Obsah

Předmluva

Skriptum je určeno pro posluchače Mendelovy zemědělské a lesnické univerzity v Brně. Obsahuje základní partie z teorie diferenciálních rovnic s hlavním důrazem na postupy a metody sloužící k jejich řešení. Vzhledem k tomu, že náplň i rozsah výuky matematiky se na jednotlivých oborech na MZLU liší, je skriptum koncipováno tak, aby se sestávalo z relativně samostatných částí, z nichž některé je možno bez narušení kontinuity vynechat či zkrátit.

Diferenciální rovnice jsou podstatnou součástí teoretického základu každého inženýrského studia, protože právě užití diferenciálních rovnic je nejpřirozenější a nejsnazší cestou, jak matematicky popisovat přírodní, technické, ekonomické a často i společenské jevy, zákony a zákonitosti.

Skriptum je rozděleno do tří kapitol. První dvě kapitoly vznikly doplněním a přepracováním skript [**6**]. Třetí kapitola je nová.

V první kapitole je obsažena základní problematika týkající se diferenciálních rovnic prvního řádu. V úvodu kapitoly jsou prezentovány základní z mnoha aplikací těchto diferenciálních rovnic. Otázky existence a jednoznačnosti řešení a grafického a numerického řešení jsou v textu pouze informativně nastíněny a hlavní důraz je kladen na jednotlivé typy diferenciálních rovnic, které je možno řešit analytickou cestou – rovnice se separovanými proměnnými, homogenní rovnice, lineární a exaktní rovnice. Druhá kapitola je věnována především lineárním diferenciálním rovnicím druhého řádu, které najdou uplatnění zejména v klasické mechanice. Poslední kapitola je věnována autonomním systémům a je zaměřena především na vyšetření chování systémů v okolí stacionárních bodů. V této kapitole jsou též uvedeny základní aplikace – model konkurence dvou druhů a model společenství dravce a kořisti.

Skriptum předpokládá znalost diferenciálního a integrálního počtu funkcí jedné proměnné a v některých partiích i znalost diferenciálního počtu funkcí dvou proměnných. Při samostatném řešení úloh je nezbytná dostatečná zručnost nejen při výpočtu integrálů a derivací, ale i při úpravách výrazů obsahujících základní elementární funkce. Úlohy nižší obtížnosti jsou označeny hvězdičkou, příklady poněkud vyšší obtížnosti jsou označeny křížkem.

Jednotlivé kapitoly jsou chápány jako samostatné celky a číslování tedy platí vždy pouze uvnitř této kapitoly. Například (4.2) značí rovnici, která je v aktuální kapitole, v podkapitole číslo 4 a jedná se o druhou číslovanou rovnici v této podkapitole.

Pro snazší orientaci čtenáře je text důsledně členěn na definice, poznámky, matematické věty, algoritmy řešení jednotlivých rovnic, ilustrativní řešené příklady a úlohy k samostatnému procvičování. Především poznámky jsou často relativně samostatné a ucelené. Čtenář tak snadno pozná, kde končí jedna myšlenka a začíná jiná. Motivační a řešené příklady, zadání úloh a texty algoritmů jsou pro přehlednost po okrajích textu označeny ikonkami ♖, ♘ a ♔.

Skriptum je provázáno se systémem Mathematical Assistant on Web, který automatizuje proces řešení diferenciálních rovnic a některých dalších typických matematických úloh. Toto provázání je realizováno na webové stránce `http://wood.mendelu.cz/math/rovnice`. Tato stránka obsahuje odkazy na neřešené příklady ze skript. Každá rovnice je doplněna odkazem, který tuto rovnici odešle přímo do apliakce Mathematical Assistant on Web a student obdrží více či méně podrobně krokovaný postup řešení úlohy. Dále jsou na této stránce odkazy na některé online služby pro řešení diferenciálních rovnic a kreslení směrových polí a fázových portrétů.

Děkuji Mgr. Simoně Fišnarové, Ph.D., za velmi pečlivé pročtení celého rukopisu a opravu řady nedostatků.

Autor

Použité zkratky a označení.

DR .... diferenciální rovnice
LDR .... lineární DR
(R) .... obyčejná DR, str. 7
(PP) .... počáteční podmínka pro obyčejnou DR prvního řádu, str. 7
(S) .... DR se separovanými proměnnými, str. 13
(H) .... homogenní DR, str. 22
(L) .... LDR 1. řádu, str. 25
(LH) .... homogenní LDR 1. řádu, str. 25
(T) .... totální diferenciál, str. 35
(E) .... exaktní DR, str. 35
(LH2) .... homogenní LDR 2. řádu s konst. koeficienty, str. 55
(L2) .... nehomogenní LDR 2. řádu s konst. koeficienty, str. 56
(AS) .... autonomní systém, str. 71

Kapitola 1

Diferenciální rovnice prvního řádu

Motivace – základní úloha integrálního počtu. Již při formulování hlavních myšlenek infinitezimálního počtu se objevila potřeba řešit následující úlohu (tzv. *základní úloha integrálního počtu*): Na intervalu I je dána spojitá funkce $f(x)$. Nalezněte funkci $y = y(x)$, která na intervalu I splňuje vztah

$$y'(x) = f(x). \tag{0.1}$$

Jako prostředek k řešení tohoto problému byl vytvořen pojem *integrál*. Z předchozích partií matematiky již víme, že všechny funkce splňující rovnici (0.1) jsou tvaru

$$y(x) = F(x) + C, \tag{0.2}$$

kde $F(x)$ je libovolná primitivní funkce k funkci $f(x)$ na intervalu I a C je integrační konstanta, která může nabývat libovolné reálné hodnoty. Vzorec (0.2) tedy představuje celou množinu funkcí (tzv. *obecné řešení*). Následující příklad ukazuje jednu z praktických aplikací, ve které se rovnice (0.1) objevuje.

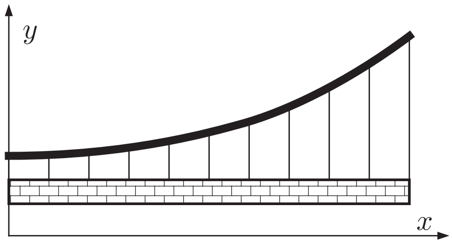
Příklad 0.1 (model zavěšeného mostu). Uvažujme lano, které nese hmotnost rovnoměrně rozloženou ve *vodorovném* směru. Pomocí fyzikálních úvah o rovnováze sil lze ukázat, že lano zaujme tvar křivky splňující diferenciální rovnici

$$y' = ax, \tag{0.3}$$

kde a je konstanta charakterizující hmotnost, kterou lano nese, a sílu, která lano napíná. Jedná se tedy o rovnici typu (0.1). Z (0.2) plyne, že všechny funkce, které splňují rovnici (0.3) jsou tvaru $y = a\dfrac{x^2}{2} + C$, kde C je konstanta. Odsud vyplývá, že lano zaujme parabolický tvar. Tento model odpovídá například lanu, na kterém je zavěšena mostní konstrukce[1] – pravá polovina takového mostu je schematicky znázorněna na obrázku. Abychom dosáhli rovnoměrného zatížení mostní konstrukce, nosných a svislých lan, na kterých je most fyzicky zavěšen, je nejvýhodnější navrhnout konstrukci tak, aby nosná lana zaujala parabolický tvar daný křivkou $y = a\dfrac{x^2}{2} + C$. Pro různá C se v tomto případě jedná o systém parabol, které jsou vzájemně posunuty ve vertikálním směru.

Motivace – počáteční podmínka. V předešlých odstavcích jsme viděli, že základní úloha integrálního počtu má nekonečně mnoho řešení, které závisí na jedné reálné konstantě. V praxi je zpravidla nutno z této množiny vybrat nějaké konkrétní (tzv. *partikulární*) řešení, které splňuje jistou dodatečnou podmínku – tzv. *počáteční podmínku*. V předchozím příkladě se zavěšeným

[1]Poznamenejme ještě, že předpoklad rovnoměrného rozložení zátěže *ve vodorovném směru* je podstatný. Pokud je zátěž rozložena rovnoměrně podél *délky lana* (např. provazový most nebo lano prověšené vlastní vahou), není rovnici (0.3) možné použít. Model takového problému uvádíme na straně 44.



OBRÁZEK 1. Most zavěšený na laně

mostem je nutné konce nosného lana ukotvit někde na pevnině. Logicky nás tedy z množiny všech parabol bude zajímat jen jedna – ta, která prochází bodem upevnění. Taková úloha, která se skládá z diferenciální rovnice a počáteční podmínky, se nazývá *počáteční úloha*.

Příklad 0.2 (počáteční úloha). Hledejme řešení počáteční úlohy

$$y' = 2x, \quad y(1) = 2.$$

Řešení. Integrací rovnice získáváme $y(x) = \int 2x \,\mathrm{d}x = x^2 + C$. Z podmínky $y(1) = 2$ plyne, že je-li $x = 1$, musí být $y = 2$. Dosadíme tyto hodnoty do posledního vztahu, čímž obdržíme

$$2 = 1^2 + C$$

a odsud $C = 1$. Řešením počáteční úlohy je tedy funkce $y(x) = x^2 + 1$.

V dalších částech této kapitoly výše uvedené myšlenky zpřesníme. Navíc budeme předpokládat, že pravá strana rovnice (0.1) *obsahuje i proměnnou* y. Tento předpoklad je důležitý vzhledem k většímu množství aplikací takového obecnějšího problému (některé z aplikací uvádíme níže). V jeho důsledku se ovšem ze základní úlohy integrálního počtu (0.1), kterou jsme řešili pouhou integrací, stane úloha nepoměrně složitější, kterou se naučíme řešit pouze v několika speciálních případech. Tyto případy se budou lišit v tom, jak přesně pravá strana rovnice závisí na proměnné y a metody řešení se budou v jednotlivých případech lišit.

1. Definice a základní vlastnosti

Definice (obyčejná diferenciální rovnice). *Obyčejnou diferenciální rovnicí prvního řádu rozřešenou vzhledem k derivaci* (stručně - diferenciální rovnicí, DR) s neznámou y rozumíme rovnici tvaru

$$y' = \varphi(x, y), \tag{R}$$

kde φ je funkce dvou proměnných.
Řešením (též *integrálem*) rovnice na intervalu I rozumíme každou funkci $y = y(x)$, která je diferencovatelná na I a splňuje zde identicky rovnici (R).
Nechť x_0, y_0 jsou reálná čísla. Úloha najít řešení rovnice (R), které splňuje zadanou *počáteční podmínku*

$$y(x_0) = y_0 \tag{PP}$$

se nazývá *počáteční* (též *Cauchyova*) *úloha*. Jejím řešením rozumíme funkci, která splňuje podmínku (PP) a je na nějakém intervalu obsahujícím bod x_0 řešením rovnice (R).
Řešení Cauchyovy úlohy nazýváme též *partikulárním řešením rovnice* (R). Graf libovolného partikulárního řešení se nazývá *integrální křivka*.

Úmluva. Pod pojmem interval v celém textu rozumíme *otevřený interval*, tj. některý z intervalů typu $(-\infty, \infty)$, $(-\infty, b)$, (a, b), (a, ∞), kde a, b jsou reálná čísla.

Poznámka 1.1. Slovně lze definici DR vyjádřit tak, že obyčejná diferenciální rovnice je vztah (platný v určitém oboru) mezi neznámou funkcí a jejími derivacemi. Termín „obyčejná rovnice“ značí, že hledaná funkce je funkcí jedné proměnné, tj. derivace v rovnici značí obyčejnou derivaci (ne parciální, viz též strana 46).

Poznámka 1.2. Funkce $y(x)$ je podle uvedené definice řešením rovnice (R) na intervalu I, jestliže

- existuje derivace $y'(x)$ pro všechna $x \in I$,
- výraz $\varphi(x, y(x))$ je definován pro všechna $x \in I$,
- rovnice (R) platí pro všechna $x \in I$.

Poznámka 1.3 (symbolika pro zápis derivací). Je-li funkce $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ve tvaru $y = g(x)$ (tj. x je *nezávislá proměnná* a y je *závislá proměnná*), píšeme místo obvyklého $g'(x)$ pro označení derivace funkce $g(x)$ také $y'(x)$, nebo stručněji y'. V přírodních a technických vědách se často setkáváme ještě s ekvivalentním značením derivace jako podílu diferenciálů: $y' = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$. V čitateli je za symbolem „d“ uvedena závislá proměnná a ve jmenovateli nezávislá. Je-li nezávislou proměnnou čas, označujeme jej zpravidla t namísto x a derivaci v tomto případě značíme tečkou takto: $\dot{y}$.

Poznámka 1.4. Rovnici (R) někdy uvádíme v ekvivalentním tvaru

$$\mathrm{d}y = \varphi(x, y)\,\mathrm{d}x,$$

který získáme nahrazením derivace y' podílem diferenciálů $\mathrm{d}y/\,\mathrm{d}x$ a formálním vynásobením rovnice diferenciálem $\mathrm{d}x$.

Poznámka 1.5 (obecnější tvar diferenciální rovnice). V některých aplikacích je nutno pracovat s obecnějšími diferenciálními rovnicemi tvaru

$$\Phi(x, y, y') = 0,$$

kde Φ je funkce tří proměnných taková, že z rovnice není možné explicitně vypočítat derivaci y'. Takové rovnice nazýváme *nerozřešené vzhledem k derivaci* a v tomto textu se jimi zabývat nebudeme.

Příklad 1.1 (růst populace). Nechť veličina y udává velikost nějaké populace v okamžiku x od počátku měření času. Populací zde rozumíme v širším slova smyslu libovolný soubor objektů, které vykazují určitou vlastnost. Velikost populace měříme ve vhodných jednotkách (milion jedinců, tuny biomasy a podobně — několik příkladů uvedeme níže). Také časovou jednotku volíme vhodně pro daný problém (vteřina, den, století). Jestliže se velikost populace mění s časem, tj. je-li $y = y(x)$, udává derivace funkce y v bodě x rychlost, s jakou se veličina y mění v čase x, tj. změnu velikosti populace v čase x, vztaženou na jednotku měření času.

- Je-li $y' > 0$, velikost populace roste (jedná-li se o živé organismy, říkáme že se populace rozmnožuje).
- Je-li $y' < 0$, velikost populace klesá (populace vymírá).
- Je-li $y' = 0$, velikost populace v daném okamžiku stagnuje, populace je stabilní a její velikost se nemění.

V mnoha případech rychlost růstu populace souvisí s velikostí této populace (např. s počtem jedinců v reprodukčním věku) předem známým způsobem — *existuje tedy vztah mezi funkcí* $y(x)$ *a její derivací* $y'(x)$. Tento vztah můžeme s výhodou zapsat pomocí vhodné diferenciální rovnice, jejímž řešením bude funkce y (několik příkladů uvádíme níže). Tedy vývoj populace v daném okamžiku je popsán diferenciální rovnicí (lokální charakteristika). Řešením obdržíme funkci, která přímo udává velikost populace v určitém čase (globální charakteristika). Řešení příslušné DR lze potom chápat jako hledání globální informace z počátečních podmínek a ze znalosti vývoje populace.

Poznámka 1.6 (specifická míra růstu, invazní parametr). Relativní změna populace za jednotku času se nazývá *specifická míra růstu* populace a označuje symbolem μ. Obecně se může jednat o veličinu, která závisí jak na velikosti populace, tak na čase. Často studujeme například populace živočichů určitého druhu, které žijí v prostředí s neměnnými podmínkami. V těchto případech závislost na čase neuvažujeme. Specifická míra růstu $\mu(y)$ potom udává změnu velikosti populace o velikosti y za časovou jednotku, vztaženou na jednotkové množství populace. Vývoj takové populace v čase je poté určen diferenciální rovnicí

$$y' = y\mu(y). \tag{1.1}$$

Specifikace funkce $\mu(y)$ se provádí v závislosti na uvažovaných poměrech panujících v populaci a v prostředí, ve kterém populace žije a rozmnožuje se. Specifická rychlost růstu $\mu(0)$ odpovídá stavu, kdy do neosídlené lokality pronikne několik málo jedinců a ti se zde začnou rozmnožovat právě rychlostí blízkou hodnotě $\mu(0)$. Z tohoto důvodu se $\mu(0)$ nazývá *invazní parametr* (tento pojem nabývá na důležitosti při studiu lokalit osídlených vícedruhovým společenstvem, viz strana 80). Aby se populace začala rozmnožovat, je nutno, aby platilo $\mu(0) > 0$.

♖ **Příklad 1.2 (model samočištění jezer).** Nechť veličina $y[\mathrm{kg}]$ udává hmotnost populace částic, které znečišťují vodu v jezeře o objemu $V[\mathrm{m}^3]$. Předpokládejme, že do jezera přitéká čistá voda a stejnou rychlostí odtéká voda s nečistotami (hladina se nemění, je v ustáleném stavu). Nechť veličina $r[\mathrm{m}^3/\mathrm{den}]$ udává, jaký objem vody se v jezeře takto vymění za jeden den. Předpokládejme dále (poněkud nerealisticky), že rozdělení znečišťujících částic v jezeře je rovnoměrné. Úbytek hmotnosti nečistot za den x je dán derivací $y'(x)$. Tento úbytek hmotnosti je možno vyjádřit též ve tvaru $\frac{r}{V}y$, kde $\frac{r}{V}$ je pro dané jezero kladná konstanta. Tato konstanta udává, jak velká část z celkového množství vody se v jezeře vymění za jeden den. Proces úbytku nečistot je popsán diferenciální rovnicí

$$y' = -\frac{r}{V}y. \tag{1.2}$$

Znaménko mínus vyjadřuje, že intenzita znečištění v jezeře klesá. Je-li známa intenzita počátečního znečištění (např. je-li známo, že v den $x = 0$ obsahovalo jezero y_0 kg nečistot), vyjádříme tuto informaci počáteční podmínkou

$$y(0) = y_0.$$

♖ **Příklad 1.3 (radioaktivní rozpad prvků).** Nechť veličina $y[\mathrm{gram}]$ udává hmotnost populace atomů nestabilního izotopu radioaktivního prvku v dané látce v čase x. Z jaderné fyziky je známo, že pravděpodobnost rozpadu atomu za jednotku času je pro všechny atomy daného izotopu stejná a nezávislá na čase. Proto je hmotnost atomů, které za jednotku času podlehnou radioaktivnímu rozpadu (vyjádřená derivací y'), úměrná hmotnosti dosud nerozpadnutých atomů, tj.

$$y' = -\lambda y,$$

kde $\lambda > 0$ je rozpadová konstanta daného prvku. Znaménko mínus opět vyjadřuje skutečnost, že hmotnost atomů nestabilního izotopu se snižuje.

