že nečistoty přibývají rychlostí f_2, objeví se v rovnicích další člen.
V tomto případě navíc platí $r_2 = r_1 + r_3$.

Rovnice samočištění jezer



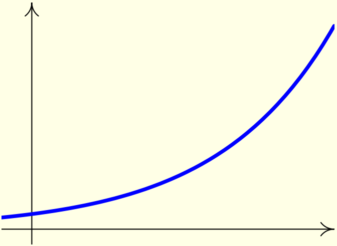
$$y_1' = -\frac{r_1}{V_1} y_1 + f_1$$

$$y_2' = \frac{r_1}{V_1} y_1 - \frac{r_2}{V_2} y_2 + f_2$$

- Podobným způsobem je možno sestavit model větší soustavy jezer – například velkých kanadských jezer.
- Jako řešení modelu získáme informaci o tom, jak rychle nečistoty protékají jezerním systémem.

Malthusův růst (exponenciální)

$$\boxed{y' = ry} \qquad y(0) = y_0$$



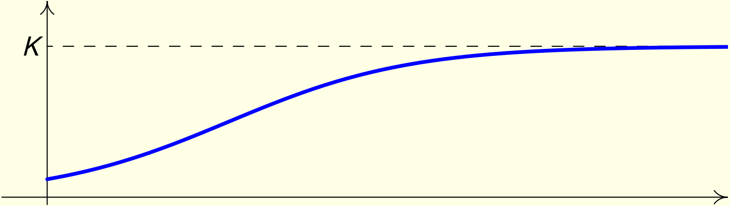
- Velikost populace stále roste.
- Předpoklad: Rychlost růstu je přímo úměrná velikosti populace (specifická míra růstu je konstantní)
- $y(0) = y_0$ je počáteční podmínka.
- Řešením je exponenciální funkce $y = K \cdot e^{rx}$.

Model není realistický pro velká y. Růst populace nad přijatelnou mez způsobí destrukci životního prostředí.

Verhulst–Pearlův růst (logistický)

$$\boxed{y' = r\left(1 - \frac{y}{K}\right)y} \qquad y(0) = y_0$$

- Velikost populace roste pro $y < K$ a klesá pro $y > K$.
- Specifiká míra růstu lineárně klesá s velikostí populace.
- Řešením je logistická křivka.



r: invazní parametr K: nosná kapacita prostředí

Verhulst–Pearlův růst (logistický)

$$\boxed{y' = r\left(1 - \frac{y}{K}\right)y} \qquad y(0) = y_0$$

Při vnějších změnách prostředí se druh s těmito změnami musí vyrovnat

- r-strategie
- K-strategie

Verhulst–Pearlův růst (logistický)

$$\boxed{y' = r\left(1 - \frac{y}{K}\right)y} \qquad y(0) = y_0$$

Rovnice sociální difúze (rovnice "šíření drbů")

$$y' = ay(M - y)$$

Podobně

- Šíření epidemií (Kermack+Mc Kendrik – 1927)
- Šíření vzorců chování (evoluční hra "jestřáb×holubice")
- Ostrovní ekologie – kolonizace ostrova živ. druhy z pevniny (Mac Arthur+Wilson – 60. léta 20. stol)

Verhulst–Pearlův růst (logistický)

$$\boxed{y' = r\left(1 - \frac{y}{K}\right)y} \qquad y(0) = y_0$$

Verhulst–Pearlův růst s lovem intenzity h

$$\boxed{y' = r\left(1 - \frac{y}{K}\right)y - h} \qquad y(0) = y_0$$

h: intenzita lovu
Problém: Jak nastavit parametry systému tak, aby h bylo trvale co největší a aby nedošlo ke zdecimování populace?

