

# Diferenciální rovnice a dynamické modely

Robert Mařík

31. srpna 2009

**G. Galilei:** Velkou knihu přírody mohou číst jen ti, kteří znají jazyk, jímž je tato kniha napsána. A tímto jazykem je **matematika**.

**A. Turing:** Věda je **diferenciální rovnice**. Náboženství je hraniční podmínka.

**A. N. Whitehead:** Není běžnějšího omylu než věřit, že když provedeme dlouhé a přesné matematické výpočty, je pak aplikace výsledku na nějaký fakt v přírodě absolutně jistá.

**Rosenblueth & Wiener:** Nejlepším modelem kočky je zase kočka, pokud možno ta samá.

# Obsah

<b>1</b>	<b>Motivace</b>	<b>4</b>
	Rovnice samočištění jezer . . . . .	5
	Malthusův růst (exponenciální) . . . . .	10
	Verhulst–Pearlův růst (logistický) . . . . .	11
<b>2</b>	<b>Diferenciální rovnice.</b>	<b>16</b>
<b>3</b>	<b>Diferenciální rovnice prvního řádu</b>	<b>18</b>
	Rovnice $y' = y \cos x$ . . . . .	22
	Diferenciální rovnice se separovanými proměnnými . . . . .	35

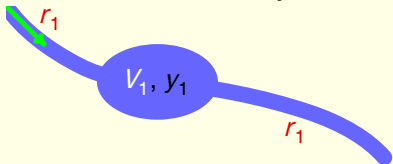
# 1 Motivace

## Růst populace

Nechť veličina  $y$  udává velikost určité populace v čase  $x$ . Potom veličina  $y'$  udává rychlost změny této populace.

- Populací rozumíme v širším slova smyslu soubor objektů či jedinců, vykazujících určitou společnou vlastnost.
- Rychlostí změny rozumíme počet nových jedinců snížený o počet uhynulých či jinak odstraněných jedinců za jednotku času.
  - Kladná rychlost  $\rightarrow$  velikost populace roste
  - Záporná rychlost  $\rightarrow$  velikost populace klesá

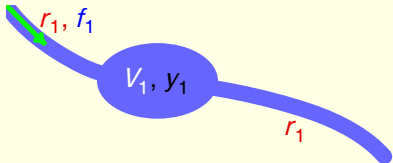
## Rovnice samočištění jezer



$$y_1' = -\frac{r_1}{V_1} y_1$$

- V jezeře je znečištěná voda objemu  $V_1$  [m<sup>3</sup>], intenzita znečištění je  $y_1$  [kg].  $y_1'$  je rychlost vyplavování nečistot – množství nečistot [kg], které jsou za časovou jednotku vyplaveny z jezera.
- Do jezera vtéká čistá voda rychlostí  $r_1$  a vytéká i s nečistotami toutéž rychlostí.
- Koncentrace nečistot je  $\frac{y_1}{V_1}$  [kg/m<sup>-3</sup>] a za každou časovou jednotku z jezera vyteče  $r_1$  m<sup>3</sup> vody, které obsahují  $\frac{y_1 \cdot r_1}{V_1}$  kg nečistot.

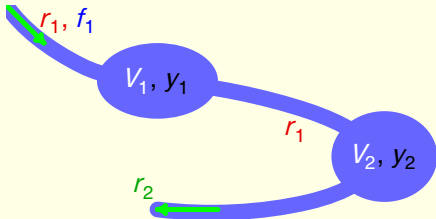
## Rovnice samočištění jezer



$$y_1' = -\frac{r_1}{V_1}y_1 + f_1$$

**Modifikace předchozí úlohy** – předpokládejme navíc, že **nečistoty jsou i v přítoku do jezera** a  $f_1$  je množství (v kg) nečistot, které se za časovou jednotku dostanou do jezera v přitékající vodě.