Příklad 1.4 (Malthusův model, model s konstantní specifickou mírou růstu). Uvažujme populaci živočichů, jejíž velikost se mění vlivem narození a úmrtí jedinců. Velikost populace budeme měřit v milionech jedinců. Předpokládejme, že porodnost p vyjadřuje počet nově narozených za rok vztažený na milion jedinců a úmrtnost u počet zemřelých jedinců za totéž období vztažený opět na milion jedinců. Potom derivace y' vyjadřuje změnu velikosti této populace za rok. Podle výše uvedeného platí

$$y' = py - uy = (p-u)y. \tag{1.3}$$

Jedná-li se o lidskou populaci, předpokládáme zpravidla, že porodnost a úmrtnost jsou konstantní a uvedený model se nazývá *Malthusův model populace*. Je-li $p > u$, je $y' > 0$ a velikost populace roste, v opačném případě populace vymírá.

Poznámka 1.7. Všimněme si, že doposud jsme všechny výše uvedené jevy popsali pouze jedinou diferenciální rovnicí

$$y' = \alpha y, \tag{1.4}$$

kde $\alpha \in \mathbb{R}$ je vhodná konstanta. Jak ukážeme na stranách 11 a 19, řešením této rovnice je exponenciální funkce. Proto se rovnice (1.4) nazývá *rovnicí exponenciálního růstu* (i když v některých případech namísto růstu popisuje úbytek).

Příklad 1.5 (model s migrací). Předpokládejme navíc, že počet jedinců v populaci z Příkladu 1.4 se může měnit i vlivem migrace. Označíme-li počet emigrantů za rok jako e a počet imigrantů za rok jako i (zpravidla tyto veličiny pokládáme za konstantní), je vývoj takové populace popsán diferenciální rovnicí

$$y' = (p-u)y + i - e.$$

Příklad 1.6 (logistická rovnice, lineárně klesající specifická míra růstu). Je-li velikost rozvíjející se populace velmi velká, model z Příkladu 1.4 ukazuje, že populace roste velmi rychle. Tento stav však není příliš reálný u populace, která má pouze omezený počet živin, zdrojů a životního prostoru (souvisí například s vyživovacími kapacitami planety v případě lidské populace nebo s množstvím kyslíku ve vodě, v případě vodních organismů). V takových případech dochází ke vzájemné konkurenci mezi jednotlivci téhož druhu a dynamika růstu se zastavuje[2]. Ukazuje se, že model z Příkladu 1.4 je v takovýchto případech vhodný jenom pro relativně krátká časová období a relativně malé stavy populace, kdy k problémům s konkurencí uvnitř populace nedochází. V ostatních případech je třeba zohlednit i maximální velikost stabilní populace M. Předpokládáme v tomto případě, že rychlost růstu je úměrná velikosti populace y a volné kapacitě populace $(M - y)$. Populaci potom popisujeme modelem

$$y' = \alpha y(M - y), \tag{1.5}$$

kde $\alpha > 0$ je kladná reálná konstanta. Odsud vidíme, že pro $y \in (0, M)$ velikost populace roste ($y' > 0$), pro $y = M$ stagnuje ($y' = 0$) a pro $y > M$ populace vymírá ($y' < 0$). Tato rovnice se nazývá *logistická rovnice*, nebo též *Verhulst–Pearlův model populace* a konstanta M se nazývá *nosná kapacita prostředí*. Obecné řešení této rovnice uvádíme na straně 19.

[2]Případ konkurence dvou druhů soupeřících o tutéž potravu vyžaduje použít soustavu diferenciálních rovnic. Matematický model takového soupeření uvádíme na straně 80.

Příklad 1.7 (populace pod predačním tlakem). Předpokládejme že růst populace, vyvíjející se podle předchozího modelu, je zpomalován dalšími vlivy. Potom je růst populace popsán rovnicí

$$y' = \alpha y(M-y) - p(y),$$

kde $p(y)$ je člen charakterizující uvažované zpomalení růstu. Tento model je vhodný například při studiu populace přírodních obnovitelných zdrojů, které jsou těženy člověkem. V tomto případě je zpravidla člen $p(y)$ považován za konstantní (těžba je nezávislá na velikosti populace) a rovnice slouží k vytvoření ekologicky akceptovatelného modelu těžby. Jiným příkladem zpomalení vývoje populace může být působení predátorů, kteří se populací živí. V tomto případě funkce $p(y)$ charakterizuje vliv predátorů na populaci. Například při sledování populace *obaleče smrkového* (jeho larvy jsou jednou ze složek ptačí potravy) je realistické použít funkci[3] $p(y) = \dfrac{ay^2}{y^2+b^2}$, kde a, b jsou vhodné parametry.

Příklad 1.8 (šíření informace v populaci, sociální difúze). V populaci o velikosti M uvažujme populaci osob y, kterým je známa určitá informace a kteří tuto informaci dále rozšiřují. Zpravidla předpokládáme, že rychlost šíření informace je úměrná počtu osob y, kterým je informace známa, a počtu osob $(M-y)$, kterým informace známa dosud není. Proces je tedy opět popsán rovnicí (1.5). Poznamenejme ještě, že pokud velikost populace měříme v násobcích maximálního počtu populace, klademe $M=1$. V tomto modelu navíc nemá význam předpoklad $y > M$.

Diferenciální rovnici je možno použít také k vyjádření některých rovinných křivek, jak bylo uvedeno na příkladě zavěšeného mostu na straně 5.

Na následujícím příkladě si ukážeme, že počáteční úloha může mít více než jedno řešení.

Příklad 1.9 (nejednoznačnost řešení). Uvažujme počáteční úlohu

$$y' = 3y^{2/3}, \qquad y(1) = 0.$$

Funkce $y_1 = (x-1)^3$ je definovaná na $\mathbb{R}$ a splňuje relace

$$y_1' = 3(x-1)^2 = 3y_1^{2/3} \qquad \text{a} \qquad y_1(1) = (1-1)^3 = 0.$$

Funkce y_1 je proto řešením dané počáteční úlohy. Totéž platí však i pro konstantní funkci $y_2 \equiv 0$ (ověřte sami). Vidíme odsud, že zadaná počáteční úloha má alespoň dvě různá řešení, obě jsou definovaná na $\mathbb{R}$.

Poznámka 1.8 (formulace hlavních problémů). V souvislosti s diferenciálními rovnicemi nás zajímají především následující otázky

- Má daná počáteční úloha řešení?
- Je toto řešení určeno jednoznačně?
- Na jakém intervalu je toto řešení definováno?
- Je možné toto řešení nalézt analytickou cestou? Pokud ano, jak?

Poznamenejme jenom (spíše neformálně, bez velkých nároků na přesnost, podrobnější informace lze nalézt např. v [**11**, kap. 17.2]), že většina inženýrských aplikací vyžaduje, aby odpověď na první dvě otázky byla kladná. Toto je možné zaručit tehdy, není-li chování funkce $\varphi(x,y)$ vzhledem k proměnné y „příliš divoké“. Přesněji, platí následující.

- Je-li funkce $\varphi(x,y)$ spojitá, je počáteční úloha řešitelná. (Peanova věta)
- Má-li funkce $\varphi(x,y)$ ohraničenou parciální derivaci podle y, je řešení v nějakém okolí počáteční podmínky určeno jednoznačně. (Picardova věta)

[3] viz Ludwig D., Jones D.D., Holling C. S., Qualitative analysis of insect outbreak systems: the spruce budworm and forest, *J. Anim. Ecol.*, Vol. 47 (1978), 315–332.

Přitom jednoznačnou řešitelností rozumíme stav, kdy libovolná dvě řešení splňující tutéž počáteční podmínku v bodě x_0 jsou totožná v nějakém okolí bodu x_0.
V tomto textu se budeme zabývat pouze rovnicemi, u nichž lze řešení nalézt analytickou cestou. Kromě toho jsou řešení řady dalších často užívaných diferenciálních rovnic tabelována (viz např. [**11**, kap. 17.21]). V literatuře je možno též nalézt řadu výsledků z tzv. kvalitativní teorie diferenciálních rovnic. Takové výsledky udávají určitou informaci o řešeních rovnice, kterou neumíme nebo ji nelze analytickou cestou explicitně vyřešit.

Poznámka 1.9 (závislost řešení na počátečních podmínkách a parametrech). Ve většině aplikací je přirozené požadovat, aby malé změny v počátečním stavu systému (tj. malé změny počátečních podmínek) a malé změny v parametrech systému (tj. malé změny diferenciální rovnice) měly za následek pouze malé změny ve výsledném řešení. Tuto vlastnost nazýváme *spojitá závislost řešení na počátečních podmínkách a parametrech*, podrobněji viz [**2**, kap. 6].

Poznámka 1.10 (obecné řešení). Zpravidla lze všechna – nebo alespoň téměř všechna – řešení $y(x)$ vyjádřit pomocí jediného univerzálního vzorce, který obsahuje nějakou konstantu C, tj.

$$y = y(x, C),$$

případně v implicitním tvaru

$$\Psi(y, x, C) = 0.$$

Toto řešení nazýváme *obecné řešení diferenciální rovnice*. Každé — nebo alespoň skoro každé — partikulární řešení rovnice obdržíme z obecného řešení vhodnou volbou konstanty C. Například všechna řešení rovnice (1.4) jsou tvaru

$$y = Ce^{\alpha x}, \qquad C \in \mathbb{R},$$

což je obecné řešení této rovnice (ověřte dosazením). Partikulární řešení rovnice, splňující počáteční podmínku $y(0) = y_0$, obdržíme volbou $C = y_0$. Podrobněji viz Příklad 2.7.

V dalším textu se budeme zabývat rovnicemi, u nichž budeme schopni určit obecné řešení. Bude-li zadána počáteční podmínka, určíme příslušné partikulární řešení vhodnou volbou konstanty v řešení obecném.

Poznámka 1.11 (partikulární řešení). Uveďme, že pojem partikulárního řešení se v literatuře používá zpravidla ve dvou poněkud odlišných významech. Je-li zadána diferenciální rovnice a počáteční podmínka, rozumíme partikulárním řešením řešení dané počáteční úlohy, v souladu s Definicí 1.1 na straně 7. Není-li počáteční podmínka zadána a hovoříme o partikulárním řešení dané rovnice, máme na mysli jedno libovolné řešení této rovnice.

Následující příklad ukazuje jak je možno vhodnou volbou konstanty v obecném řešení obdržet řešení partikulární. Ukazuje však také případ partikulárního řešení, které nelze žádným postupem obdržet z řešení obecného.

Příklad 1.10 (vztah obecného a partikulárního řešení). Uvažujme rovnici ♖

$$y' = 3y^{2/3}$$

a svazek funkcí

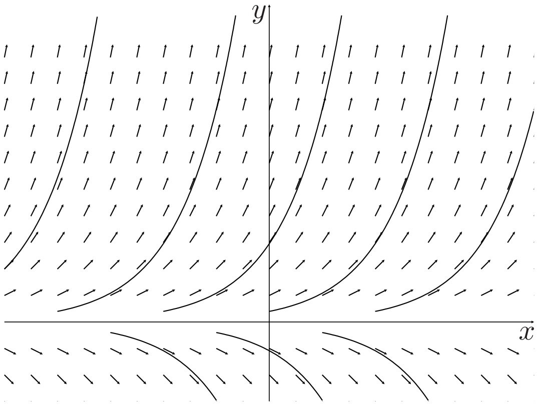
$$y = (x + c)^3 \tag{1.6}$$

definovaných na $\mathbb{R}$, kde $c \in \mathbb{R}$ je parametr. Pro libovolné $c \in \mathbb{R}$ splňuje funkce y relace

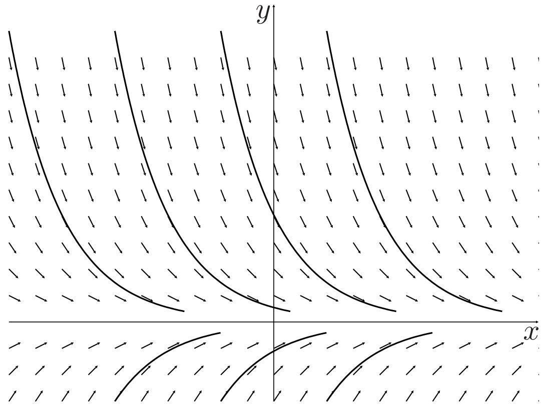
$$y' = 3(x + c)^2 = 3y^{2/3}$$

a je tedy řešením dané rovnice. Protože (1.6) popisuje celou množinu funkcí, závislých na jednom parametru, jedná se o obecné řešení. Vidíme, že partikulární řešení y_1 z Příkladu 1.9 lze ze vzorce (1.6) obdržet volbou $c = -1$, zatímco partikulární řešení y_2 pro žádnou volbu konstanty ve vzorci (1.6) obsaženo není — jedná se o singulární řešení ve smyslu Poznámky 2.2 na straně 14.

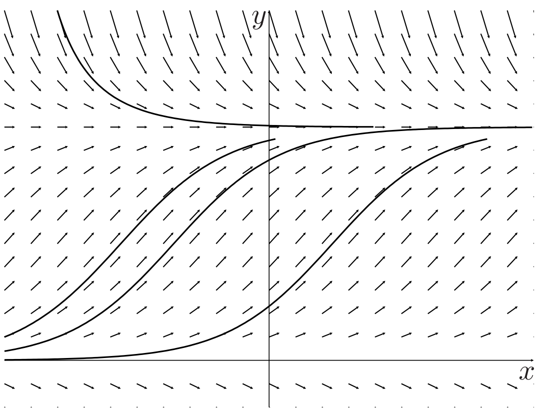
Poznámka 1.12 (geometrický význam diferenciální rovnice). Zajímejme se o to, jak budou vypadat integrální křivky rovnice (R). Protože derivace funkce v bodě udává směrnici tečny ke grafu funkce v tomto bodě, lze rovnici (R) chápat jako předpis, který každému bodu v rovině přiřadí směrnici tečny k integrální křivce, která tímto bodem prochází. Sestrojíme-li v dostatečném počtu (například i náhodně zvolených) bodů $[x, y]$ v rovině kratičké úsečky o směrnici $\varphi(x, y)$, obdržíme *směrové pole diferenciální rovnice* — systém lineárních elementů, které jsou tečné k integrálním křivkám. Často lze ze směrového pole odhadnout tvar integrálních křivek. Protože se však jedná pouze o *odhad* tvaru integrálních čar, používáme tuto metodu jen v případě, kdy nám stačí pouze hrubá informace o jednotlivých řešeních, nebo v případech kdy selhávají ostatní dostupné metody. Počáteční podmínka (PP) geometricky vyjadřuje skutečnost, že graf příslušného řešení prochází v rovině bodem $[x_0, y_0]$. Má-li tato počáteční úloha jediné řešení, neprochází bodem $[x_0, y_0]$ žádná další křivka. Má-li každá počáteční úloha jediné řešení (což bude pro nás velice častý případ), znamená to, že integrální křivky se *nikde neprotínají*. Směrová pole některých rovnic a části jejich integrálních křivek jsou uvedeny na obrázcích.[4]



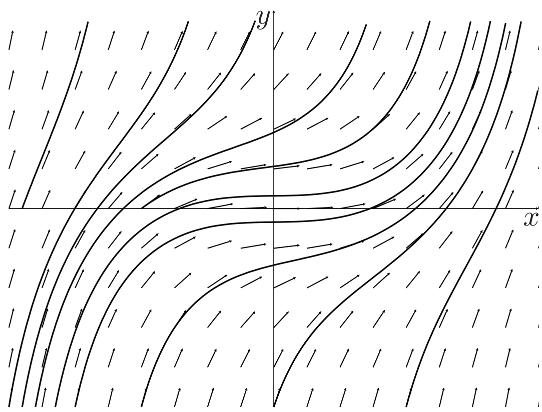
OBRÁZEK 2. Směrové pole rovnice $y' = y$.



OBRÁZEK 3. Směrové pole rovnice $y' = -y$.

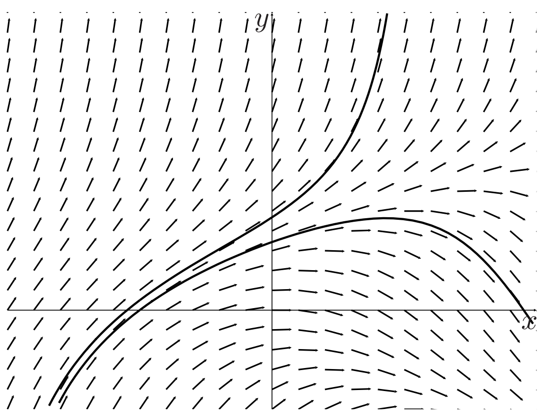


OBRÁZEK 4. Směrové pole rovnice $y' = y(M - y)$, $M \in \mathbb{R}^+$.

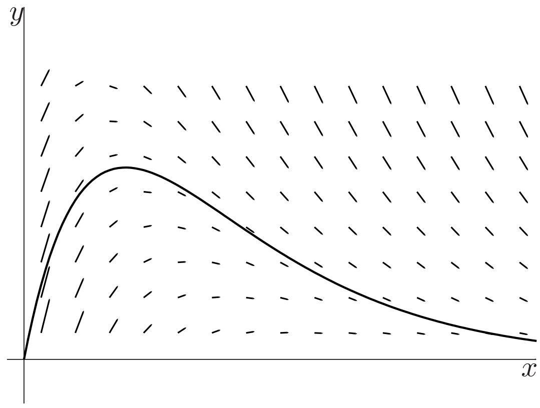


OBRÁZEK 5. Směrové pole rovnice $y' = x^2 + y^2$.