Verhulst–Pearlův růst (logistický)

$$\boxed{y' = r\left(1 - \frac{y}{K}\right)y} \qquad y(0) = y_0$$

Verhulst–Pearlův růst s lovem intenzity *h*

$$\boxed{y' = r\left(1 - \frac{y}{K}\right)y - h} \qquad y(0) = y_0$$

Verhulst–Pearlův růst s konkurencí mezi dvěma populacemi

$$\begin{aligned} y_1' &= r_1\left(1 - \frac{y_1}{K_1}\right)y_1 - ay_1y_2 \\ y_2' &= r_2\left(1 - \frac{y_2}{K_2}\right)y_2 - by_1y_2 \end{aligned}$$

2 Diferenciální rovnice.

Diferenciální rovnice jsou vztahy mezi neznámou funkcí a její derivací (jejími derivacemi). Např.

$$y' + xy\ln(1 - y^2) = 4$$

je diferenciální rovnice prvního řádu (obsahuje jenom první derivaci), rovnice

$$y'' + 2y' - 4y = \sin x$$

je diferenciální rovnice druhého řádu. Nejednodušším diferenciálními rovnicemi jsou rovnice typu $y' = f(x)$. Například řešením rovnice

$$y' = x$$

je každá funkce tvaru

$$y = \frac{x^2}{2} + C,$$

kde C je libovolná reálná konstanta.

Fyzikální popis problému:

scénář vývoje + počáteční stav → budoucí stav systému

"Scénářem vývoje" je zpravidla nějaký fyzikální zákon. Většinou tvrzení tvaru "změna jedné veličiny vyvolává odpovídající změnu veličiny jiné", nebo "působení jedné veličiny vyvolává odpovídající změnu jiné veličiny".

- Časová změna hybnosti tělesa je rovna výsledné působící síle (druhý Newtonův pohybový zákon). $F = m \cdot \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$
- Velikost indukovaného proudu v cívce je přímo úměrná časové změně indukčního toku cívkou (Faradayův indukční zákon).

Matematický popis:

diferenciální rovnice + počáteční podmínka → řešení rovnice

3 Diferenciální rovnice prvního řádu

Definice (obyčejná diferenciální rovnice). *Obyčejnou diferenciální rovnicí prvního řádu rozřešenou vzhledem k derivaci* (stručně - diferenciální rovnicí (ODR)) s neznámou y rozumíme rovnici tvaru

$$y' = f(x, y) \tag{1}$$

kde f je funkce dvou proměnných. *Řešením* (též *integrálem*) rovnice na intervalu I rozumíme každou funkci $y = y(x)$, která splňuje identicky (1) na I.

Daná diferenciální rovnice má zpravidla nekonečně mnoho řešení Například řešením rovnice

$$\boxed{y' = y}$$

je nejen funkce $y = e^x$, ale i např. funkce $y = C \cdot e^x$, kde $C \in \mathbb{R}$.

Definice (počáteční podmínka, počáteční úloha). Úloha najít řešení rovnice (1), které splňuje zadanou *počáteční podmínku*

$$y(x_0) = y_0 \tag{2}$$

se nazývá *počáteční Cauchyova úloha*. Jejím řešením rozumíme funkci, která splňuje podmínku (2) a je na nějakém intervalu obsahujícím bod x_0 řešením rovnice (1).

Řešení Cauchyovy úlohy nazýváme též *partikulárním řešením rovnice (1)*. Graf partikulárního řešení se nazývá *integrální křivka*.

- Má daná rovnice (počáteční úloha) řešení?
- Na jakém intervalu je toto řešení definováno?
- Je toto řešení určeno jednoznačně?
- Lze toto řešení nalézt analytickou cestou? (pomocí integrálního počtu)?

Nejjednodušším příkladem diferenciální rovnice je rovnice tvaru

$$y' = f(x). \tag{3}$$

Řešením rovnice (3) je funkce

$$y = \int f(x)\,\mathrm{d}x + C,$$

kde C je libovolná konstanta. Takovýto vztah, popisující všechna řešení, nazýváme *obecné řešení rovnice*. Libovolné partikulární řešení získáme z obecného řešení vhodnou volbou konstanty.

Poznámka 1 (obecné a partikulární řešení)**.** Podobný princip platí i u dalších diferenciálních rovnic. Funkcí které vyhovují diferenciální rovnici prvního řádu je nekonečně mnoho, zapíšeme-li všechny jedním vzorcem, bude tento vzorec obsahovat jistou konstantu C. Takový vzorec se nazývá *obecné řešení diferenciální rovnice*. Každé jednotlivé (partikulární) řešení lze z tohoto vzorce obdržet[1] vhodnou volbou konstanty C.