## Rovnice samočištění jezer

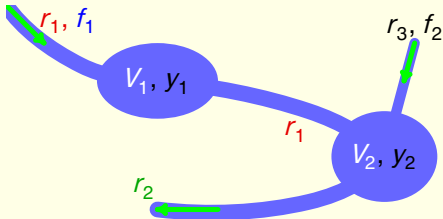


$$y_1' = -\frac{r_1}{V_1}y_1 + f_1$$

$$y_2' = \frac{r_1}{V_1}y_1 - \frac{r_2}{V_2}y_2$$

**Další modifikace předchozí úlohy** – předpokládáme, že **voda teče do druhého jezera** o objemu  $V_2$ , v němž je intenzita znečištění  $y_2$  a vytéká rychlostí  $r_2 = r_1$ .

## Rovnice samočištění jezer



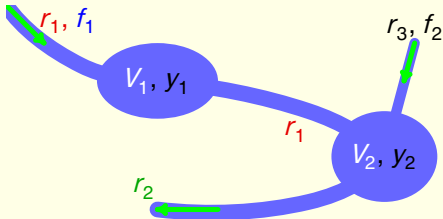
$$y_1' = -\frac{r_1}{V_1}y_1 + f_1$$

$$y_2' = \frac{r_1}{V_1}y_1 - \frac{r_2}{V_2}y_2 + f_2$$

Má-li druhé jezero **ještě jeden přítok**, o velikosti  $r_3$ , který je znečištěný tak, že nečistoty přibývají rychlostí  $f_2$ , objeví se v rovnicích další člen.

V tomto případě navíc platí  $r_2 = r_1 + r_3$ .

## Rovnice samočištění jezer



$$y_1' = -\frac{r_1}{V_1}y_1 + f_1$$

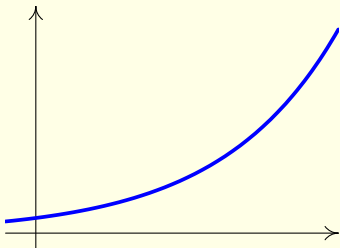
$$y_2' = \frac{r_1}{V_1}y_1 - \frac{r_2}{V_2}y_2 + f_2$$

- Podobným způsobem je možno sestavit model větší soustavy jezer – například velkých kanadských jezer.
- Jako řešení modelu získáme informaci o tom, jak rychle nečistoty protékají jezerním systémem.

## Malthusův růst (exponenciální)

$$y' = ry$$

$$y(0) = y_0$$



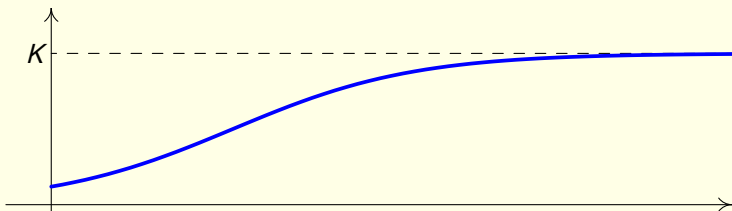
- Velikost populace stále roste.
- Předpoklad: Rychlost růstu je přímo úměrná velikosti populace (specifická míra růstu je konstantní)
- $y(0) = y_0$  je počáteční podmínka.
- Řešením je exponenciální funkce  $y = K \cdot e^{rx}$ .

Model není realistický pro velká  $y$ . Růst populace nad přijatelnou mez způsobí destrukci životního prostředí.

## Verhulst–Pearlův růst (logistický)

$$y' = r \left( 1 - \frac{y}{K} \right) y \quad y(0) = y_0$$

- Velikost populace roste pro  $y < K$  a klesá pro  $y > K$ .
- **Specifická míra růstu** lineárně klesá s velikostí populace.
- Řešením je **logistická křivka**.



$r$ : invazní parametr

$K$ : nosná kapacita prostředí

## Verhulst–Pearlův růst (logistický)

$$y' = r \left( 1 - \frac{y}{K} \right) y \quad y(0) = y_0$$

Při vnějších změnách prostředí se druh s těmito změnami musí vyrovnat

- $r$ -strategie
- $K$ -strategie

## Verhulst–Pearlův růst (logistický)

$$y' = r \left( 1 - \frac{y}{K} \right) y \quad y(0) = y_0$$

## Rovnice sociální difúze (rovnice "šíření drbů")

$$y' = ay(M - y)$$

### Podobně

- Šíření epidemií (Kermack+Mc Kendrik – 1927)
- Šíření vzorců chování (evoluční hra "jestřáb × holubice")
- Ostrovní ekologie – kolonizace ostrova živ. druhy z pevniny (Mac Arthur+Wilson – 60. léta 20. stol)