[4]Na Internetu je možno nalézt mnoho nástrojů které ve větší či menší kvalitě umí nakreslit směrové pole a vybrané trajektorie. Jedna z možností je na webové stránce `http://math.rice.edu/~dfield/dfpp.html`, případně stačí použít vyhledávač a klíčová slova jako `online slope field calculator` nebo `online direction field calculator`.



OBRÁZEK 6. Směrové pole rovnice $y' = y^2 - x$



OBRÁZEK 7. Směrové pole rovnice $y' = e^{-x} - \dfrac{7}{10}y$.

Poznámka 1.13 (fyzikální význam směrového pole). Uvažujme rovinu, v jejímž každém bodě působí na dané těleso síla $\vec{F}(x, y)$. Tuto sílu zpravidla znázorňujeme vektorem, jehož orientace udává směr a délka udává velikost působící síly. Délky si nyní nebudeme všímat a bude nás zajímat jenom směr působící síly. Směrnici přímky, která udává směr síly působící v bodě $[x, y]$ označme $k(x, y)$ (jedná se o veličinu, která se obecně může měnit s měnícími se souřadnicemi x a y). Rozložme sílu působící v bodě (x, y) do dvou složek ve směru souřadných os, tj. $\vec{F}(x, y) = (F_x(x, y), F_y(x, y))$. Tento vektor leží v přímce o směrnici $k(x, y) = \dfrac{F_y(x, y)}{F_x(x, y)}$. Potom tečny vedené k integrálním křivkám rovnice

$$y' = k(x, y) \tag{1.7}$$

udávají směry sil působících v bodech dotyku těchto tečen s křivkami — ve fyzice se takovéto křivky nazývají *siločáry silového pole*. Rovnici (1.7) je tedy možno chápat jako diferenciální rovnici těchto siločár. U některých silových polí lze siločáry snadno a efektně vizualizovat — například siločáry magnetického pole můžeme zviditelnit pomocí železných pilin, siločáry elektrického pole lze zviditelnit pomocí krupice a ricínového oleje.

2. Diferenciální rovnice se separovanými proměnnými

V tomto odstavci si uvedeme postup řešení jedné z nejjednodušších diferenciálních rovnic. Je to rovnice, kde pravou stranu (R) lze rozepsat na součin dvou částí, z nichž každá obsahuje právě jednu z proměnných.

Definice (DR se separovanými proměnnými). Diferenciální rovnice tvaru

$$y' = f(x)g(y), \tag{S}$$

kde f a g jsou funkce spojité na (nějakých) otevřených intervalech, se nazývá *obyčejná diferenciální rovnice se separovanými proměnnými.*

Příklad 2.1. Rovnice

$$y' - x - y = 0$$

není rovnice se separovanými proměnnými, protože po přepsání rovnice do tvaru $y' = x + y$ nelze pravou stranu rozložit na součin dvou funkcí, z nichž jedna závisí pouze na proměnné x a druhá pouze na proměnné y, jak je požadováno v (S). Rovnice

$$e^{-x}y' + e^{x+y}y = 0$$

je rovnice se separovanými proměnnými, protože po explicitním vyjádření derivace y'

$$y' = \frac{-e^{x+y}y}{e^{-x}}$$

je možno tuto rovnici přepsat pomocí algebraických úprav na tvar

$$y' = -ye^{y} \cdot e^{2x},$$

což je tvar odpovídající (S).

Poznámka 2.1. Ve většině případů dokážeme identifikovat diferenciální rovnice se separovanými proměnnými tak, že z rovnice vyjádříme derivaci a pravou stranu rovnice se snažíme rozložit na součin dvou funkcí jedné proměnné podle vzoru (S). Následující věta udává jednoduše použitelné kritérium, které umožní poznat, zda vůbec lze tento rozklad na součin provést.

Věta 2.1 (kritérium na ověření separability). *Necht'funkce dvou proměnných $\varphi(x, y)$ je nenulová na konvexní oblasti G a má zde spojité všechny parciální derivace do řádu dva, včetně. Rovnice*

$$y' = \varphi(x, y)$$

je rovnice se separovanými proměnnými a lze ji upravit na tvar (S) *právě tehdy, když je na množině G nulový determinant*

$$\begin{vmatrix} \varphi(x, y) & \varphi'_x(x, y) \\ \varphi'_y(x, y) & \varphi''_{xy}(x, y) \end{vmatrix}.$$

Příklad 2.2. Rovnice $y' = \sin(x) + \sin(y)$ není rovnice se separovanými proměnnými, protože následující determinant není na $\mathbb{R}^2$ nulová funkce.

$$\begin{vmatrix} \sin(x) + \sin(y) & \cos(x) \\ \cos(y) & 0 \end{vmatrix} = -\cos(x)\cos(y) \not\equiv 0$$

Příklad 2.3. Ačkoliv to není na první pohled patrné, rovnice $y' = \sin(x + y) + \sin(x - y)$ je rovnice se separovanými proměnnými. Vskutku, platí

$$\begin{aligned} &\begin{vmatrix} \sin(x+y) + \sin(x-y) & \cos(x+y) + \cos(x-y) \\ \cos(x+y) - \cos(x-y) & -\sin(x+y) + \sin(x-y) \end{vmatrix} = \\ &\qquad = -\sin^2(x+y) + \sin^2(x-y) - \big(\cos^2(x+y) - \cos^2(x-y)\big) = \\ &\qquad = -\sin^2(x+y) - \cos^2(x+y) + \sin^2(x-y) + \cos^2(x-y) = -1 + 1 = 0. \end{aligned}$$

Víme tedy, že rovnici je možno přepsat do tvaru (S), otázkou však zůstává, jak toto provést prakticky. V tomto případě je situace naštěstí jednoduchá. Použitím součtového vzorce $\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$ můžeme rovnici přepsat do tvaru

$$y' = 2\sin(x)\cos(y).$$

Poznámka 2.2 (singulární řešení). Počáteční úloha pro rovnici se separovanými proměnnými nemusí mít vždy jediné řešení. Toto jsme viděli v Příkladě 1.9, str. 10. Existují dokonce řešení, které mají porušenu jednoznačnost v každém bodě svého definičního oboru. Tato řešení se nazývají *singulární*[5]. Například řešení $y_2 \equiv 0$ z Příkladu 1.9 je singulární a jedná se o jediné singulární řešení této rovnice.

[5]Poznamenejme, že v základních kurzech matematické analýzy není terminologie týkající se singulárního řešení zcela jednoznačná. Tato nejednoznačnost souvisí především s tím, že se tyto kursy (jako i tento text) příliš nezabývají otázkou jednoznačnosti řešení.

Postup řešení jednotlivých typů rovnic budeme shrnovat do formy *algoritmů*. Přitom u všech algoritmů budeme předpokládat, že před započetím výpočtu je DR zapsána přesně ve tvaru, který je uváděn v definici daného typu rovnice (toto může v některých případech být podstatné(!), v ostatních případech nám to alespoň signalizuje, že se skutečně jedná o rovnice příslušného typu a jsme oprávněni použít příslušný algoritmus).

ALGORITMUS 1 (řešení DR se separovanými proměnnými). ♔

(i) Má-li algebraická rovnice[6] $g(y) = 0$ řešení $k_1, k_2, \dots, k_n$, jsou konstantní funkce $y \equiv \equiv k_1, y \equiv k_2, \dots, y \equiv k_n$ řešeními rovnice. Pouze tato řešení mohou[7] být singulárními. V dalších krocích nalezneme ostatní (nekonstantní) řešení.

(ii) Dále pracujme pouze na intervalech, kde $g(y) \neq 0$. Formálně nahradíme derivaci y' podílem diferenciálů $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x)g(y). \tag{2.1}$$

(iii) S derivací $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ pracujeme jako s obvyklým podílem dvou výrazů. Násobením a dělením převedeme rovnici (2.1) na tvar, který obsahuje na *každé straně pouze jednu proměnnou*

$$\frac{\mathrm{d}y}{g(y)} = f(x)\,\mathrm{d}x. \tag{2.2}$$

(iv) Získanou rovnost (2.2) integrujeme

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{g(y)} = \int f(x)\,\mathrm{d}x. \tag{2.3}$$

(Vlevo je integrál v proměnné y a vpravo integrál v proměnné x.) Přitom na jednu ze stran rovnice přidáme integrační konstantu. Tím obdržíme rovnici, která implicitně zadává *obecné řešení* rovnice. Je-li $G(y)$ některá z primitivních funkcí k funkci $1/g(y)$ a $F(x)$ některá z primitivních funkcí k funkci $f(x)$, je obecné řešení dáno rovnicí

$$G(y) = F(x) + C, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

(v) Pokud je zadána počáteční podmínka, je možné ji na tomto místě dosadit do obecného řešení a určit hodnotu konstanty C. Tuto hodnotu poté dosadíme zpět do obecného řešení[8] a obdržíme řešení *partikulární*. Tento krok je jistě možné provést i zcela nakonec, po obdržení obecného řešení v explicitním tvaru.

(vi) Pokud je to možné, převedeme řešení (obecné nebo partikulární) do explicitního tvaru („vyjádříme“ odsud y).

(vii) Pokud je možné některé z konstantních řešení obdržet vhodnou volbou konstanty ve vzorci pro obecné řešení, zahrneme toto konstantní řešení do obecného.

Poznámka 2.3 (řešitelnost a jednoznačnost). Je-li $g(y_0) \neq 0$, je řešení počáteční úlohy (S), (PP), které obdržíme pomocí předchozího postupu, definované a jednoznačně určené v nějakém okolí bodu x_0.

Příklad 2.4. Hledejme řešení počáteční úlohy ♖

$$y^2 - 1 + yy'(x^2 - 1) = 0, \quad y(0) = 2.$$

[6] Algebraickou rovnicí zde a i všude v dalším textu rozumíme libovolnou rovnici, jejíž neznámá nabývá reálných hodnot a řešením je tedy číslo nebo několik čísel (nikoliv funkce). Tento pojem se poněkud odlišuje od jiného významu slova algebraická rovnice, kdy se algebraickou rovnicí rozumí rovnice, která obsahuje na jedné straně polynom stupně n a na pravé straně nulu.

[7] avšak nemusí!

[8] Předpokládáme, že počáteční podmínce nevyhovují konstantní řešení získaná v prvním kroku algoritmu. Jinak je problém triviální.

Řešení. Rovnici přepíšeme do tvaru

$$y^2 - 1 = yy'(1 - x^2),$$
$$y' = \frac{y^2 - 1}{y} \frac{1}{1 - x^2}.$$

Jedná se o diferenciální rovnici se separovanými proměnnými, která má smysl pro $x \neq \pm 1$ a $y \neq 0$. Splnění těchto nerovností je zajištěno (alespoň lokálně) počáteční podmínkou, neboť s proměnnou x pracujeme v okolí bodu 0 a s proměnnou y v okolí bodu 2. Nahradíme derivaci y' podílem diferenciálů a odseparujeme proměnné. Přitom „nemusíme být opatrní“ při dělení rovnice výrazem $(y^2 - 1)$, protože nenulovost tohoto výrazu zajišťuje počáteční podmínka.

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{y^2 - 1}{y} \frac{1}{1 - x^2}, \qquad \text{odseparujeme}$$
$$\frac{y}{y^2 - 1}\,\mathrm{d}y = \frac{1}{1 - x^2}\,\mathrm{d}x, \qquad \text{připíšeme integrály}$$
$$\int \frac{y\,\mathrm{d}y}{y^2 - 1} = \int \frac{\mathrm{d}x}{1 - x^2}, \qquad \text{vypočteme integrály.}$$

Integrál vlevo má v čitateli násobek derivace jmenovatele, integrál vpravo vypočteme pomocí vzorce $\int \frac{1}{A^2 - x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2A} \ln \left| \frac{A + x}{A - x} \right| + C$

$$\frac{1}{2} \ln |y^2 - 1| = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1 + x}{1 - x} \right| + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Vzhledem k počáteční podmínce se budeme zabývat případem, kdy $y^2 - 1 > 0$ (protože $2^2 - 1 > 0$) a podobně $\frac{1 + x}{1 - x} > 0$ (protože $\frac{1 + 0}{1 - 0} > 0$). Můžeme tedy vynechat absolutní hodnoty.

$$\frac{1}{2} \ln(y^2 - 1) = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + x}{1 - x} + c,$$
$$\ln(y^2 - 1) = \ln \frac{1 + x}{1 - x} + 2c,$$
$$\ln(y^2 - 1) = \ln \frac{1 + x}{1 - x} + \ln e^{2c}, \qquad \text{sloučíme logaritmy}$$
$$\ln(y^2 - 1) = \ln\left(\frac{1 + x}{1 - x} e^{2c}\right).$$

Protože funkce $\ln(\cdot)$ je prostá, můžeme rovnici „odlogaritmovat“

$$y^2 - 1 = \frac{1 + x}{1 - x} e^{2c}, \qquad \text{přejmenujeme konstantu}$$
$$y^2 = 1 + C \frac{1 + x}{1 - x}, \quad C = e^{2c} \in \mathbb{R}^+.$$

Tento vztah udává obecné řešení rovnice v implicitním tvaru. Dosadíme počáteční podmínku

$$2^2 = 1 + C \frac{1 + 0}{1 - 0}$$

a řešením této (jednoduché) rovnice určíme $C = 3$. Tuto hodnotu použijeme v obecném řešení. Řešením počáteční úlohy je funkce daná implicitně rovnicí

$$y^2 = 1 + 3 \frac{1 + x}{1 - x} = \frac{4 + 2x}{1 - x}.$$

Protože vzhledem k počáteční podmínce je možno předpokládat $y > 0$, získáme po odmocnění hledané partikulární řešení v explicitním tvaru

$$y = \sqrt{\frac{4+2x}{1-x}}\,.$$

Toto řešení je definované a jediné na intervalu $(-1, 1)$ (pro $x = -1$ vychází $y(-1) = 1$, což způsobí problémy s jednoznačností, neboť $y \equiv 1$ je řešení, které prochází týmž bodem $[-1, 1]$).

Příklad 2.5. Hledejme všechna řešení rovnice

$$y' = \frac{2x+1}{2(y-1)} \tag{2.4}$$

a poté hledejme partikulární řešení y_p, splňující podmínku $y(2) = 0$.

Řešení. Po vynásobení rovnice výrazem $2(y-1)\,\mathrm{d}x$ získáváme

$$(2y-2)\,\mathrm{d}y = (2x+1)\,\mathrm{d}x.$$

Integrací odsud obdržíme

$$y^2 - 2y = x^2 + x + C, \quad C \in \mathbb{R},$$

což je obecné řešení rovnice zapsané v implicitním tvaru. Pokusme se převést toto řešení do explicitního tvaru. Výraz na levé straně převedeme na čtverec, tj.

$$(y-1)^2 - 1 = x^2 + x + C$$

a odsud po odmocnění a osamostatnění y

$$y = 1 \pm \sqrt{x^2 + x + K}.$$

Přitom číslo 1 jsme před výpočtem odmocniny převedli na pravou stranu a zahrnuli do konstanty C, čímž vznikla nová konstanta $K = C + 1$. Řešeními jsou funkce $y_1 = 1 + \sqrt{x^2 + x + K}$ a $y_2 = 1 - \sqrt{x^2 + x + K}$, pro $K \in \mathbb{R}$. Partikulární řešení určíme dosazením počáteční podmínky. Dosadíme-li do y_1, obdržíme rovnici

$$0 = 1 + \sqrt{4 + 2 + K},$$

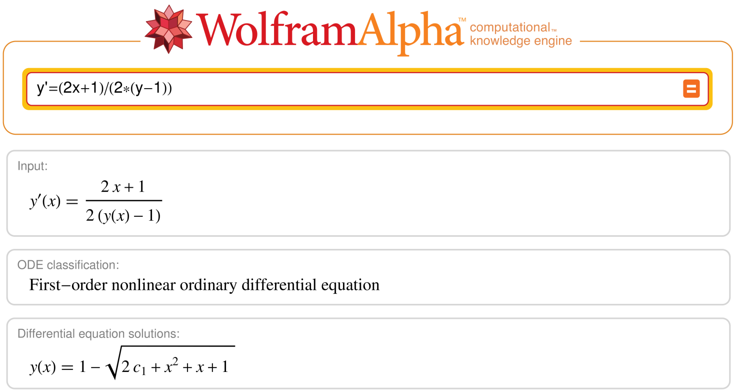
která nemá řešení v $\mathbb{R}$. Dosazením do y_2 obdržíme

$$0 = 1 - \sqrt{4 + 2 + K}$$

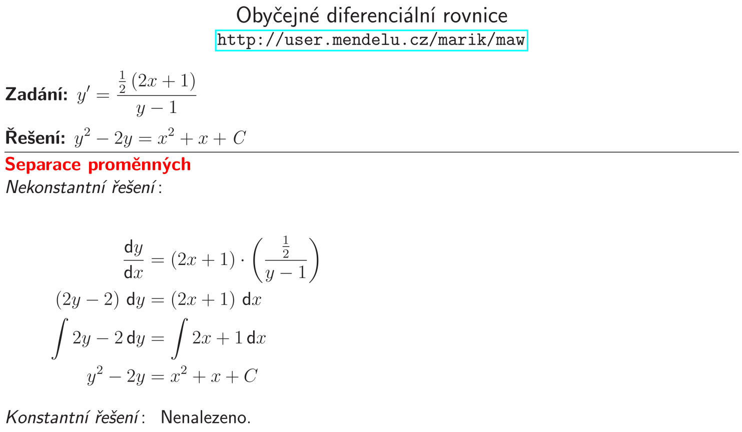
a odsud $K = -5$. Partikulárním řešením počáteční úlohy je funkce $y_p = 1 - \sqrt{x^2 + x - 5}$.