---

[1] i z tohoto pravidla však existují výjimky, :)

Definice (ODR se separovanými proměnnými)**.** ODR tvaru

$$y' = f(x)g(y), \tag{4}$$

kde f a g jsou spojité funkce na otevřených intervalech nazýváme *obyčejnou diferenciální rovnicí se separovanými proměnnými.*

Počáteční úloha pro rovnici se separovanými proměnnými nemusí mít vždy jediné řešení. Existují dokonce řešení, které mají porušenu jednoznačnost v každém bodě svého definičního oboru. Tato řešení se nazývají *singulární*.

Najděte funkci splňující $\boxed{y' = y \cos x}$ a podmínku $\boxed{y(0) = 0.1}$

Rovnice může sloužit jako jednoduchý model sezónní populace – specifická míra růstu, funkce $\cos x$, se periodicky mění s časem.

Najděte funkci splňující $\boxed{y' = y\cos x}$ a podmínku $\boxed{y(0) = 0.1}$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y \cdot \cos x$$

Přepíšeme derivaci y' jako podíl $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$

Najděte funkci splňující $\boxed{y' = y\cos x}$ a podmínku $\boxed{y(0) = 0.1}$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y \cdot \cos x$$

$$\frac{1}{y}\,\mathrm{d}y = \cos x\,\mathrm{d}x$$

Násobením převedeme proměnnou y na jednu a proměnnou x na druhou stranu. Podle předpokladů je alespoň v nějakém okolí bodu $x = 0$ funkce y nenulová.

Najděte funkci splňující $\boxed{y' = y\cos x}$ a podmínku $\boxed{y(0) = 0.1}$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y \cdot \cos x$$
$$\int \frac{1}{y}\,\mathrm{d}y = \int \cos x\,\mathrm{d}x$$

Připíšeme integrály na obě strany rovnice, vlevo je tedy integrál v proměnné y a vpravo integrál v proměnné x.

Najděte funkci splňující $\boxed{y' = y\cos x}$ a podmínku $\boxed{y(0) = 0.1}$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y \cdot \cos x$$
$$\int \frac{1}{y}\,\mathrm{d}y = \int \cos x\,\mathrm{d}x$$
$$\ln y = \sin x + C$$

- Vypočteme integrály. Podle předpokladů je funkce y kladná (alespoň v nějakém okolí bodu $x = 0$). Integrační konstantu stačí uvažovat pouze jednu.
- Dostáváme rovnici, která popisuje **všechny** funkce, splňující rovnici $y' = y \cdot \cos x$.

Najděte funkci splňující $\boxed{y' = y\cos x}$ a podmínku $\boxed{y(0) = 0.1}$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y \cdot \cos x$$

$$\int \frac{1}{y}\,\mathrm{d}y = \int \cos x\,\mathrm{d}x$$

$$\ln y = \sin x + C$$

$$\ln 0.1 = \sin 0 + C$$

Dosadíme z počáteční podmínky a určíme velikost integrační konstanty.

Najděte funkci splňující $\boxed{y' = y\cos x}$ a podmínku $\boxed{y(0) = 0.1}$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y \cdot \cos x$$
$$\int \frac{1}{y}\,\mathrm{d}y = \int \cos x\,\mathrm{d}x$$
$$\ln y = \sin x + C$$
$$\ln 0.1 = \sin 0 + C$$
$$C = \ln 0.1$$

Vypočteme C.

Najděte funkci splňující $\boxed{y' = y\cos x}$ a podmínku $\boxed{y(0) = 0.1}$

$$\frac{dy}{dx} = y \cdot \cos x$$

$$\int \frac{1}{y}\, dy = \int \cos x\, dx$$

$$\ln y = \sin x + C$$

$$\ln 0.1 = \sin 0 + C$$

$$C = \ln 0.1$$

$$\ln y = \sin x + \ln 0.1$$

Dosadíme do rovnice popisující **všechna řešení** a obdržíme řešení úlohy. Toto řešení je v implicitním tvaru a ještě se jej pokusíme převést do tvaru explicitního.