## Verhulst–Pearlův růst (logistický)

$$y' = r \left(1 - \frac{y}{K}\right) y \quad y(0) = y_0$$

## Verhulst–Pearlův růst s lovem intenzity $h$

$$y' = r \left(1 - \frac{y}{K}\right) y - h \quad y(0) = y_0$$

$h$ : intenzita lovu

**Problém:** Jak nastavit parametry systému tak, aby  $h$  bylo trvale co největší a aby nedošlo ke zdecimování populace?

## Verhulst–Pearlův růst (logistický)

$$y' = r \left( 1 - \frac{y}{K} \right) y \quad y(0) = y_0$$

## Verhulst–Pearlův růst s lovem intenzity $h$

$$y' = r \left( 1 - \frac{y}{K} \right) y - h \quad y(0) = y_0$$

## Verhulst–Pearlův růst s konkurencí mezi dvěma populacemi

$$y_1' = r_1 \left( 1 - \frac{y_1}{K_1} \right) y_1 - a y_1 y_2$$

$$y_2' = r_2 \left( 1 - \frac{y_2}{K_2} \right) y_2 - b y_1 y_2$$

## 2 Diferenciální rovnice.

Diferenciální rovnice jsou vztahy mezi neznámou funkcí a její derivací (jejími derivacemi). Např.

$$y' + xy \ln(1 - y^2) = 4$$

je diferenciální rovnice prvního řádu (obsahuje jenom první derivaci), rovnice

$$y'' + 2y' - 4y = \sin x$$

je diferenciální rovnice druhého řádu. Nejednoduššími diferenciálními rovnicemi jsou rovnice typu  $y' = f(x)$ . Například řešením rovnice

$$y' = x$$

je každá funkce tvaru

$$y = \frac{x^2}{2} + C,$$

kde  $C$  je libovolná reálná konstanta.

## FYZIKÁLNÍ POPIS PROBLÉMU:

scénář vývoje + počáteční stav → budoucí stav systému

"Scénářem vývoje" je zpravidla nějaký fyzikální zákon. Většinou tvrzení tvaru "změna jedné veličiny vyvolává odpovídající změnu veličiny jiné", nebo "působení jedné veličiny vyvolává odpovídající změnu jiné veličiny".

- Časová změna hybnosti tělesa je rovna výsledné působící síle (druhý Newtonův pohybový zákon).  $F = m \cdot \frac{dv}{dt}$
- Velikost indukovaného proudu v cívce je přímo úměrná časové změně indukčního toku cívkou (Faradayův indukční zákon).

## MATEMATICKÝ POPIS:

diferenciální rovnice + počáteční podmínka → řešení rovnice

### 3 Diferenciální rovnice prvního řádu

**Definice** (obyčejná diferenciální rovnice). *Obyčejnou diferenciální rovnici prvního řádu rozřešenou vzhledem k derivaci* (stručně - diferenciální rovnici (ODR)) s neznámou  $y$  rozumíme rovnici tvaru

$$y' = f(x, y) \quad (1)$$

kde  $f$  je funkce dvou proměnných. *Řešením* (též *integrálem*) rovnice na intervalu  $I$  rozumíme každou funkci  $y = y(x)$ , která splňuje identicky (1) na  $I$ .

Daná diferenciální rovnice má zpravidla nekonečně mnoho řešení  
Například řešením rovnice

$$y' = y$$

je nejen funkce  $y = e^x$ , ale i např. funkce  $y = C \cdot e^x$ , kde  $C \in \mathbb{R}$ .

**Definice** (počáteční podmínka, počáteční úloha). Úloha najít řešení rovnice (1), které splňuje zadanou *počáteční podmínku*

$$y(x_0) = y_0 \quad (2)$$

se nazývá *počáteční Cauchyova úloha*. Jejím řešením rozumíme funkci, která splňuje podmínku (2) a je na nějakém intervalu obsahujícím bod  $x_0$  řešením rovnice (1).