Poznámka 2.4 (internetové služby vhodné pro řešení diferenciálních rovnic). Zadáme-li text `y'=(2x+1)/(2*(y-1))` (rovnice z předešlého příkladu) do vyhledávače Wolfram Alpha (na adrese `http://www.wolframalpha.com`) obdržíme výstup s obecným řešením jako na Obrázku 8. Poněkud podrobnější klasifikaci typu diferenciální rovnice[9] a řešení i s postupem obdržíme, pokud zadáme tentýž řetězec do systému Mathematical Assistant on Web na adrese `http://user.mendelu.cz/marik/maw/index.php?form=ode`, viz Obrázek 9. Všimněte si, že ani jeden automatický řešič není tak úspěšný jako člověk. Wolfram Alpha se ani nesnaží hledat konstantní řešení diferenciální rovnice se separovanými proměnnými, je příliš nedbalý při explicitním vyjadřování funkce $y(x)$ (jedna varianta obecného řešení zcela vypadla) a není schopen provést trik se slučováním a přejmenováváním konstant. MAW se pro změnu o explicitní vyjádření funkce raději ani nesnaží.

[9] Wolfram Alpha rozlišuje lineární a nelineární rovnice, MAW rozlišuje u nelineárních i separované, exaktní, homogenní a některé další typy.



OBRÁZEK 8. Řešení diferenciální rovnice (2.4) vyhledávačem Wolfram Alpha.



OBRÁZEK 9. Řešení diferenciální rovnice (2.4) systémem MAW.

Příklad 2.6. Hledejme řešení rovnice

$$3xy^2y' = (y^3 - 1)(x^3 - 1).$$

Řešení. Jedná se o rovnici se separovanými proměnnými

$$y' = \frac{y^3 - 1}{3y^2} \cdot \frac{x^3 - 1}{x},$$

která má smysl pro $x \neq 0$ a $y \neq 0$. Pro $y = 1$ je pravá strana rovna nule. Konstantní funkce $y \equiv 1$ je proto řešením této rovnice. Pro $y \neq 1$ lze odseparovat proměnné

$$\frac{3y^2}{y^3 - 1}\,\mathrm{d}y = \frac{x^3 - 1}{x}\,\mathrm{d}x$$

a po integraci dostáváme

$$\ln|y^3 - 1| = \frac{x^3}{3} - \ln|x| + c, \qquad c \in \mathbb{R}.$$

Tato rovnice udává obecné řešení diferenciální rovnice. Pokusíme se tvar tohoto řešení poněkud upravit. Obě strany rovnice převedeme do logaritmického tvaru

$$\ln|y^3 - 1| = \ln\left(e^{x^3/3}\,\frac{1}{|x|}\,e^c\right)$$

a odlogaritmujeme

$$|y^3 - 1| = e^{x^3/3}\,\frac{1}{|x|}\,e^c.$$

Vynecháním absolutních hodnot se mohou levá a pravá strana lišit znaménkem. Toto znaménko připojíme k faktoru e^c

$$y^3 - 1 = (\pm e^c)\,e^{x^3/3}\,\frac{1}{x}$$

a po zavedení nové konstanty $C = \pm e^c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ a přeznačení dostáváme

$$y^3 - 1 = \frac{C}{x} e^{x^3/3}. \tag{2.5}$$

Volbou $C = 0$ je v tomto vzorci obsažena konstantní funkce $y = 1$, o níž jsme se již na začátku přesvědčili, že je také řešením. Lze tedy připustit $C \in \mathbb{R}$ libovolné. Funkce (2.5) je tedy obecným řešením rovnice pro libovolné $C \in \mathbb{R}$.

Příklad 2.7 (rovnice exponenciálního růstu). Hledejme řešení počáteční úlohy

$$y' = \alpha y, \quad y(0) = y_0$$

s neznámou y a konstantním parametrem $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
Řešení. Konstantní funkce $y = 0$ je řešením rovnice, splňujícím počáteční podmínku $y(0) = 0$. Předpokládejme dále, že $y \neq 0$. Nahradíme y' podílem diferenciálů

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= \alpha y, && \text{odseparujeme}\\
\frac{\mathrm{d}y}{y} &= \alpha\,\mathrm{d}x, && \text{připíšeme integrály}\\
\int \frac{1}{y}\,\mathrm{d}y &= \int \alpha\,\mathrm{d}x, && \text{vypočteme integrály}\\
\ln|y| &= \alpha x + c, \quad c \in \mathbb{R}, && \text{vyjádříme } |y|\\
|y| &= e^{\alpha x + c}, &&\\
|y| &= e^{\alpha x}.e^c, && \text{odstraníme absolutní hodnotu}\\
y &= (\pm e^c)e^{\alpha x}, && \text{přejmenujeme konstantu}\\
y &= Ce^{\alpha x}, &&
\end{aligned}$$

kde $C = \pm e^c$ je konstanta, která je různá od nuly (exponenciální funkce nenabývá nulové hodnoty). Zvolíme-li však $C = 0$, obdržíme konstantní funkci $y = 0$, o níž jsme již na začátku zjistili, že je také řešením. Proto C může být libovolná reálná konstanta. Obecné řešení má potom tvar

$$y = Ce^{\alpha x}, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

Po dosazení počáteční podmínky $x = 0$ a $y = y_0$ do obecného řešení získáváme $y_0 = Ce^0 = C$ a řešením počáteční úlohy je tedy $y = y_0 e^{\alpha x}$.

Poznámka 2.5. Vztah $\ln|y| = \alpha x + c$ z předešlého příkladu je lineární vzhledem k x. Máme-li empiricky nalezený soubor bodů $[x, y]$, lze pomocí tohoto vztahu stanovit koeficienty α a c v tomto vztahu pomocí metody nejmenších čtverců (viz např. [**11**, kap. 35]).

Příklad 2.8 (rovnice logistického růstu). Hledejme řešení logistické rovnice z Příkladu 1.6

$$y' = \alpha y(M - y), \qquad \alpha \in \mathbb{R},\ M \in \mathbb{R}^+$$

pro $y \in (0, M)$.

Řešení. Separací proměnných a integrací pomocí parciálních zlomků (viz Dodatek C.4 str. 97) obdržíme

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= \alpha y(M-y), && \text{odseparujeme}\\
\frac{\mathrm{d}y}{y(M-y)} &= \alpha\,\mathrm{d}x, && \text{rozložíme na parciální zlomky}\\
\frac{1}{M}\Big(\frac{1}{y}+\frac{1}{M-y}\Big)\,\mathrm{d}y &= \alpha\,\mathrm{d}x, && \text{připíšeme integrály}\\
\frac{1}{M}\int\frac{1}{y}+\frac{1}{M-y}\,\mathrm{d}y &= \int\alpha\,\mathrm{d}x, && \text{vypočteme integrály}\\
\frac{1}{M}\Big(\ln y-\ln(M-y)\Big) &= \alpha x+c, \quad c\in\mathbb{R}, && \text{sloučíme logaritmy}\\
\ln\frac{y}{M-y} &= M(\alpha x+c), && \text{odlogaritmujeme}\\
\frac{y}{M-y} &= e^{M(\alpha x+c)}, && \\
\frac{y}{M-y} &= e^{Mc}e^{M\alpha x}, && \text{přejmenujeme konstantu}\\
\frac{y}{M-y} &= Ce^{M\alpha x}, && \text{vyjádříme } y\\
y &= MCe^{M\alpha x}-yCe^{M\alpha x}, && \\
y(1+Ce^{M\alpha x}) &= MCe^{M\alpha x}, && \\
y &= \frac{MCe^{M\alpha x}}{1+Ce^{M\alpha x}}, \quad C\in\mathbb{R}^{+}, &&
\end{aligned}
$$

kde $C = e^{Mc}$ je kladná konstanta. Všimněme si, že vzhledem k tomu, že jsme měli zadán interval, ve kterém uvažujeme hodnoty y, nemuseli jsme zvlášť uvažovat konstantní řešení $y = 0$ a $y = M$ a neměli jsme ani problémy s absolutní hodnotou uvnitř logaritmu po integraci, protože na uvažovaném intervalu platí $|y| = y$ a $|M - y| = M - y$.

Poznámka 2.6. Obecné řešení předchozí rovnice se nazývá *logistická křivka*, její průběh je uveden na obrázku se směrovým polem této rovnice na straně 12. Vztah $\ln\frac{y}{M-y} = M(\alpha x + c)$ je linearizací této křivky a dovoluje proložit logistickou křivku souborem empiricky získaných bodů pomocí metody nejmenších čtverců, je-li známa hodnota konstanty M.

Úloha 2.1. Řešte následující diferenciální rovnice. Je-li zadána počáteční podmínka, nalezněte nejprve všechna řešení a poté i partikulární řešení y_p vyhovující této počáteční podmínce.

1.* $(x-1)y^3 - e^x y' = 0,\ y(0) = 1$

2.* $x^2y^2y' + 1 = y$

3.* $2(1+e^x)yy' = e^x$

4.* $x^2 + 1 + y'\cos y = 0$

5.* $y'\cos^2 x = (1+\cos^2 x)\sqrt{1-y^2}$

6.* $\sqrt{1-y^2} + y'\sqrt{1-x^2} = 0$

7.* $2yx^2y' = 1 + x^2,\ y > 0$

8.* $y' = x^2 + x^2y^2$

9. $y' + e^x(y' + y) = 0$

10. $y' = \dfrac{2x-1}{x^2}y$

11. $\dfrac{1}{x+1} - \dfrac{1}{y-1}y' = 0,\ y(1) = 2$

12. $\dfrac{x^2+1}{x} + \dfrac{yy'}{y^2-1} = 0$

13. $y^2 - 1 + yy'(x^2-1) = 0$

14. $2y - x^3y' = 0$

15. $y'e^{x^2+y} = -\dfrac{x}{y}$

16. $y' + xy = y,\ y(1) = 1$

17. $e^{-y}(1 + y') = 1$

18. $y \ln y + xy' = 0$

19. $xyy' + 1 + y^2 = 0$

20. $y' \operatorname{tg} x - y^2 = 1 - 2y$

21. $(y^2 + xy^2)y' + x^2 - x^2y = 0$

22. $\dfrac{yy'}{\sqrt{1+y^2}} + \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}} = 0$

23. $x^2y' = 1 - y$

24. $(1 - x^2)y' + xy = x,\ x \in (-1, 1)$

25. $1 - y^2 - 2xyy' = 0$

26. $(x^2 + 1)(y^2 - 1) + xyy' = 0$

27. $xy' = 4(y + \sqrt{y})$

28. $1 + y^2 = y'(1 + x^2)$

29. $y' = (3y + 1) \operatorname{tg} x$

30. $\dfrac{\sin x}{\cos x} + y'\dfrac{\cos y}{\sin y} = 0$

31. $y' \sin x \sin y = \cos x \cos y,\ y(\frac{\pi}{4}) = 0$

32. $y' = 2\sqrt{y} \ln x,\ y(e) = 1$

33. $y' = y^2 + y^2x^2,\ y(0) = 1$

34.† $\ln \dfrac{y'}{y} = x$

Poznámka 2.7 (využití určitého integrálu namísto neurčitého). Partikulární řešení počáteční úlohy (S)–(PP) lze místo (2.3) psát též přímo ve tvaru určitého integrálu

$$\int_{y_0}^{y} \frac{\mathrm{d}t}{g(t)} = \int_{x_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t. \tag{2.6}$$

(Zde je vhodné přejmenovat proměnnou, přes kterou integrujeme, aby nedocházelo ke kolizi ve stejném označení s horní mezí.) Výhoda tohoto zápisu může být v tom, že hodnotu určitého integrálu lze vypočítat použitím příslušných přibližných numerických metod i v případě, kdy nejsme schopni nalézt primitivní funkci k funkci f. Podobná možnost, využít určitého integrálu namísto neurčitého, existuje i u dalších rovnic, kterými se budeme zabývat. V textu již však na toto upozorňovat nebudeme a čtenář, zajímající se o tuto problematiku, může podrobnější informace nalézt v odborné literatuře.

Poznámka 2.8 (autonomní rovnice). V mnoha biologických i technických aplikacích se setkáváme se speciálním případem rovnice se separovanými proměnnými, ve které na pravé straně *nefiguruje* nezávislá proměnná, tj. s rovnicí typu[10]

$$y' = g(y). \tag{2.7}$$

Tyto rovnice se nazývají *autonomní diferenciální rovnice*. Všechny dříve uvedené příklady s růstem populace byly tohoto typu. Zřejmě se jedná o rovnici se separovanými proměnnými, stačí totiž v (S) položit $f(x) \equiv 1$. Pro rovnici (2.7) tedy platí všechno co bylo dříve vysloveno pro rovnici (S). Rovnice (2.7) má však navíc poměrně často jednu důležitou vlastnost: v mnoha případech lze ukázat (podrobněji viz [**9**, kap I.3]), že ohraničená řešení se pro $x \to \infty$ a pro $x \to -\infty$ v limitě blíží k některému z konstantních řešení. Další podstatnou vlastností těchto rovnice je skutečnost, že je-li funkce $y(x)$ řešením této rovnice, platí totéž i pro funkci $y(x + c)$. Je-li proměnnou x čas, znamená to, že nezáleží na počátku měření času.

V praxi se někdy vzhledem k uvedeným skutečnostem u autonomních diferenciálních rovnic zajímáme jen o výše uvedená konstantní řešení, protože další řešení k těmto konstantním řešením konvergují. Tuto konvergenci je možno vidět na obrázcích na straně 12. Na Obr. 2 konvergují řešení pro $x \to -\infty$ ke konstantnímu řešení $y = 0$. Na Obr. 3 totéž, avšak pro $x \to \infty$. Na Obr. 4 pro $x \to -\infty$ konvergují nekonstantní řešení k řešení $y = 0$ a pro $x \to \infty$ k řešení $y = M$.

[10] Srovnej s rovnicí (0.1), kde naopak na pravé straně nefiguruje závislá proměnná.

Poznamenejme ještě, že všechna konstantní řešení vypočteme poměrně snadno již v prvním kroku algoritmu ze strany 15.

Příklad 2.9. Hledejme všechna konstantní řešení rovnice

$$y' = y - 1 - \frac{3y-1}{y^2+1}.$$

Jiná než konstantní řešení počítat nebudeme.
Řešení. Konstantní funkce má nulovou derivaci. Má-li tato funkce být řešením zadané rovnice, musí platit

$$0 = y - 1 - \frac{3y-1}{y^2+1}.$$

Jedná se algebraickou rovnici tj. neznámá y je reálné číslo, nikoliv funkce. Řešením této rovnice postupně získáváme

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{y^3 - y^2 - 2y}{y^2+1}, \\ 0 &= y^3 - y^2 - 2y, \\ 0 &= y(y^2 - y - 2), \\ 0 &= y(y-2)(y+1). \end{aligned}$$

Poslední rovnice má tři kořeny $y_1 = 0$, $y_2 = 2$ a $y_3 = -1$. Jedinými konstantními řešeními jsou tedy funkce $y \equiv 0$, $y \equiv 2$ a $y \equiv -1$.

3. Homogenní diferenciální rovnice

Definice (homogenní DR). Nechť f je spojitá funkce. Diferenciální rovnice

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right) \tag{H}$$

se nazývá *homogenní diferenciální rovnice*.

Homogenní diferenciální rovnici lze substitucí nezávisle proměnné y převést na rovnici se separovanými proměnnými. Vskutku, zavedeme-li novou funkci u vztahem $u(x) = \dfrac{y(x)}{x}$, získáme pro funkci y a její derivaci y' vztahy

$$y(x) = u(x)x, \qquad y'(x) = u'(x)x + u(x). \tag{3.1}$$

Po dosazení do (H) dostáváme (pro stručnost již vynecháme argumenty u neznámé funkce u a její derivace u')

$$u'x + u = f(u), \tag{3.2}$$

což je ekvivalentní rovnici

$$u' = \Big(f(u) - u\Big)\frac{1}{x}.$$

Získaná rovnice je rovnice se separovanými proměnnými. Tuto rovnici vyřešíme vzhledem k neznámé funkci u. Původní funkci y obdržíme ze substitučního vztahu $y(x) = u(x)x$.

ALGORITMUS 2 (řešení homogenní DR).

(i) Substitucí (3.1) převedeme rovnici do tvaru (3.2).
(ii) Vyřešíme rovnici (3.2) (jedná se o rovnici se separovanými proměnnými) vzhledem k neznámé u.
(iii) Substituci (3.1) použijeme pro nalezení řešení y původní rovnice.

(iv) Případný převod do explicitního tvaru a nalezení partikulárního řešení je stejný jako v případě DR se separovanými proměnnými.

Poznámka 3.1 (polynomy dvou proměnných). Polynomem dvou proměnných rozumíme funkci dvou proměnných tvaru

$$p(x,y)=\sum a_{ij}x^i y^j,$$

kde a_{ij} jsou reálná čísla, i,j jsou přirozená čísla nebo nuly a součet obsahuje pouze konečný počet sčítanců. Jednotlivé členy v součtu nazýváme *členy polynomu* $p(x,y)$, *stupněm člene* $a_{ij}x^i y^j$ rozumíme číslo $(i+j)$. *Stupněm polynomu* rozumíme nejvyšší číslo ze stupňů všech členů. Například funkce

$$p(x,y)=-3x^4+x^3y-2xy+4y+3$$

je polynomem stupně 4, první dva členy jsou stupně 4, třetí člen (tj. $-2xy$) je stupně 2, čtvrtý člen (tj. $4y$) je stupně 1 a poslední člen (tj. 3) je stupně 0.
Polynom, jehož všechny členy jsou stejného stupně, se nazývá *homogenní*. Výše uvažovaný polynom $p(x,y)$ tedy není homogenní. Naopak polynom

$$q(x,y)=x^5+x^3y^2-2xy^4$$

je homogenní polynom stupně 5, protože se skládá ze tří členů a stupeň každého z těchto členů je 5.