Najděte funkci splňující $\boxed{y' = y\cos x}$ a podmínku $\boxed{y(0) = 0.1}$

$$\frac{dy}{dx} = y \cdot \cos x$$
$$\int \frac{1}{y}\,dy = \int \cos x\,dx$$
$$\ln y = \sin x + C$$
$$\ln 0.1 = \sin 0 + C$$
$$C = \ln 0.1$$
$$\ln y = \sin x + \ln 0.1$$

$$\ln y - \ln 0.1 = \sin x$$

Převedeme logaritmy na jednu stranu.

Najděte funkci splňující $\boxed{y' = y\cos x}$ a podmínku $\boxed{y(0) = 0.1}$

$$\frac{dy}{dx} = y \cdot \cos x$$
$$\int \frac{1}{y}\, dy = \int \cos x \, dx$$
$$\ln y = \sin x + C$$
$$\ln 0.1 = \sin 0 + C$$
$$C = \ln 0.1$$
$$\ln y = \sin x + \ln 0.1$$

$$\ln y - \ln 0.1 = \sin x$$
$$\ln \frac{y}{0.1} = \sin x$$

Sloučíme logaritmy.

Najděte funkci splňující $\boxed{y' = y\cos x}$ a podmínku $\boxed{y(0) = 0.1}$

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= y \cdot \cos x\\ \int \frac{1}{y}\,\mathrm{d}y &= \int \cos x\,\mathrm{d}x\\ \ln y &= \sin x + C\\ \ln 0.1 &= \sin 0 + C\\ C &= \ln 0.1\\ \ln y &= \sin x + \ln 0.1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\ln y - \ln 0.1 &= \sin x\\ \ln \frac{y}{0.1} &= \sin x\\ \frac{y}{0.1} &= e^{\sin x}\end{aligned}$$

Odlogaritmujeme pomocí inverzní funkce k logaritmu – pomocí exponenciální funkce.

Najděte funkci splňující $\boxed{y' = y\cos x}$ a podmínku $\boxed{y(0) = 0.1}$

$$\frac{dy}{dx} = y \cdot \cos x$$
$$\int \frac{1}{y}\,dy = \int \cos x\,dx$$
$$\ln y = \sin x + C$$
$$\ln 0.1 = \sin 0 + C$$
$$C = \ln 0.1$$
$$\ln y = \sin x + \ln 0.1$$

$$\ln y - \ln 0.1 = \sin x$$
$$\ln \frac{y}{0.1} = \sin x$$
$$\frac{y}{0.1} = e^{\sin x}$$
$$y = 0.1 \cdot e^{\sin x}$$

Vypočteme y. Tato funkce představuje řešení naší úlohy.

Najděte funkci splňující $\boxed{y' = y\cos x}$ a podmínku $\boxed{y(0) = 0.1}$

$$\frac{dy}{dx} = y \cdot \cos x$$

$$\int \frac{1}{y}\, dy = \int \cos x\, dx$$

$$\ln y = \sin x + C$$

$$\ln 0.1 = \sin 0 + C$$

$$C = \ln 0.1$$

$$\ln y = \sin x + \ln 0.1$$

$$\ln y - \ln 0.1 = \sin x$$

$$\ln \frac{y}{0.1} = \sin x$$

$$\frac{y}{0.1} = e^{\sin x}$$

$$y = 0.1 \cdot e^{\sin x}$$

Názvosloví:

$\boxed{\text{diferenciální rovnice}}$ + $\boxed{\text{počáteční podmínka}}$ = *počáteční úloha*,

obecné řešení, partikulární řešení (řešení počáteční úlohy)

Diferenciální rovnice se separovanými proměnnými

$$y' = f(x)g(y)$$

Diferenciální rovnice se separovanými proměnnými je rovnice, jejíž pravá strana se dá vyjádřit jako součin funkce proměnné x a funkce proměnné y. Například rovnice

$$y' = x^2(1+y)$$

má tuto vlastnost, zatímco rovnice

$$y' = x^2 + y$$

ne.

Diferenciální rovnice se separovanými proměnnými

$$y' = f(x)g(y)$$

Konstantními řešeními jsou funkce typu $y = y_i$, kde y_i je číslo vyhovující rovnici $g(y_i) = 0$.