Řešení Cauchyovy úlohy nazýváme též *partikulárním řešením rovnice (1)*. Graf partikulárního řešení se nazývá *integrální křivka*.

- Má daná rovnice (počáteční úloha) řešení?
- Na jakém intervalu je toto řešení definováno?
- Je toto řešení určeno jednoznačně?
- Lze toto řešení nalézt analytickou cestou? (pomocí integrálního počtu)?

Nejjednodušším příkladem diferenciální rovnice je rovnice tvaru

$$y' = f(x). \quad (3)$$

Řešením rovnice (3) je funkce

$$y = \int f(x) dx + C,$$

kde  $C$  je libovolná konstanta. Takovýto vztah, popisující všechna řešení, nazýváme *obecné řešení rovnice*. Libovolné partikulární řešení získáme z obecného řešení vhodnou volbou konstanty.

**Poznámka 1** (obecné a partikulární řešení). Podobný princip platí i u dalších diferenciálních rovnic. Funkcí které vyhovují diferenciální rovnici prvního řádu je nekonečně mnoho, zapíšeme-li všechny jedním vzorcem, bude tento vzorec obsahovat jistou konstantu  $C$ . Takový vzorec se nazývá *obecné řešení diferenciální rovnice*. Každé jednotlivé (partikulární) řešení lze z tohoto vzorce obdržet<sup>1</sup> vhodnou volbou konstanty  $C$ .

---

<sup>1</sup>i z tohoto pravidla však existují výjimky, :)

**Definice** (ODR se separovanými proměnnými). ODR tvaru

$$y' = f(x)g(y), \quad (4)$$

kde  $f$  a  $g$  jsou spojité funkce na otevřených intervalech nazýváme *obyčejnou diferenciální rovnicí se separovanými proměnnými*.

Počáteční úloha pro rovnici se separovanými proměnnými nemusí mít vždy jediné řešení. Existují dokonce řešení, které mají porušenou jednoznačnost v každém bodě svého definičního oboru. Tato řešení se nazývají *singulární*.

Najděte funkci splňující  $y' = y \cos x$  a podmínku  $y(0) = 0.1$

Rovnice může sloužit jako jednoduchý model sezónní populace – specifická míra růstu, funkce  $\cos x$ , se periodicky mění s časem.

Najděte funkci splňující  $y' = y \cos x$  a podmínku  $y(0) = 0.1$

$$\frac{dy}{dx} = y \cdot \cos x$$

Přepíšeme derivaci  $y'$  jako podíl  $\frac{dy}{dx}$

Najděte funkci splňující  $y' = y \cos x$  a podmínku  $y(0) = 0.1$

$$\frac{dy}{dx} = y \cdot \cos x$$

$$\frac{1}{y} dy = \cos x dx$$

Násobením převedeme proměnnou  $y$  na jednu a proměnnou  $x$  na druhou stranu. Podle předpokladů je alespoň v nějakém okolí bodu  $x = 0$  funkce  $y$  nenulová.

Najděte funkci splňující  $y' = y \cos x$  a podmínku  $y(0) = 0.1$

$$\frac{dy}{dx} = y \cdot \cos x$$

$$\int \frac{1}{y} dy = \int \cos x dx$$

Připíšeme integrály na obě strany rovnice, vlevo je tedy integrál v proměnné  $y$  a vpravo integrál v proměnné  $x$ .

Najděte funkci splňující  $y' = y \cos x$  a podmínku  $y(0) = 0.1$

$$\frac{dy}{dx} = y \cdot \cos x$$

$$\int \frac{1}{y} dy = \int \cos x dx$$

$$\ln y = \sin x + C$$

- Vypočteme integrály. Podle předpokladů je funkce  $y$  kladná (alespoň v nějakém okolí bodu  $x = 0$ ). Integrační konstantu stačí uvažovat pouze jednu.
- Dostáváme rovnici, která popisuje **všechny** funkce, splňující rovnici  $y' = y \cdot \cos x$ .

Najděte funkci splňující  $y' = y \cos x$  a podmínku  $y(0) = 0.1$

$$\frac{dy}{dx} = y \cdot \cos x$$

$$\int \frac{1}{y} dy = \int \cos x dx$$

$$\ln y = \sin x + C$$

$$\ln 0.1 = \sin 0 + C$$

Dosadíme z počáteční podmínky a určíme velikost integrační konstanty.