V praxi často pracujeme s diferenciálními rovnicemi, ve kterých vystupují polynomy dvou proměnných. V takovém případě lze velice snadno rozpoznat, jedná-li se o homogenní diferenciální rovnici, či nikoliv. Platí totiž následující: Jsou-li funkce $p(x,y)$ a $q(x,y)$ homogenní polynomy proměnných x a y a jsou-li tyto polynomy stejného stupně, *je diferenciální rovnice*

$$p(x,y)+y'q(x,y)=0$$

homogenní a lze ji přepsat do tvaru (H). V opačném případě (tj. pokud alespoň jeden z polynomů p,q není homogenní, nebo jsou-li oba polynomy homogenní, ale jiného stupně) se *nejedná* o homogenní rovnici.

Příklad 3.1. Rovnice ♖

$$y'(2x^2+y^2)=2xy$$

je homogenní, protože polynomy $(2x^2+y^2)$ a $(2xy)$ jsou oba homogenní polynomy druhého stupně. Rovnice má smysl, jestliže derivace y' v rovnici skutečně figuruje, tj. jestliže $2x^2+y^2\neq$ $\neq 0$. Nejprve explicitně vyjádříme derivaci y'

$$y'=\frac{2xy}{2x^2+y^2}$$

a rozšířením zlomku na pravé straně výrazem $\dfrac{1}{x^2}$ rovnici převedeme do tvaru (H)

$$y'=\frac{2\frac{y}{x}}{2+\left(\frac{y}{x}\right)^2}.$$

Substituce $y=ux$, $y'=u'x+u$ převede tuto rovnici na rovnici

$$u'x+u=\frac{2u}{2+u^2}$$

a po výpočtu derivace u' získáváme

$$u'=-\frac{1}{x}\cdot\frac{u^3}{2+u^2}.$$

Tato rovnice má konstantní řešení $u \equiv 0$. Jedno z řešení zadané rovnice tedy je $y = ux = 0x = 0$. Nyní hledejme obecné řešení a předpokládejme již dále, že platí $u \neq 0$. Po nahrazení derivace u' podílem diferenciálů $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$ a po separaci proměnných obdržíme rovnici

$$-\frac{u^2+2}{u^3}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$$

a po integraci (výraz na levé straně integrujeme po rozdělení na součet dvou zlomků) získáváme

$$\frac{1}{u^2} - \ln|u| = \ln|x| + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Nyní zbývá návrat k původní závisle proměnné, tj. y. Po dosazení $u = \dfrac{y}{x}$ a úpravě dostáváme

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\left(\frac{y}{x}\right)^2} - \ln\left|\frac{y}{x}\right| &= \ln|x| + c \\
\frac{x^2}{y^2} - \ln|y| + \ln|x| &= \ln|x| + c \\
\ln|y| &= \frac{x^2}{y^2} - c \\
|y| &= e^{\frac{x^2}{y^2}} e^{-c} \\
y &= Ce^{\frac{x^2}{y^2}},
\end{aligned}$$

kde $C = \pm e^{-c}$ je nová nenulová konstanta. Volba $C = 0$ vede na známé řešení $y \equiv 0$ a všechna řešení jsou tvaru $y = Ce^{\frac{x^2}{y^2}}$, $C \in \mathbb{R}$.

Příklad 3.2. Hledejme řešení na intervalu $(0, \infty)$ řešení rovnice

$$xy' - y = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Řešení. Rovnici lze přepsat do tvaru

$$y' = \frac{y}{x} + \sqrt{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2}.$$

Po zavedení substituce $y = ux$, $y' = u'x + u$ se rovnice transformuje na rovnici (rozepište si podrobně sami)

$$u'x = \sqrt{1 + u^2}.$$

Po separaci proměnných

$$\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1+u^2}} = \frac{\mathrm{d}x}{x}$$

a po výpočtu integrálů získáváme

$$\ln\left(u + \sqrt{1+u^2}\right) = \ln x + c,\ c \in \mathbb{R}.$$

Odstranění logaritmů a zavedení nové nenulové konstanty $C = e^c \in \mathbb{R}^+$ vede k řešení

$$u + \sqrt{1+u^2} = Cx.$$

Po zpětné substituci $u = \dfrac{y}{x}$ a po vynásobení faktorem x obdržíme obecné řešení

$$y + \sqrt{x^2 + y^2} = Cx^2, \quad C \in \mathbb{R}^+.$$

Úloha 3.1. Řešte následující homogenní diferenciální rovnice. Nalezněte všechna řešení a je-li zadána počáteční podmínka, nalezněte poté i partikulární řešení rovnice, které splňuje tuto počáteční podmínku.

1.* $y' = \frac{y}{x} + \operatorname{tg} \frac{y}{x}$

2.* $x^2 y' = y^2 + xy$

3. $2xy' = 3y + x, \quad y(1) = 0$

4. $xy' - y = y \ln \frac{y}{x}$

5. $xy' + y \ln x = y \ln y$

6. $y' = e^{\frac{y}{x}} + \frac{y}{x}$

7. $y' = \frac{1}{\cos \frac{y}{x}} + \frac{y}{x}$

8. $y' = \frac{y^2 + xy + x^2}{xy}, \quad y(1) = -1$

9. $y' = \frac{y}{x+y}$

10. $y' = \frac{x-y}{x+y}$

11. $y' = \frac{x+y}{x-y}$

12. $y' = \frac{x^2+y^2}{xy}$

4. Lineární diferenciální rovnice

V tomto odstavci se budeme zabývat případem rovnice, ve které je funkce $\varphi(x, y)$ vzhledem k proměnné y lineární. Přesněji, budeme se zabývat rovnicí z následující definice.

Definice (lineární DR). Nechť funkce a, b jsou spojité na intervalu I. Rovnice

$$y' + a(x)y = b(x) \tag{L}$$

se nazývá *obyčejná lineární diferenciální rovnice prvního řádu* (zkráceně píšeme LDR). Je-li navíc $b(x) \equiv 0$ na I, nazývá se rovnice (L) *homogenní*, v opačném případě *nehomogenní*.

Definice (asociovaná homogenní rovnice). Buď dána rovnice (L). Homogenní rovnice, která vznikne z rovnice (L) nahrazením pravé strany nulovou funkcí, tj. rovnice

$$y' + a(x)y = 0 \tag{LH}$$

se nazývá *homogenní rovnice asociovaná k nehomogenní rovnici* (L).

Poznámka 4.1. Pojem linearita rovnice vyžaduje linearitu funkce $\varphi(x, y)$ pouze v závislé proměnné y. Vzhledem k nezávislé proměnné x může být rovnice libovolně „škaredá“ (požadujeme pouze spojitost koeficientů a, b). Pojem „homogenní“ zde vyjadřuje skutečnost, že pravá strana rovnice je nulová. Tento pojem se liší od pojmu „homogenní rovnice“ ve smyslu rovnice (H), kde homogenita značila skutečnost, že pravou stranu rovnice lze přepsat do tvaru $y' = f(y/x)$. Jedná se zde o stejné pojmenování dvou odlišných věcí a tyto dva významy pojmu *homogenní* je nutno rozlišovat.

Příklad 4.1. Rovnice

$$y' - 2y \ln(x) = \frac{\sin x}{x} \quad \text{a} \quad y' = y + x$$

jsou lineární diferenciální rovnice. Obě tyto rovnice jsou nehomogenní (připomínáme, že homogenitu uvažujeme ve smyslu „homogenní lineární diferenciální rovnice“, nikoliv homogenní ve smyslu, v jakém byl tento pojem používán v předchozí podkapitole). Rovnice

$$y' - y^2 = x^2 \quad \text{a} \quad yy' = x^2$$

nejsou lineární rovnice. U první rovnice linearitu „kazí“ člen y^2, u druhé rovnice součin yy'.

Úloha 4.1. Některé rovnice z Úloh 2.1 a 3.1 jsou lineární. Zjistěte, které to jsou, přepište tyto rovnice do tvaru (L) a rozhodněte, zda jsou homogenní nebo nehomogenní.

Poznámka 4.2 (řešitelnost a jednoznačnost). Jsou-li funkce a, b spojité na intervalu I, $x_0 \in I$ a $y_0 \in \mathbb{R}$ libovolné, má každá počáteční úloha (L)–(PP) právě jedno řešení definované na celém intervalu I.

Poznámka 4.3 (triviální řešení). Homogenní lineární diferenciální rovnice má vždy (bez ohledu na konkrétní tvar funkce $a(x)$) konstantní řešení $y = 0$, jak lze ověřit přímým dosazením. Toto řešení se nazývá *triviální řešení* a v praktických úlohách zpravidla nemívá žádný význam.

Důsledkem toho, že lineární DR závisí na neznámé y velice speciálním způsobem, je fakt, že struktura množiny všech řešení rovnice je do jisté míry předem daná. Proto, než přistoupíme k metodě řešení tohoto typu diferenciální rovnice, uveďme si několik pouček, které umožní pochopení této struktury. Tyto znalosti později s výhodou využijeme při hledání řešení.

Poznámka 4.4 (operátorová symbolika). Definujme na množině všech funkcí diferencovatelných na intervalu I operátor L vztahem

$$L[y](x) = y'(x) + a(x)y(x)$$

pro každé $x \in I$. Jedná se tedy o předpis, který každé diferencovatelné funkci přiřazuje levou stranu rovnice (L). Potom je možno diferenciální rovnici (L) a k ní asociovanou homogenní rovnici zapsat ve velmi krátkém tvaru

$$L[y] = b(x) \qquad \text{a} \qquad L[y] = 0.$$

Poznámka 4.5 (linearita operátoru L). Operátor L splňuje pro všechna reálná čísla C_1, C_2 a všechny diferencovatelné funkce $y_1(x)$, $y_2(x)$ vztah

$$L[C_1y_1 + C_2y_2] = C_1L[y_1] + C_2L[y_2].$$

Vskutku, rozepsáním operátoru podle definice, užitím vzorce pro derivaci součtu a konstantního násobku, vytknutím a opětovným užitím definice operátoru L dostáváme postupně

$$\begin{aligned} L[C_1y_1 + C_2y_2](x) &= \Big(C_1y_1(x) + C_2y_2(x)\Big)' + a(x)\Big(C_1y_1(x) + C_2y_2(x)\Big) \\ &= C_1y_1'(x) + C_2y_2'(x) + a(x)C_1y_1(x) + a(x)C_2y_2(x) \\ &= C_1\Big(y_1'(x) + a(x)y_1(x)\Big) + C_2\Big(y_2'(x) + a(x)y_2(x)\Big) \\ &= C_1L[y_1](x) + C_2L[y_2](x). \end{aligned}$$

Tato vlastnost je v následujícím lematu vyjádřena v termínech „řešení lineární diferenciální rovnice“.

Lemma 4.1 (princip superpozice). Je-li funkce $y_1(x)$ řešením rovnice

$$y' + a(x)y = f_1(x)$$

a funkce $y_2(x)$ řešením rovnice

$$y' + a(x)y = f_2(x),$$

je funkce $y(x) = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$ pro libovolné $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ řešením rovnice

$$y' + a(x)y = C_1f_1(x) + C_2f_2(x). \tag{4.1}$$

Vskutku, přímým rozepsáním zjistíme, že jestliže platí $L[y_1] = f_1$ a $L[y_2] = f_2$, pak funkce $y(x)$ splňuje

$$L[y] = L[C_1y_1 + C_2y_2] = C_1L[y_1] + C_2L[y_2] = C_1f_1 + C_2f_2$$

a funkce y je tedy řešením rovnice (4.1).

Příklad 4.2 (princip superpozice).

- Funkce $y_1 = x$ je řešením rovnice $y' - y = 1 - x$. Funkce $y_2 = x^2$ je řešením rovnice $y' - y = 2x - x^2$. Potom součet $y = y_1 + 5y_2 = x + 5x^2$ je řešením rovnice
$$y' - y = (1 - x) + 5(2x - x^2) = 1 + 9x - 5x^2.$$
- Funkce $y_1 = x$ je řešením rovnice $y' - y = 1 - x$. Funkce $y_2 = e^x$ je řešením rovnice $y' - y = 0$. Potom součet $y = y_1 + 5y_2 = x + 5e^x$ je řešením rovnice
$$y' - y = (1 - x) + 5 \cdot (0) = 1 - x. \tag{4.2}$$
Zde dokonce vidíme, že namísto čísla 5 může figurovat jakákoliv jiná konstanta, protože je stejně násobena nulou. Proto je řešením rovnice (4.2) celá množina funkcí tvaru $y = x + Ce^x$, kde $C \in \mathbb{R}$ je libovolné reálné číslo. V následujícím textu si ukážeme, že takto je dokonce možno zkonstruovat obecné řešení rovnice (4.2).

Poznámka 4.6 (důsledek principu superpozice, souvislost řešení homogenní a nehomogení LDR). Speciální případy principu superpozice jsou

- *Je-li funkce $y_0(x)$ řešení homogenní lineární diferenciální rovnice, je každý její násobek rovněž řešením této rovnice.* Vskutku, je-li $L[y_0] = 0$, pak $L[C \cdot y_0] = C \cdot L[y_0] = C \cdot 0 = 0$ pro libovolné reálné číslo C.
- *Pokud navíc funkce $y_0(x)$ z předchozího bodu nemá nulový bod na intervalu I, potom každá počáteční úloha pro homogenní diferenciální rovnici má řešení ve tvaru $Cy_0(x)$ a funkce $y(x) = Cy_0(x)$ je tedy obecným řešením.* Vskutku, pro libovolnou počáteční podmínku $y(\alpha) = \beta$ stačí položit $C = \dfrac{\beta}{y_0(\alpha)}$.
- *Je-li funkce $y_p(x)$ řešení nehomogenní lineární diferenciální rovnice, a funkce $y_0(x)$ řešením asociované homogenní diferenciální rovnice, je funkce $y(x) = y_p(x) + y_0(x)$ řešením téže nehomogenní rovnice.* Vskutku, je-li $L[y_0] = 0$ a $L[y_p] = b(x)$, pak $L[y_p + y_0] = L[y_p] + L[y_0] = b(x) + 0 = b(x)$.
- *Jsou-li funkce $y_{p1}(x)$ a $y_{p2}(x)$ dvě řešení téže nehomogenní lineární diferenciální rovnice, je funkce $y(x) = y_{p1}(x) - y_{p2}(x)$ řešením asociované homogenní rovnice.* Vskutku, je-li $L[y_{p1}] = b(x)$ a $L[y_{p2}] = b(x)$, pak $L[y_{p1} - y_{p2}] = L[y_{p1}] - L[y_{p2}] = b(x) - b(x) = 0$.

Zformulujme si nejdůležitější z těchto poznatků do následující věty.

Věta 4.1 (obecné řešení nehomogenní LDR). *Uvažujme lineární diferenciální rovnici* (L) *a asociovanou homogenní rovnici* (LH).

- *Je-li $y_p(x)$ libovolné partikulární řešení nehomogenní LDR a $y_0(x, C)$ obecné řešení asociované homogenní LDR, je funkce*
$$y(x, C) = y_p(x) + y_0(x, C) \tag{4.3}$$
obecným řešením nehomogenní LDR.
- *Je-li $y_p(x)$ libovolné partikulární řešení nehomogenní LDR a $y_{p0}(x)$ nenulové partikulární řešení asociované homogenní LDR, je funkce*
$$y(x, C) = y_p(x) + Cy_{p0}(x) \tag{4.4}$$
obecným řešením nehomogenní LDR.

Slovně:

> Součet jednoho řešení zadané nehomogenní a obecného řešení asociované homogenní lineární rovnice je obecným řešením dané nehomogenní rovnice.
>
> Všechna řešení homogenní lineární rovnice jsou násobky jednoho nenulového řešení této rovnice.

Linearita operátoru tedy značně zjednodušuje situaci — stačí totiž nalézt obecné řešení rovnice homogenní a *pouze jedno* řešení rovnice nehomogenní. Součet těchto řešení je potom obecným řešením nehomogenní rovnice. Dokonce víme, že obecné řešení homogenní rovnice je násobkem libovolného nenulového řešení této rovnice. Obě tato dílčí řešení jsme schopni nalézt metodami, uvedenými v následujících odstavcích.

4.1. Homogenní LDR

Podle definice je homogenní LDR tvaru

$$y' + a(x)y = 0. \tag{LH}$$

Řešení homogenní LDR separací proměnných. Rovnice (LH) je rovnice se separovanými proměnnými. Vskutku, z (LH) obdržíme

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -a(x)y$$

a pro $y \neq 0$ platí

$$\frac{\mathrm{d}y}{y} = -a(x)\,\mathrm{d}x,$$

$$\ln|y| = -\int a(x)\,\mathrm{d}x + c, \qquad c \in \mathbb{R}.$$

Odsud (podobně jako na straně 19)

$$y = C\,e^{-\int a(x)\,\mathrm{d}x}, \quad C \in \mathbb{R} \setminus \{0\},$$

kde C je nenulová konstanta. Protože volbou $C = 0$ dostáváme triviální řešení $y \equiv 0$, povolíme $C \in \mathbb{R}$ libovolné. *Obecné řešení* rovnice (LH) je tvaru

$$y(x, C) = Ce^{-\int a(x)\,\mathrm{d}x}, \qquad C \in \mathbb{R}, \tag{4.5}$$

a každé partikulární řešení rovnice (LH) obdržíme vhodnou volbou konstanty C. Označíme-li y_{p0} libovolné netriviální partikulární řešení, je možno obecné řešení rovnice (LH) psát ve tvaru

$$y(x, C) = Cy_{p0}(x), \qquad C \in \mathbb{R}. \tag{4.6}$$

Řešení homogenní LDR „selskou úvahou". Slovně lze problém řešení lineární homogenní rovnice $y' = -a(x)y$ formulovat následovně: nalezněte funkci y takovou, že její derivace je rovna funkci samotné, vynásobené navíc faktorem $(-a(x))$. Uvědomíme-li si, že exponencaální funkce je rovna svojí derivaci, můžeme řešení problému hledat ve tvaru exponenciální funkce, kde se po derivaci faktor $(-a(x))$ objeví jako derivace vnitřní složky. V exponentu tedy musí figurovat výraz, jehož derivace je $(-a(x))$. Řešením homogenní rovnice je tedy funkce $y = e^{-\int a(x)\,\mathrm{d}x}$ a (jak plyne z linearity) i její libovolný násobek. Vidíme, že dostáváme opět (4.5). Homogenní rovnici lze tedy se znalostí obecné teorie vyřešit překvapivě snadno.