Nejprve hledejme konstantní řešení. Protože derivace konstanty je nula, budou tato konstantní řešení produkovat nulu na levé i na pravé straně rovnice. Například konstantní řešení rovnice

$$y' = x \cdot (1 - y)y$$

jsou funkce $y(x) = 0$ a $y(x) = 1$.

Diferenciální rovnice se separovanými proměnnými

$$y' = f(x)g(y)$$

Konstantními řešeními jsou funkce typu $y = y_i$, kde y_i je číslo vyhovující rovnici $g(y_i) = 0$. Dále hledáme nekonstantní řešení.

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x)g(y)$$

Přepíšeme derivaci y' jako podíl $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$

Diferenciální rovnice se separovanými proměnnými

$$y' = f(x)g(y)$$

Konstantními řešeními jsou funkce typu $y = y_i$, kde y_i je číslo vyhovující rovnici $g(y_i) = 0$. Dále hledáme nekonstantní řešení.

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x)g(y)$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{g(y)} = f(x)\,\mathrm{d}x$$

Násobením a dělením převedeme výrazy s jednou proměnnou na jednu stranu a výrazy s druhou proměnnou na stranu druhou.

Diferenciální rovnice se separovanými proměnnými

$$y' = f(x)g(y)$$

Konstantními řešeními jsou funkce typu $y = y_i$, kde y_i je číslo vyhovující rovnici $g(y_i) = 0$. Dále hledáme nekonstantní řešení.

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x)g(y)$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{g(y)} = f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{g(y)} = \int f(x)\,\mathrm{d}x + C$$

Zintegrujeme obě strany a po výpočtu integrálů na jedné straně budeme uvažovat integrační konstantu, která může nabývat libovolné reálné hodnoty. Obdrželi jsme obecné řešení rovnice.

Diferenciální rovnice se separovanými proměnnými

$$y' = f(x)g(y)$$

Konstantními řešeními jsou funkce typu $y = y_i$, kde y_i je číslo vyhovující rovnici $g(y_i) = 0$. Dále hledáme nekonstantní řešení.

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x)g(y)$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{g(y)} = f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{g(y)} = \int f(x)\,\mathrm{d}x + C$$

Je-li zadána počáteční podmínka, dosadíme a určíme partikulární řešení podobně jako v předchozím případě.

Rovnice typu $y^{(n)} = f(x)$

$$y^{(n-1)} = \int f(x)\,\mathrm{d}x + C_1,$$

$$y^{(n-2)} = \int \left(\int f(x)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}x + C_1 x + C_2,$$

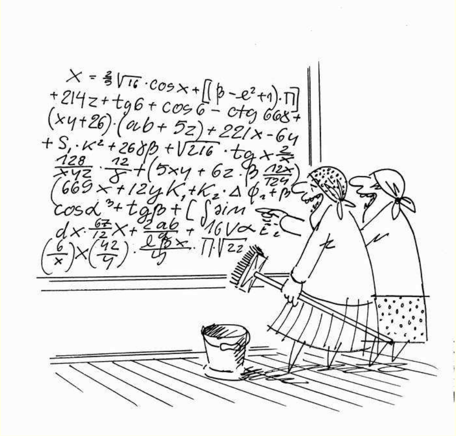
$$y^{(n-3)} = \int \left(\int \left(\int f(x)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}x\right) + \frac{C_1}{2}x^2 + C_2 x + C_3,$$

$$\vdots$$

$$y = \int \cdots \int f(x)\,\mathrm{d}x \cdots \mathrm{d}x + C_1 x^{n-1} + C_2 x^{n-2} + \cdots + C_n$$

Počáteční podmínky:

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_0', \quad \dots, \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)},$$


$X = \frac{2}{3}\sqrt{16} \cdot \cos x + [(\beta - e^2 + 1) \cdot \Pi]$
$+ 214z + tg6 + \cos 6 - ctg\, 668 +$
$(xy + 26) \cdot (ab + 5z) + 221x - 64$
$+ S_1 \cdot k^2 + 26\gamma\beta + \sqrt{216} \cdot tg\, x \frac{2}{x}$

KONEC