Najděte funkci splňující  $y' = y \cos x$  a podmínku  $y(0) = 0.1$

$$\frac{dy}{dx} = y \cdot \cos x$$

$$\int \frac{1}{y} dy = \int \cos x dx$$

$$\ln y = \sin x + C$$

$$\ln 0.1 = \sin 0 + C$$

$$C = \ln 0.1$$

Vypočteme  $C$ .

Najděte funkci splňující  $y' = y \cos x$  a podmínku  $y(0) = 0.1$

$$\frac{dy}{dx} = y \cdot \cos x$$

$$\int \frac{1}{y} dy = \int \cos x dx$$

$$\ln y = \sin x + C$$

$$\ln 0.1 = \sin 0 + C$$

$$C = \ln 0.1$$

$$\ln y = \sin x + \ln 0.1$$

Dosadíme do rovnice popisující **všechna řešení** a obdržíme řešení úlohy. Toto řešení je v implicitním tvaru a ještě se jej pokusíme převést do tvaru explicitního.

Najděte funkci splňující  $y' = y \cos x$  a podmínku  $y(0) = 0.1$

$$\frac{dy}{dx} = y \cdot \cos x$$

$$\int \frac{1}{y} dy = \int \cos x dx$$

$$\ln y = \sin x + C$$

$$\ln 0.1 = \sin 0 + C$$

$$C = \ln 0.1$$

$$\ln y = \sin x + \ln 0.1$$

$$\ln y - \ln 0.1 = \sin x$$

Převědeme logaritmy na jednu stranu.

Najděte funkci splňující  $y' = y \cos x$  a podmínku  $y(0) = 0.1$

$$\frac{dy}{dx} = y \cdot \cos x$$

$$\int \frac{1}{y} dy = \int \cos x dx$$

$$\ln y = \sin x + C$$

$$\ln 0.1 = \sin 0 + C$$

$$C = \ln 0.1$$

$$\ln y = \sin x + \ln 0.1$$

$$\ln y - \ln 0.1 = \sin x$$

$$\ln \frac{y}{0.1} = \sin x$$

Sloučíme logaritmy.

Najděte funkci splňující  $y' = y \cos x$  a podmínku  $y(0) = 0.1$

$$\frac{dy}{dx} = y \cdot \cos x$$

$$\int \frac{1}{y} dy = \int \cos x dx$$

$$\ln y = \sin x + C$$

$$\ln 0.1 = \sin 0 + C$$

$$C = \ln 0.1$$

$$\ln y = \sin x + \ln 0.1$$

$$\ln y - \ln 0.1 = \sin x$$

$$\ln \frac{y}{0.1} = \sin x$$

$$\frac{y}{0.1} = e^{\sin x}$$

Odlogaritmuje pomocí inverzní funkce k logaritmu – pomocí exponenciální funkce.

Najděte funkci splňující  $y' = y \cos x$  a podmínku  $y(0) = 0.1$

$$\frac{dy}{dx} = y \cdot \cos x$$

$$\int \frac{1}{y} dy = \int \cos x dx$$

$$\ln y = \sin x + C$$

$$\ln 0.1 = \sin 0 + C$$

$$C = \ln 0.1$$

$$\ln y = \sin x + \ln 0.1$$

$$\ln y - \ln 0.1 = \sin x$$

$$\ln \frac{y}{0.1} = \sin x$$

$$\frac{y}{0.1} = e^{\sin x}$$

$$y = 0.1 \cdot e^{\sin x}$$

Vypočteme  $y$ . Tato funkce představuje řešení naší úlohy.