4.2. Metoda variace konstanty

Poznámka 4.7. Než začneme hledat řešení nehmogenní rovnice, prozkoumejme, jak se lineární operátor L chová vzhledem k součinu funkcí. Postupným rozepsáním definice operátoru, derivací součinu, částečným vytknutím a opětovným použitím definice operátoru L dostáváme pro libovolné dvě diferencovatelné funkce u, v

$$\begin{aligned} L[u \cdot v](x) &= \Big(u(x)v(x)\Big)' + a(x)u(x)v(x) \\ &= u'(x)v(x) + u(x)v'(x) + a(x)u(x)v(x) \\ &= v(x)\Big(u'(x) + a(x)u(x)\Big) + u(x)v'(x) \end{aligned}$$

$$= v(x)L[u](x) + u(x)v'(x).$$

Tento výpočet ukazuje, že pokud platí $L[u] = 0$, tj. pokud je funkce u řešením asociované homogenní diferenciální rovnice, je možno řešení nehomogenní rovnice $L[y] = b(x)$ hledat ve tvaru součinu $y(x) = u(x)v(x)$, kde funkce $v(x)$ splňuje vztah

$$b(x) = L[u \cdot v](x) = v(x)L[u](x) + u(x)v'(x) = 0 + u(x)v'(x) = u(x)v'(x),$$

tj. $v'(x) = b(x) \big/ u(x)$. Odsud však funkci v můžeme nalézt již pouhou integrací a součin $u(x)v(x)$ poté bude řešením nehomogenní rovnice. Abychom tyto úvahy více ozřejmili, zapamatujeme si hlavní myšlenku – *budeme hledat řešení nehomogenní rovnice ve tvaru součinu nějaké funkce a řešení asociované homogenní rovnice* – a projdeme si všechny úvahy v následujícím odstavci ještě jednou v „běžném“ neoperátorovém označení.

Poznámka 4.8 (metoda variace konstanty). Partikulární řešení y_p nehomogenní LDR hledáme ve tvaru

$$y_p(x) = K(x)y_{p0}(x), \tag{4.7}$$

kde $y_{p0}(x)$ je nějaké pevné netriviální řešení asociované homogenní LDR a $K(x)$ zatím neznámá spojitě diferencovatelná funkce. Jedná se vlastně o postup, při kterém konstantu C ve vzorci (4.6) nahradíme funkcí $K(x)$ — proto se tato metoda nazývá *metoda variace konstanty*. Výpočtem derivace y_p' obdržíme

$$y_p'(x) = K'(x)y_{p0}(x) + K(x)y_{p0}'(x).$$

Dosazením do (L) dostáváme

$$K'(x)y_{p0}(x) + K(x)y_{p0}'(x) + a(x)K(x)y_{p0}(x) = b(x)$$

a odsud

$$K'(x)y_{p0}(x) + K(x)\big[y_{p0}'(x) + a(x)y_{p0}(x)\big] = b(x).$$

Protože $y_{p0}(x)$ je řešením homogenní LDR, je výraz v hranatých závorkách roven nule a platí

$$K'(x)y_{p0}(x) = b(x). \tag{4.8}$$

Odsud již snadno vyjádříme derivaci neznámé funkce $K'(x)$ a integrováním nalezneme funkci $K(x)$. Dosazením do (4.7) nalezneme partikulární řešení nehomogenní LDR a z Věty 4.1 obdržíme obecné řešení nehomogenní LDR. Započteme-li navíc do funkce $K(x)$ i integrační konstantu C, obdržíme ze vzorce (4.7) nikoliv pouze partikulární, ale již přímo obecné řešení nehomogenní LDR.

V praxi je výhodné zapamatovat si tento postup a pokaždé jej aplikovat na příslušnou rovnici. Všimněme si, že po dosazení (4.7) do (L) se členy obsahující funkci $K(x)$ vyruší a rovnice bude obsahovat funkci $K(x)$ pouze prostřednictvím derivace této funkce $K'(x)$, jak plyne z (4.8). Pokud se toto nestane, je ve výpočtu obsažena chyba.
Jinou možností jak najít řešení LDR prvního řádu je přímé dosazení koeficientů rovnice do následujícího vzorce.

Věta 4.2 (vzorec pro obecné řešení nehomogenní LDR). *Obecné řešení rovnice* (L) *je*

$$y(x,C) = e^{-\int a(x)\,\mathrm{d}x}\left[\int b(x)e^{\int a(x)\,\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x + C\right] = \frac{\int b(x)e^{\int a(x)\,\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x + C}{e^{\int a(x)\,\mathrm{d}x}}, \quad C \in \mathbb{R}. \tag{4.9}$$

Přitom každý neurčitý integrál vyjadřuje jednu libovolnou z primitivních funkcí (integrační konstanty již neuvažujeme).

Shrňme si metody řešení lineární diferenciální rovnice do tvaru algoritmů.

♔ **ALGORITMUS 3 (1. algoritmus řešení nehomogenní LDR prvního řádu).**

(i) Nalezneme asociovanou homogenní LDR, tj. nahradíme pravou stranu rovnice (L) nulovou funkcí.
(ii) Tuto homogenní rovnici řešíme pomocí vzorce (4.5) (případně separací proměnných). Výsledkem je obecné řešení homogenní rovnice.
(iii) Partikulární řešení původní rovnice hledáme ve tvaru (4.7). Vypočteme derivaci tohoto řešení a dosadíme do zadané nehomogenní rovnice.
(iv) Algebraickými úpravami vypočteme derivaci $K'(x)$ hledané neznámé funkce $K(x)$.
(v) Integrací funkce $K'(x)$ nalezneme hledaný koeficient $K(x)$. Integrační konstantu volíme libovolně (nejčastěji nulovou).
(vi) Nalezenou funkci $K(x)$ dosadíme do (4.7) a obdržíme partikulární řešení nehomogenní LDR.
(vii) Obecné řešení nehomogenní LDR získáme ze vzorce (4.3) jako součet obecného řešení homogenní rovnice a partikulárního řešení rovnice nehomogenní.
(viii) Je-li zadána počáteční podmínka, dosadíme tuto podmínku do obecného řešení, získanou rovnici vyřešíme vzhledem ke konstantě C a tuto hodnotu konstanty použijeme zpět v obecném řešení.

♔ **ALGORITMUS 4 (2. algoritmus řešení nehomogenní LDR prvního řádu).**

(i) Postupujeme podle vzorce (4.9). Identifikujeme nejprve funkce $a(x)$ a $b(x)$.
(ii) Vypočteme integrál $\displaystyle\int a(x)\,\mathrm{d}x$.
(iii) Upravíme výraz $e^{\int a(x)\,\mathrm{d}x}$.
(iv) Vypočteme integrál $\displaystyle\int b(x)e^{\int a(x)\,\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x$
(v) Sestavíme obecné řešení nehomogenní LDR ze vzorce (4.9).
(vi) Je-li zadána počáteční podmínka, dosadíme tuto podmínku do obecného řešení, získanou rovnici vyřešíme vzhledem ke konstantě C a tuto hodnotu konstanty použijeme zpět v obecném řešení.

Kdekoliv se tomto algoritmu vyskytuje neurčitý integrál, volíme v tomto integrálu integrační konstantu libovolně, nejčastěji rovnu nule.

Oba předchozí algoritmy jsou ekvivalentní — oba vedou k výpočtu dvou integrálů, tyto integrály jsou pro obě metody stejné. Pokud tyto integrály umíme vypočítat, je výsledkem algoritmu řešení lineární diferenciální rovnice prvního řádu. Toto řešení vždy obdržíme v explicitním tvaru.

Poznámka 4.9 (integrační faktor LDR prvního řádu). Existuje ještě jedna efektní metoda hledání obecného řešení diferenciální rovnice: Výraz $e^{\int a(x)\,\mathrm{d}x}$ se nazývá *integrační faktor* LDR a pomocí tohoto výrazu lze rovnici rychle vyřešit. Rovnici (L) vynásobíme integračním faktorem

$$y'e^{\int a(x)\,\mathrm{d}x} + a(x)e^{\int a(x)\,\mathrm{d}x}y = b(x)e^{\int a(x)\,\mathrm{d}x}$$

a všimneme si, že na levé straně stojí rozepsaná derivace součinu. Rovnici proto lze upravit na tvar

$$\left(ye^{\int a(x)\,\mathrm{d}x}\right)' = b(x)e^{\int a(x)\,\mathrm{d}x}.$$

Integrací rovnice odstraníme derivaci na levé straně a obdržíme

$$ye^{\int a(x)\,\mathrm{d}x} = \int b(x)e^{\int a(x)\,\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x + C,$$

kde každý z integrálů označuje libovolnou z primitivních funkcí a C je integrační konstanta. Nyní stačí osamostatnit na levé straně hledanou funkci y, čímž obdržíme právě vzorec (4.9).

Příklad 4.3 (variace konstanty). Hledejme řešení rovnice

$$y' = 1 + 3y \operatorname{tg} x. \tag{4.10}$$

Řešení. Přepíšeme-li rovnici do tvaru

$$y' - 3y \operatorname{tg} x = 1, \tag{4.11}$$

vidíme ihned, že se jedná o nehomogenní lineární diferenciální rovnici prvního řádu. Nejprve nalezneme řešení asociované homogenní rovnice

$$y' - 3y \operatorname{tg} x = 0. \tag{4.12}$$

Po separaci proměnných obdržíme pro $y \not\equiv 0$ rovnici

$$\frac{\mathrm{d}y}{y} = 3 \operatorname{tg} x \, \mathrm{d}x$$

a odsud po integraci

$$\ln|y| = -3\ln|\cos x| + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Odstraníme logaritmy a absolutní hodnoty a přejmenujeme integrační konstantu postupem, který jsme používali již u diferenciálních rovnic se separovanými proměnnými

$$\begin{aligned} \ln|y| &= \ln\bigl(e^c|\cos x|^{-3}\bigr), \\ |y| &= e^c|\cos x|^{-3}, \\ y &= C\cos^{-3} x, \end{aligned}$$

kde $C = \pm e^c \neq 0$ je nová nenulová konstanta. Protože však volbou $C = 0$ obdržíme konstantní funkci $y = 0$, která je také řešením (4.12), připustíme $C \in \mathbb{R}$ libovolné. Homogenní rovnice (4.12) má tedy obecné řešení

$$y = C\cos^{-3} x, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

Nyní stačí nalézt libovolné partikulární řešení nehomogenní rovnice (4.11). Toto řešení budeme hledat ve tvaru

$$y = K(x)\cos^{-3} x, \tag{4.13}$$

kde $K(x)$ je funkce, již musíme určit. Má-li y být řešením nehomogenní rovnice, musí po dosazení za y zadaná rovnice přejít v identitu. Vypočteme tedy nejprve derivaci y'

$$y' = K'(x)\cos^{-3} x + K(x)3\cos^{-4} x \sin x$$

a dosadíme tuto derivaci y' a funkci y do (4.11)

$$K'(x)\cos^{-3} x + K(x)3\cos^{-4} x\sin x - 3K(x)\cos^{-3} x \operatorname{tg} x = 1.$$

Vidíme, že druhý a třetí člen na levé straně rovnice se v souladu s naším očekáváním odečtou a dostáváme

$$K'(x)\cos^{-3} x = 1.$$

Odsud

$$K'(x) = \cos^3 x$$

a po integraci

$$K(x) = \int \cos^3 x \, \mathrm{d}x = \int (1 - \sin^2 x)\cos x \, \mathrm{d}x = \sin x - \frac{\sin^3 x}{3},$$

přičemž integrál jsme vypočetli substituční metodou při substituci $\sin x = t$ a integrační konstantu volíme nulovou. Dosazením do (4.13) obdržíme partikulární řešení rovnice (4.10)

$$y = \frac{\sin x}{\cos^3 x} - \frac{\sin^3 x}{3\cos^3 x}.$$

Sečtením tohoto partikulárního řešení a obecného řešení homogenní rovnice (4.12) obdržíme výsledné obecné řešení rovnice (4.10) ve tvaru

$$y(x) = \frac{\sin x}{\cos^3 x} - \frac{\sin^3 x}{3\cos^3 x} + \frac{C}{\cos^3 x}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Příklad 4.4 (variace konstanty). Hledejme řešení počáteční úlohy

$$y' = x(1 - 2y), \quad y(0) = 3. \tag{4.14}$$

Řešení. Rovnici přepíšeme do tvaru

$$y' + 2xy = x, \tag{4.15}$$

odkud vidíme, že se skutečně jedná o lineární diferenciální rovnici. Homogenní rovnice má tvar

$$y' + 2xy = 0$$

a obecné řešení $y = Ce^{-x^2}$, $C \in \mathbb{R}$. Partikulární řešení rovnice (4.15) hledáme ve tvaru $y = K(x)e^{-x^2}$. Derivace této funkce je $y' = K'(x)e^{-x^2} + K(x)(-2x)e^{-x^2}$. Po dosazení do (4.15) obdržíme

$$K'(x)e^{-x^2} + K(x)(-2x)e^{-x^2} + 2xK(x)e^{-x^2} = x$$

a po výpočtu $K'(x)$

$$K'(x) = xe^{x^2}.$$

Substituční metodou při substituci $x^2 = t$ nalezneme

$$K(x) = \frac{1}{2}e^{x^2}$$

a partikulární řešení má tvar

$$y = K(x)e^{-x^2} = \frac{1}{2}.$$

Okamžitě vidíme, že toto partikulární řešení zadanou počáteční podmínku nesplňuje. Nalezneme tedy nejprve obecné řešení rovnice (4.14)

$$y = \frac{1}{2} + Ce^{-x^2}, \quad C \in \mathbb{R},$$

dosadíme počáteční podmínku

$$3 = \frac{1}{2} + Ce^0,$$

vypočteme $C = \frac{5}{2}$ a tuto hodnotu dosadíme do obecného řešení. Obdržíme takto funkci

$$y(x) = \frac{1}{2} + \frac{5}{2}e^{-x^2},$$

která je řešením počáteční úlohy (4.14).

Úloha 4.2. Rovnice z předchozího příkladu je navíc i rovnice se separovanými proměnnými. Vyřešte ji i pomocí separace proměnných.

Příklad 4.5 (variace konstanty). Hledejme řešení rovnice

$$xy' + y = x\ln(x + 1). \tag{4.16}$$

Řešení. Jedná se o lineární diferenciální rovnici

$$y' + \frac{1}{x}y = \ln(x + 1), \tag{4.17}$$

kde $a(x) = \dfrac{1}{x}$ a $b(x) = \ln(x+1)$. Řešení této rovnice bude definováno na každém podintervalu intervalu $(-1, \infty)$, který neobsahuje bod 0. Řešení homogenní rovnice

$$y' + \frac{1}{x}y = 0$$

má podle (4.5) tvar

$$y = Ce^{-\int a(x)\,\mathrm{d}x} = Ce^{-\ln|x|} = \frac{C}{|x|} = \frac{K}{x},$$

kde $K = \pm C \in \mathbb{R}$ je nová konstanta, která nám umožní „odstranit" absolutní hodnotu. Partikulární řešení nehomogenní rovnice (4.17) hledáme ve tvaru $y = K(x)\dfrac{1}{x}$. Podle (4.8) platí

$$K'(x)\frac{1}{x} = \ln(x+1)$$

a odsud

$$K'(x) = x\ln(x+1).$$

Integrací per-partés vypočteme

$$K(x) = \frac{x^2}{2}\ln(x+1) - \frac{x^2}{4} + \frac{x}{2} - \frac{1}{2}\ln(x+1) + C$$

a dosazením do (4.7) obdržíme obecné řešení rovnice (4.16) ve tvaru

$$\begin{aligned} y &= K(x)\frac{1}{x} \\ &= \frac{x}{2}\ln(x+1) - \frac{x}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2x}\ln(x+1) + \frac{C}{x}, \quad C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

(Protože jsme integrační konstantu C započetli do funkce $K(x)$, obdržíme ze vzorce (4.7) ne pouze partikulární, ale již obecné řešení rovnice.)

Příklad 4.6 (dosazení do vzorce). Hledejme řešení počáteční úlohy

$$xy' + xy + y - x^2 = 0, \quad y(1) = -1. \tag{4.18}$$

Řešení. Přepíšeme-li rovnici do tvaru

$$y' + \frac{x+1}{x}y = x,$$

vidíme, že se jedná o lineární diferenciální rovnici, přičemž $a(x) = \dfrac{x+1}{x}$ a $b(x) = x$. Budeme postupovat podle vzorce (4.9). Platí

$$\int a(x)\,\mathrm{d}x = \int \frac{x+1}{x}\,\mathrm{d}x = x + \ln|x|,$$

přičemž vzhledem k počáteční podmínce lze předpokládat, že pracujeme na intervalu $(0, \infty)$ a absolutní hodnotu lze vynechat. Potom

$$\begin{aligned} e^{\int a(x)\,\mathrm{d}x} &= e^{x+\ln x} = e^x e^{\ln x} = xe^x, \\ \int b(x)e^{\int a(x)\,\mathrm{d}x} &= \int x^2 e^x\,\mathrm{d}x = e^x(x^2 - 2x + 2), \end{aligned}$$

kde druhý integrál jsme vypočetli dvojnásobnou integrací per-partés a v každém integrálu volíme nulovou integrační konstantu. Podle (4.9) je obecným řešením rovnice funkce

$$y = \frac{e^x(x^2 - 2x + 2) + C}{xe^x} = x - 2 + \frac{2}{x} + \frac{C}{xe^x}.$$

Po dosazení počáteční podmínky $y(1) = -1$ obdržíme pro konstantu C rovnici

$$-1 = 1 - 2 + 2 + \frac{C}{e}.$$

Řešení této rovnice je $C = -2e$ a řešením počáteční úlohy (4.18) je tedy funkce

$$y = x - 2 + \frac{2}{x} - \frac{2e}{xe^x} = x - 2 + \frac{2}{x} - \frac{2}{x}e^{1-x}.$$

Úloha 4.3. Řešte následující diferenciální rovnice. Určete obecné řešení a je-li zadána počáteční podmínka, určete i příslušné partikulární řešení.

1. $(x+1)y' - 2y = (x+1)^4$

2. $(2x+1)y' + y = \sqrt{2x+1} + 3$

3. $y' \cos x + y \sin x = 1$

4. $y' + y \cos x = 2 \sin x \cos x$

5. $y' \cos x = (y + 2\cos x) \sin x$

6. $y' = 1 + \dfrac{2x-1}{x^2} y$

7. $y' + y = x, \quad y(0) = 3$

8. $xy' + y = x^2, \quad y(1) = -2$

9. $xy' + 2y = e^{-x^2}$

10. $y' \cos x - y \sin x = \sin 2x$

11. $y' - y = \dfrac{1+x^2}{x} e^x$

12. $y' - y \operatorname{tg} x = \sin x, \quad y(0) = 0$

13.† $y' + \dfrac{x}{x^2-1} y = \dfrac{\arcsin x}{1-x^2}$

Úloha 4.4. Platí-li v rovnici (L) rovnost $a(x) \equiv b(x)$, jedná se o rovnici se separovanými proměnnými. Vskutku, uvažujte lineární diferenciální rovnici

$$y' + a(x)y = a(x)$$

a odseparujte v této rovnici proměnné x a y.

5. Exaktní diferenciální rovnice

Exaktní diferenciální rovnice jsou rovnice, které do jisté míry souvisejí s diferenciálním počtem funkcí dvou proměnných. Připomeňme si proto nejprve některé základní pojmy z teorie těchto funkcí.

Poznámka 5.1 (symbolický zápis parciálních derivací). V diferenciálním počtu funkcí více proměnných je základním pojmem pojem *parciální derivace* – viz [**7**]. Je-li funkce $F(x, y)$ funkcí dvou proměnných, označujeme parciální derivaci podle x symbolem $\dfrac{\partial F(x,y)}{\partial x}$. Podobně označujeme i parciální derivaci podle proměnné y. V případech, kdy nebude docházet k nejasnostem, můžeme argument „(x, y)“ vynechávat a psát pouze $\dfrac{\partial F}{\partial x}$ a $\dfrac{\partial F}{\partial y}$.

Definice (totální diferenciál, kmenová funkce). Nechť $F(x, y)$ je funkce dvou proměnných, která má spojité parciální derivace. Výraz

$$\mathrm{d}F(x,y) = \frac{\partial F(x,y)}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial F(x,y)}{\partial y}\,\mathrm{d}y \tag{5.1}$$

se nazývá *totální diferenciál funkce* $F(x, y)$. Funkce $F(x, y)$ se nazývá *kmenová funkce* tohoto diferenciálu.

Definice (exaktní DR). Nechť $P(x, y)$ a $Q(x, y)$ jsou funkce dvou proměnných, které mají spojité parciální derivace. Řekneme, že diferenciální rovnice

$$P(x, y) + Q(x, y)y' = 0$$

je *exaktní*, jestliže výraz

$$P(x, y)\,\mathrm{d}x + Q(x, y)\,\mathrm{d}y \tag{T}$$

je totálním diferenciálem nějaké funkce dvou proměnných.

Poznámka 5.2 (ekvivalentní tvar exaktní DR). Exaktní diferenciální rovnici častěji uvádíme v ekvivalentním tvaru pomocí totálního diferenciálu kmenové funkce

$$P(x, y)\,\mathrm{d}x + Q(x, y)\,\mathrm{d}y = 0. \tag{E}$$

Tento tvar získáme nahrazením derivace y' podílem diferenciálů $\mathrm{d}y/\,\mathrm{d}x$ a formálním vynásobením rovnice diferenciálem $\mathrm{d}x$. O funkci Q předpokládáme, že nemá nulový bod v oblasti našeho zájmu (tj. např. v okolí počáteční podmínky). Potom má počáteční úloha pro rovnici (E) jediné řešení $y = y(x)$[11].

Poznámka 5.3. Rovnice (E) je tedy exaktní právě tehdy, když existuje funkce $F(x, y)$ proměnných x a y s vlastnostmi

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial x} = P(x, y) \quad \text{a} \quad \frac{\partial F(x, y)}{\partial y} = Q(x, y). \tag{5.2}$$

Věta 5.1 (řešení exaktní DR). *Nechť $F(x, y)$ je kmenová funkce totálního diferenciálu* (T). *Rovnice* (E) *má obecné řešení implicitně určené rovnicí*

$$F(x, y) = C, \qquad C \in \mathbb{R}. \tag{5.3}$$

Poznámka 5.4 (metodická). Z předešlého vidíme, že chceme-li identifikovat a řešit exaktní diferenciální rovnice, musíme

- poznat, kdy je výraz typu (T) totálním diferenciálem nějaké funkce,
- umět nalézt z vyjádření totálního diferenciálu kmenovou funkci.

Následující věta udává efektivní kriterium, pomocí kterého lze zjistit, zda rovnice je nebo není exaktní, tj. zda (T) je či není totálním diferenciálem nějaké kmenové funkce.

Věta 5.2 (charakterizace totálního diferenciálu). *Nechť funkce $P(x, y)$ a $Q(x, y)$ mají spojité parciální derivace na otevřené souvislé množině $M \subseteq \mathbb{R}^2$. Výraz* (T) *je na množině M totálním diferenciálem nějaké funkce právě tehdy, když na M platí*

$$\frac{\partial P(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x}. \tag{5.4}$$

Podmínka spojitosti parciálních derivací bývá v aplikacích téměř bez výhrady splněna, stačí tedy výpočtem ověřit (nebo vyvrátit) vztah (5.4).

5.1. Metoda nalezení kmenové funkce

Předpokládejme, že jsme pomocí Věty 5.2 ověřili, že výraz (T) je totálním diferenciálem. Je-li funkce $F(x, y)$ kmenovou funkcí tohoto diferenciálu, musí platit vztahy (5.2). Integrujeme-li první z těchto vztahů podle proměnné x, obdržíme

$$F(x, y) = \int P(x, y)\,\mathrm{d}x + C(y), \tag{5.5}$$

[11] Pokud tato podmínka není splněna, ale funkce P nemá nulový bod, lze úlohu převrátit a hledat x jako funkci y, tj. $x = x(y)$.

kde při integrování podle x považujeme y za konstantu (podobně jako při výpočtu parciální derivace) a $C(y)$ je integrační konstanta. Tato konstanta nezávisí na x, obecně se však může jednat o veličinu, která *závisí na* y. Obdrženou rovnost zderivujeme podle y

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\int P(x,y)\,\mathrm{d}x + C'(y),$$

kde $C'(y)$ je obyčejná derivace funkce jedné proměnné. Vzhledem k (5.2) je levá strana rovna $Q(x,y)$. Dosadíme tedy na levou stranu $Q(x,y)$ a zjednodušíme výraz na pravé straně. Obdržíme rovnici pro $C'(y)$, kterou vyřešíme a integrací nalezneme hledanou funkci $C(y)$. (Při úpravách nutně pro $C'(y)$ vychází rovnice, která *neobsahuje* proměnnou x. Pokud tomu tak není, dopustili jsme se při počítání chyby, nebo výraz (T) není totálním diferenciálem.) Získanou funkci $C(y)$ dosadíme do (5.5) a máme nalezenu kmenovou funkci $F(x,y)$.

Poznámka 5.5 (alternativní postup). Tento postup je možno i modifikovat tak, že nejprve integrujeme druhou rovnost v (5.2) podle y (integrační konstanta bude obecně funkcí proměnné x), obdržený výraz parciálně zderivujeme podle x, dosadíme $P(x,y)$, určíme $C'(x)$ a odsud $C(x)$. Přitom integrály, které počítáme při tomto druhém postupu *nemusí* být totožné s integrály, které je třeba počítat prvním postupem. Oba postupy *nemusí být* stejně obtížné. Proto je nutno mít na paměti obě možnosti a v konkrétním případě volit jednodušší variantu.

♔ **ALGORITMUS 5 (řešení exaktní diferenciální rovnice).**

(i) DR přepíšeme do tvaru (E) a pomocí Věty 5.2 ověříme, že se jedná o exaktní diferenciální rovnici.
(ii) Nalezneme kmenovou funkci totálního diferenciálu postupem popsaným výše.
(iii) Je-li $F(x,y)$ nalezená kmenová funkce, je obecné řešení implicitně určeno vzorcem (5.3).
(iv) Je-li možné převést řešení do explicitního tvaru (vyjádřit y jako funkci proměnné x nebo x jako funkci proměnné y), provedeme to.
(v) Je-li zadána počáteční podmínka, dosadíme tuto podmínku do obecného řešení, získanou rovnici vyřešíme vzhledem ke konstantě C a tuto konstantu použijeme zpět v obecném řešení.

♖ **Příklad 5.1.** Hledejme všechna řešení diferenciální rovnice

$$2xy + 4x^3y + (x^2 + x^4)y' = 0.$$

Řešení. Ověřme, že se jedná o exaktní DR. Přepíšeme rovnici do tvaru

$$(2xy + 4x^3y)\,\mathrm{d}x + (x^2 + x^4)\,\mathrm{d}y = 0. \tag{5.6}$$

Označme $P(x,y) = 2xy + 4x^3y$ a $Q(x,y) = x^2 + x^4$. Platí

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = 2x + 4x^3 \quad \text{a} \quad \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} = 2x + 4x^3.$$

Podle Věty 5.2 se skutečně jedná o exaktní diferenciální rovnici. Kmenová funkce $F(x,y)$ musí splňovat $\dfrac{\partial F}{\partial y} = Q$, lze tedy psát

$$F(x,y) = \int Q(x,y)\,\mathrm{d}y = \int (x^2 + x^4)\,\mathrm{d}y = x^2y + x^4y + C(x),$$

kde $C(x)$ je integrační konstanta, která nezávisí na y, může však záviset na x. Abychom znali kmenovou funkci celou, zbývá určit funkci $C(x)$. Dále kmenová funkce musí splňovat $\dfrac{\partial F}{\partial x} = P$. Dosadíme-li do této podmínky, obdržíme

$$2xy + 4x^3y + C'(x) = 2xy + 4x^3y$$

a odsud okamžitě dostáváme $C'(x) = 0$ a po integraci $C(x) = K$, kde K je libovolná integrační konstanta. Volme $K = 0$, tj. $C(x) = 0$. Řešením rovnice (5.6) je funkce zadaná implicitně rovnicí

$$F(x, y) = x^2 y + x^4 y = C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Odsud je okamžitě možné převést obecné řešení do explicitního tvaru, čímž dostáváme

$$y = \frac{C}{x^2 + x^4}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Úloha 5.1. Rovnice z předchozího příkladu je lineární homogenní a má proto separovatelné proměnné. Pokuste se rovnici vyřešit separací proměnných a oba postupy a výsledky porovnejte (výsledky musí být samozřejmě totožné).

Poznámka 5.6 (integrační faktor). Vydělíme-li rovnici (5.6) faktorem x, obdržíme rovnici

$$(2y + 4x^2 y)\,\mathrm{d}x + (x + x^3)\,\mathrm{d}y = 0, \tag{5.7}$$

která je s původní rovnicí ekvivalentní, tj. má stejnou množinu řešení, avšak není již exaktní, jak se čtenář může snadno přesvědčit výpočtem příslušných parciálních derivací! Na tomto příkladě vidíme, že vlastnost rovnice být nebo nebýt exaktní je *velice citlivá* a tuto vlastnost lze porušit pouhým vynásobením rovnice nějakým výrazem.
Toto se dá říci i naopak: někdy je možné rovnici, která není exaktní, upravit na rovnici, která exaktní je, vynásobením vhodným výrazem $m(x, y)$ (který obsahuje x a y a je tedy obecně funkcí dvou proměnných). Tento výraz potom nazýváme *integrační faktor rovnice*. Například integračním faktorem rovnice (5.7) je výraz $m(x, y) = x$, protože po vynásobení rovnice (5.7) tímto výrazem obdržíme rovnici (5.6), která je exaktní. Problematika nalezení integračního faktoru je v obecném případě přibližně stejně složitý problém, jako problematika nalezení obecného řešení rovnice. V jednoduchých příkladech (například pokud je integračním faktorem funkce pouze jedné proměnné) lze však integrační faktor poměrně snadno nalézt a převést rovnici, která exaktní není, na rovnici, která exaktní je. Bližší poučení o této problematice může čtenář nalézt v odborné literatuře, např. [**11**, kap. 17.4].

Příklad 5.2. Hledejme řešení rovnice

$$\left(\frac{1}{x} - \frac{y}{x^2 + y^2}\right)\mathrm{d}x + \left(\frac{x}{x^2 + y^2} - y\right)\mathrm{d}y = 0.$$

Řešení. Označme $P(x, y) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{y}{x^2 + y^2}$ a $Q(x, y) = \dfrac{x}{x^2 + y^2} - y$. Platí

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{x^2 + y^2 - 2y^2}{(x^2 + y^2)^2} \quad \text{a} \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{x^2 + y^2 - 2x^2}{(x^2 + y^2)^2}.$$

Po malé úpravě zjistíme, že $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$ a jedná se skutečně o exaktní rovnici. Budeme hledat kmenovou funkci $F(x, y)$. Protože platí $P = \dfrac{\partial F}{\partial x}$, lze psát

$$F(x, y) = \int P(x, y)\,\mathrm{d}x = \int \left(\frac{1}{x} - \frac{y}{x^2 + y^2}\right)\mathrm{d}x = \ln|x| - \operatorname{arctg}\frac{x}{y} + C(y).$$

Protože dále platí $Q = \dfrac{\partial F}{\partial y}$, dostáváme po dosazení a derivování

$$\frac{x}{x^2 + y^2} - y = \frac{1}{1 + \frac{x^2}{y^2}}\,\frac{x}{y^2} + C'(y).$$

Algebraickými úpravami odsud vypočteme $C'(y) = -y$ a po integraci $C(y) = \int C'(y)\,\mathrm{d}y = = -\dfrac{y^2}{2}$. Kmenovou funkcí je funkce $F(x,y) = \ln|x| - \dfrac{y^2}{2} - \operatorname{arctg}\dfrac{x}{y}$ a obecným řešením rovnice je funkce zadaná implicitně rovnicí

$$\ln|x| - \frac{y^2}{2} - \operatorname{arctg}\frac{x}{y} = C, \text{ kde } C \in \mathbb{R}.$$

Úloha 5.2. Uvažujme rovnici

$$\Big(\frac{1}{x} - \frac{y}{x^2+y^2}\Big)\,\mathrm{d}x + \Big(\frac{x}{x^2+y^2} - \frac{1}{y}\Big)\,\mathrm{d}y = 0.$$

(i) Ukažte, že se jedná o exaktní diferenciální rovnici a nalezněte postupem analogickým postupu v minulém příkladě obecné řešení ve tvaru

$$\ln|x| - \ln|y| - \operatorname{arctg}\frac{x}{y} = C, \text{ kde } C \in \mathbb{R}. \tag{5.8}$$

(ii) Kromě $x \neq 0$ a $y \neq 0$ předpokládejte navíc $x^2 + y^2 - xy \neq 0$ a ukažte, že zadanou rovnici lze pomocí algebraických úprav přepsat do tvaru

$$y\,\mathrm{d}x - x\,\mathrm{d}y = 0,$$

což je rovnice se separovanými proměnnými. Nalezněte obecné řešení této rovnice ve tvaru

$$y = Kx, \qquad K \in \mathbb{R} \setminus \{0\}. \tag{5.9}$$

(iii) S výjimkou případu $x^2+y^2-xy = 0$ jsou rovnice, které jste řešili v předchozích bodech ekvivalentní a mají proto stejné množiny řešení. Porovnejte tato řešení a rozmyslete si, jak by bylo možné z řešení (5.8) obdržet (5.9).

Úloha 5.3. Následující diferenciální rovnice jsou exaktní. Nalezněte jejich obecná řešení.

1. $2xy\,\mathrm{d}x + (x^2+1)\,\mathrm{d}y = 0$

2. $(3x^2y^2 + 7)\,\mathrm{d}x + 2x^3y\,\mathrm{d}y = 0$

3. $(ye^{xy} + 2x)\,\mathrm{d}x + (xe^{xy} + 1)\,\mathrm{d}y = 0$

4. $2x\cos^2 y\,\mathrm{d}x - (x^2\sin 2y - \sin y)\,\mathrm{d}y = 0$

5. $x^2 - y^2 + (5 - 2xy)y' = 0$

6. $x + \ln y + \Big(\dfrac{x}{y} + \sin y\Big)y' = 0$

7. $\sin y + [(x+1)\cos y - y\sin y]y' = 0$

8. $(2x^3 - xy^2)\,\mathrm{d}x + (2y^3 - x^2y)\,\mathrm{d}y = 0$

9. $\dfrac{x}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}y = \Big(\dfrac{y}{x^2+y^2} - 1\Big)\,\mathrm{d}x$

10. $\dfrac{x}{\sqrt{x^2-y^2}}\,\mathrm{d}x = \Big(\dfrac{y}{\sqrt{x^2-y^2}} + 1\Big)\,\mathrm{d}y$

11. $y\,\mathrm{d}x + \Big(x - \dfrac{y}{\sqrt{1+y^2}}\Big)\,\mathrm{d}y = 0$

12. $(1 + x\sqrt{x^2+y^2})\,\mathrm{d}x + (\sqrt{x^2+y^2} - 1)y\,\mathrm{d}y = 0$

13. $\Big(\dfrac{\ln(\ln y)}{x} + \dfrac{2}{3}xy^3\Big)\,\mathrm{d}x + \Big(\dfrac{\ln x}{y\ln y} + x^2y^2\Big)\,\mathrm{d}y = 0$

Úloha 5.4.

(i) Přepište DR se separovanými proměnnými $y' = f(x)g(y)$ do tvaru

$$f(x)\,\mathrm{d}x - \frac{1}{g(y)}\,\mathrm{d}y = 0$$

a ověřte, že tato rovnice je exaktní.