Najděte funkci splňující  $y' = y \cos x$  a podmínku  $y(0) = 0.1$

$$\frac{dy}{dx} = y \cdot \cos x$$

$$\int \frac{1}{y} dy = \int \cos x dx$$

$$\ln y = \sin x + C$$

$$\ln 0.1 = \sin 0 + C$$

$$C = \ln 0.1$$

$$\ln y = \sin x + \ln 0.1$$

$$\ln y - \ln 0.1 = \sin x$$

$$\ln \frac{y}{0.1} = \sin x$$

$$\frac{y}{0.1} = e^{\sin x}$$

$$y = 0.1 \cdot e^{\sin x}$$

### Názvosloví:

**diferenciální rovnice** + **počáteční podmínka** = počáteční úloha,  
obecné řešení, **partikulární řešení** (řešení počáteční úlohy)

## Diferenciální rovnice se separovanými proměnnými

$$y' = f(x)g(y)$$

Diferenciální rovnice se separovanými proměnnými je rovnice, jejíž pravá strana se dá vyjádřit jako **součin** funkce proměnné  $x$  a funkce proměnné  $y$ . Například rovnice

$$y' = x^2(1 + y)$$

má tuto vlastnost, zatímco rovnice

$$y' = x^2 + y$$

ne.

## Diferenciální rovnice se separovanými proměnnými

$$y' = f(x)g(y)$$

Konstantními řešeními jsou funkce typu  $y = y_i$ , kde  $y_i$  je číslo vyhovující rovnici  $g(y_i) = 0$ .

Nejprve hledejme konstantní řešení. Protože derivace konstanty je nula, budou tato konstantní řešení produkovat nulu na levé i na pravé straně rovnice. Například konstantní řešení rovnice

$$y' = x \cdot (1 - y)y$$

jsou funkce  $y(x) = 0$  a  $y(x) = 1$ .

## Diferenciální rovnice se separovanými proměnnými

$$y' = f(x)g(y)$$

Konstantními řešeními jsou funkce typu  $y = y_i$ , kde  $y_i$  je číslo vyhovující rovnici  $g(y_i) = 0$ . Dále hledáme **nekonstantní řešení**.

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y)$$

Přepíšeme derivaci  $y'$  jako podíl  $\frac{dy}{dx}$

## Diferenciální rovnice se separovanými proměnnými

$$y' = f(x)g(y)$$

Konstantními řešeními jsou funkce typu  $y = y_i$ , kde  $y_i$  je číslo vyhovující rovnici  $g(y_i) = 0$ . Dále hledáme nekonstantní řešení.

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y)$$
$$\frac{dy}{g(y)} = f(x) dx$$

Násobením a dělením převedeme výrazy s jednou proměnnou na jednu stranu a výrazy s druhou proměnnou na stranu druhou.

## Diferenciální rovnice se separovanými proměnnými

$$y' = f(x)g(y)$$

Konstantními řešeními jsou funkce typu  $y = y_i$ , kde  $y_i$  je číslo vyhovující rovnici  $g(y_i) = 0$ . Dále hledáme nekonstantní řešení.

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y)$$

$$\frac{dy}{g(y)} = f(x) dx$$

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x) dx + C$$

Zintegrujeme obě strany a po výpočtu integrálů na jedné straně budeme uvažovat integrační konstantu, která může nabývat libovolné reálné hodnoty. Obdrželi jsme obecné řešení rovnice.

## Diferenciální rovnice se separovanými proměnnými

$$y' = f(x)g(y)$$

Konstantními řešeními jsou funkce typu  $y = y_i$ , kde  $y_i$  je číslo vyhovující rovnici  $g(y_i) = 0$ . Dále hledáme nekonstantní řešení.

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y)$$

$$\frac{dy}{g(y)} = f(x) dx$$

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x) dx + C$$

Je-li zadána počáteční podmínka, dosadíme a určíme partikulární řešení podobně jako v předchozím případě.

## Rovnice typu $y^{(n)} = f(x)$

$$y^{(n-1)} = \int f(x) dx + C_1,$$

$$y^{(n-2)} = \int \left( \int f(x) dx \right) dx + C_1 x + C_2,$$

$$y^{(n-3)} = \int \left( \int \left( \int f(x) dx \right) dx \right) dx + \frac{C_1}{2} x^2 + C_2 x + C_3,$$

⋮

$$y = \int \dots \int f(x) dx \dots dx + C_1 x^{n-1} + C_2 x^{n-2} + \dots + C_n$$

Počáteční podmínky:

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y'_0, \quad \dots, \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)},$$



KONEC