(ii) Ukažte, že je-li $F(x) = \int f(x)\,\mathrm{d}x$ a $G(y) = \int \dfrac{1}{g(y)}\,\mathrm{d}y$, je funkce $F(x) - G(y)$ kmenovou funkcí totálního diferenciálu vystupujícího v rovnici.

(iii) Nalezněte obecné řešení této rovnice a porovnejte tento postup s algoritmem na straně 15.

6. Numerické metody

Na geometrickém významu diferenciálních rovnic uvedeném na straně 12 jsou založeny základní numerické metody pro řešení diferenciálních rovnic prvního řádu. Tyto metody spočívají v tom, že hledanou integrální křivku kreslíme po malých lineárních částech pomocí směrového pole. Řešení tedy aproximujeme po částech lineární funkcí.
Uvažujme počáteční úlohu pro obyčejnou diferenciální rovnici prvního řádu

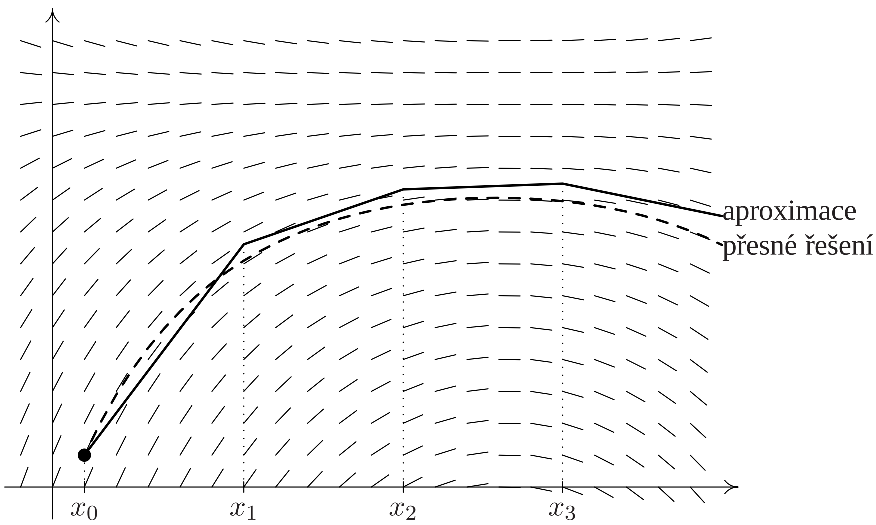
$$y' = \varphi(x, y), \qquad y(x_0) = y_0. \tag{6.1}$$

Pro jednoduchost budeme uvažovat aproximaci takovou lomenou čarou, pro kterou je vodorovná vzdálenost mezi sousedními vrcholy konstantní. Je-li tedy vodorovná vzdálenost mezi jednotlivými uzly (*krok*) rovna h, jsou zlomy postupně v bodech $x_1 = x_0 + h$, $x_2 = x_0 + 2h$, $x_3 = x_0 + 3h, \dots$. Obecný bod, který je od počátečního bodu vzdálen i kroků má x-ovou souřadnici $x_i = x_0 + ih$. Označme odpovídající y-ovou souřadnici jako y_i. Ze souřadnic i-tého bodu vypočteme souřadnice dalšího bodu pomocí vztahů

$$\begin{aligned} x_{i+1} &= x_i + h \\ y_{i+1} &= y_i + k_i h, \end{aligned} \tag{6.2}$$

kde k_i js směrnice lomené čáry na intervalu (x_i, x_{i+1}). Máme-li pevně zvolen krok, je optimální volba směrnice k_i ústředním problémem, který rozhoduje o přesnosti aproximace. Myšlenek, jak tuto směrnici volit, je několik.

Eulerova metoda: Tato metoda je nejjednodušší aproximací, která vychází z předpokladu, že směrové pole se během jednoho kroku příliš nemění. Směrnici proto volíme stejnou, jako je směrnice elementu směrového pole v daném výchozím bodě, tj. $k_i^{(E)} = \varphi(x_i, y_i)$. Geometricky to znamená, že v bodě daném počáteční podmínkou se vydáme směrem daným směrovým elementem v tomto bodě a ujdeme vzdálenost, která na ose x odpovídá kroku délky h (viz Obrázek 11). V dalším bodě se opět vydáme směrem odpovídajícímu směrovému elementu v tomto bodě. Je zřejmé, že přesnost závisí na tom, jak je dlouhý krok této metody. Pro srovnání je na Obrázku 12 zakresleno přesné řešení (plnou čarou)



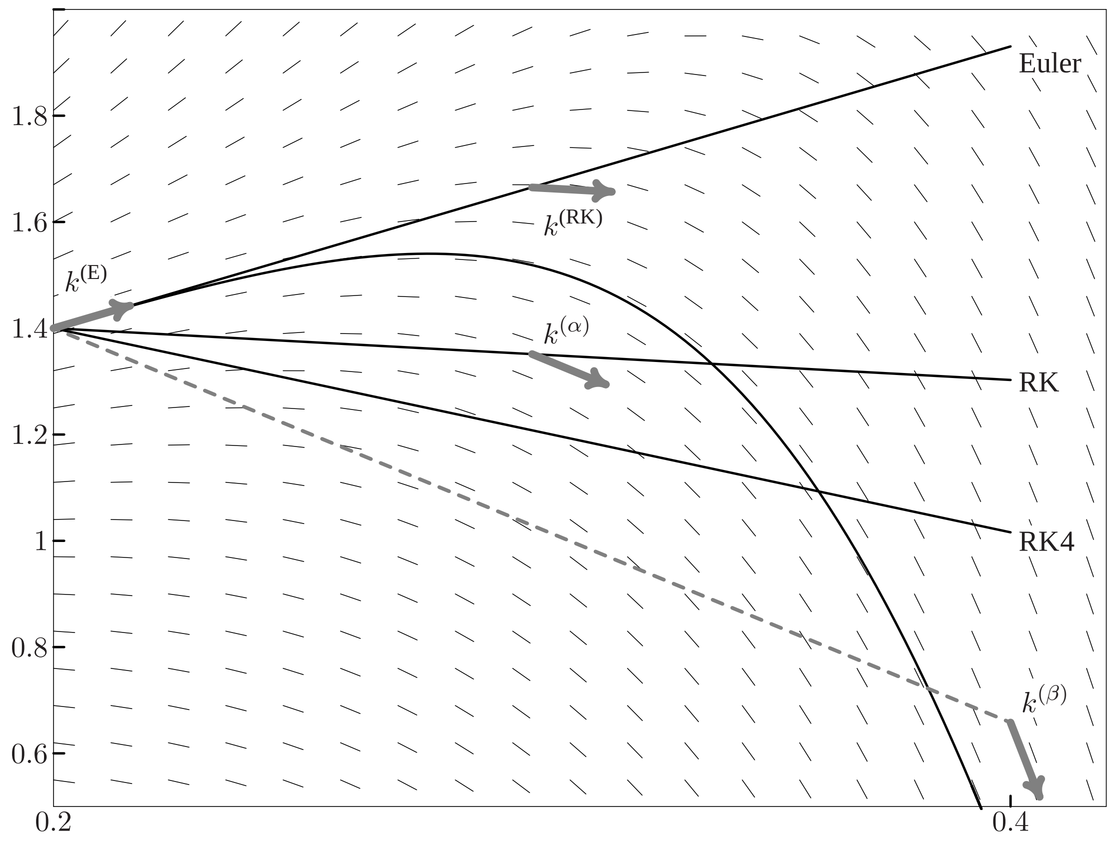
OBRÁZEK 10. Aproximace partikulárního řešení diferenciální rovnice po částech lomenou čarou (metoda Runge-Kutta)

a aproximace Eulerovou metodou pro dva různé kroky (čerchovanou a dvojtečkovanou čerchovanou čarou).

metoda Runge-Kutta druhého řádu: Jedná se o metodu, která se na rozdíl od Eulerovy metody snaží zohlednit i případné změny směrového pole v průběhu jednoho kroku. Při této metodě určujeme směrnice jednotlivých lineárních částí ze vztahu $k_i^{(\mathrm{RK})} = = \varphi\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + k_i^{(\mathrm{E})}\frac{h}{2}\right)$. Geometricky si můžeme situaci představit tak, že nejprve myšlenkově vyjdeme z bodu daného počáteční podmínkou stejným směrem jaký udává Eulerova metoda, ale ujdeme jenom polovinu kroku. V tom místě potom zjistíme směr směrového pole a tento směr použijeme k tomu, abychom z výchozího bodu udělali jeden krok.

metoda Runge-Kutta čtvrtého řádu: Tato metoda zpřesňuje předešlý postup. Volíme $k_i^{(\mathrm{RK4})} = \frac{1}{6}(k_i^{(\mathrm{E})} + 2k_i^{(\mathrm{RK})} + 2k_i^{(\alpha)} + k_i^{(\beta)})$, kde $k_i^{(\alpha)} = \varphi\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + k_i^{(\mathrm{RK})}\frac{h}{2}\right)$ a $k_i^{(\beta)} = \varphi(x_i + h, y_i + k_i^{(\alpha)}h)$. Geometricky to znamená, že

- myšlenkově provedeme *půlkrok* směrem který udává Eulerova metoda a v bodě do kterého dospějeme zjistíme směr $k^{(\mathrm{RK})}$ směrového pole,
- směr $k^{(\mathrm{RK})}$ použijeme k provedení dalšího myšleného *půlkroku* z bodu daného počáteční podmínkou a zjistíme směr $k^{(\alpha)}$ v bodě do kterého dospějeme,
- směr $k^{(\alpha)}$ použijeme k provedení posledního myšleného *celého* kroku z bodu daného počáteční podmínkou a zjistíme směr $k^{(\beta)}$ v bodě do kterého dospějeme,



OBRÁZEK 11. Jeden krok délky 0.2 pro každou z numerických metod, počáteční podmínka $y(0.2) = 1.4$

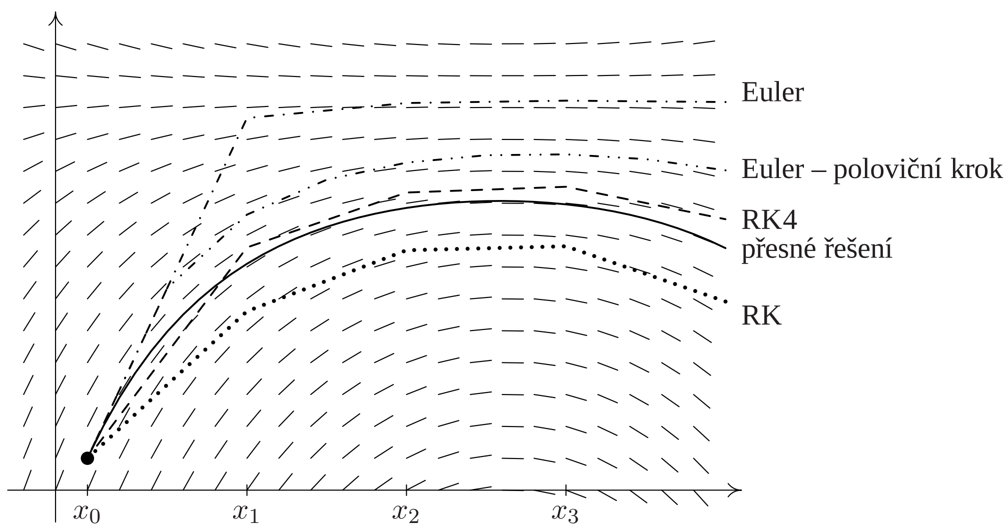
- vypočteme aritmetický průměr všech čtyř směrů, přičemž druhý a třetí započítáváme dvojnásobnou vahou. Obdržený směr $k^{(\mathrm{RK4})}$ nyní použijeme pro konečné provedení celého kroku.

Poznámka 6.1 (srovnání jednotlivých numerických metod). Na Obrázku 12 vidíme přesné řešení diferenciální rovnice a aproximaci použitím jednotlivých numerických metod. Všechny metody mají stejný[12] krok. Pouze Eulerova metoda je zde uvedena i s polovičním krokem. Zde například vidíme, že v našem případě záměrně velkého kroku Eulerova metoda zcela selhává, při polovičním kroku je však již aproximace mnohem lepší. Toto je přirozený a charakteristický jev: při kratším kroku aproximační metody dosahují přesnějších výsledků. Bohužel menší krok s sebou nese potřebu provádět více výpočtů. Těchto více výpočtů přináší i větší riziko, že ve výpočtu dojde k akumulaci zaokrouhlovacích chyb a aproximace opět bude nepřesná. Proto je možné algoritmy dále vylepšovat, například je možno vypočítávat další bod lomené čáry ne z jednoho předchozího bodu, ale z více předcházejících bodů. Dále je možno automaticky měnit délku kroku, aby krok nebyl ani zbytečně malý, ale ani nebezpečně velký. Tato problematika je zpravidla podrobně rozpracována v literatuře věnované numerickým metodám.

Úloha 6.1. Napište pomocí pseudokódu algoritmus Runge–Kutta druhého a čtvrtého řádu pro numerické řešení počáteční úlohy $y' = x + y + x^2 + y^2$, $y(0) = 1$ na intervalu $(0, 10)$ s krokem $0{,}1$.
Návod: Pseudokód je neformální zápis algoritmu, který dodržuje konvence programových jazyků, ale může obsahovat prvky přirozeného jazyka. Například zápis Eulerovy metody by mohl být následující:

```
x:=0;  y:=1; krok:=0.1;    # pocatecni podminky a nastaveni
rovnice(x,y):=x+y+xˆ2+yˆ2; # rovnice
cyklus dokud nebude x>10
   k:=rovnice(x,y);        # smer pro Eulerovu metodu
   x:=x+krok;              # posun o˜krok doprava
   y:=y+krok*k;            # zmena funkcni hodnoty
   vytiskni x,y;           # vypsani bodu na obrazovku
konec cyklu
```

[12] z didaktických důvodů záměrně velmi velký



OBRÁZEK 12. Srovnání jednotlivých numerických metod

Úloha 6.2. Řešte stejnou počáteční úlohu jako Úloze 6.1 ve vašem oblíbeném tabulkovém procesoru.

Poznámka 6.2. Numerické metody řešení DR někdy skrývají nemalá úskalí a pro úspěšnou aplikaci těchto metod je často nezbytná dobrá znalost obecné teorie. Například u integrálních křivek na Obrázku 6 na straně 13 si všimněme, že na určitém intervalu téměř splývají, ale pro větší x se výrazně odlišují. To znamená, že i velice malá nepřesnost, které bychom se dopustili při kreslení směrového pole a při odhadu integrálních křivek, se na delším intervalu může zmnohonásobit a náš odhad by nemusel odpovídat realitě.

7. Slovní úlohy

Následující podkapitola obsahuje slovní úlohy, které lze řešit pomocí aparátu diferenciálních rovnic. Nejprve si uveďme jednu řešenou úlohu, která je jistým rozšířením modelu samočištění jezer ze strany 8.

Příklad 7.1 (soustava dvou jezer). V Příkladu 1.2 na straně 8 jsme uvažovali kontaminované jezero, které se čistí v důsledku přitékání čisté vody a odtékání vody kontaminované. Ukázali jsme, že množství nečistot v jezeře závisí na čase a tato závislost je popsána rovnicí (1.2). Protože se jedná o rovnici exponenciálního růstu (viz Poznámka 1.7), bude množství nečistot v jezeře klesat exponenciálně s časem. Stejně bude proto klesat i míra kontaminace odtékající vody.
Předpokládejme nyní, že fyzikální jednotky jsou pro jednoduchost zvoleny tak, že hmotnost nečistot vyplavovaných z jezera v čase t je dána funkcí e^{-t}. Toho je možné dosáhnout následujícím způsobem: Jednotku měření času volíme tak, aby za jeden časový úsek kleslo množství kontaminací v jezeře a v odtékající vodě e-krát a hmotnost znečišťujících částic měříme v násobcích celkové hmotnosti částic, které odtékaly z jezera na počátku znečištění za časovou jednotku bezprostředně po prvotním znečištění.
Předpokládejme dále, že tato voda odtéká do jiného jezera, které bylo původně čisté a nyní je postupně kontaminováno. Lze očekávat, že míra znečištění tohoto druhého jezera poroste z nuly k jisté maximální hodnotě a poté bude opět klesat vlivem samočištění a vlivem toho, že kontaminace přitékající vody postupně klesá k nule.
Pokusme se sestavit matematický model této situace. Označme $y(t)$ hmotnost znečišťujících částic, které jsou přítomny v druhém jezeře v čase t. Dále označme r průtok vody za časovou jednotku a V objem jezera. Opět přijmeme předpoklad rovnoměrného rozdělení kontaminace v celém objemu jezera. Změna hmotnosti znečišťujících částic je způsobena jednak přítokem e^{-t} částic z prvního jezera a jednak úbytkem vlivem samočištění. Tento úbytek je stejně jako v základním modelu samočištění jezer (1.2) na straně 8 dán výrazem $\frac{r}{V}y$. Diferenciální rovnice pro vývoj znečištění má tedy tvar

$$y' = e^{-t} - \frac{r}{V}y, \qquad y(0) = 0, \tag{7.1}$$

kde počáteční podmínka vyjadřuje skutečnost, že na počátku nebylo druhé jezero nijak znečištěno a y' značí derivaci funkce y podle proměnné t. Jedná se o lineární diferenciální rovnici prvního řádu. Asociovaná homogenní rovnice

$$y' = -\frac{r}{V}y$$

je rovnicí exponenciálního růstu (viz str. 9) a její obecné řešení je $y = Ce^{-\frac{r}{V}t}$ (viz str. 19). Partikulární řešení rovnice budeme hledat ve tvaru $y = K(t)e^{-\frac{r}{V}t}$. Dosazením do (7.1) dostáváme

$$K'(t)e^{-\frac{r}{V}t} - K(t)\frac{r}{V}e^{-\frac{r}{V}t} = e^{-t} - \frac{r}{V}K(t)e^{-\frac{r}{V}t}$$

a po úpravě a explicitním vyjádření K' obdržíme

$$K'(t) = e^{\frac{r-V}{V}\, t}.$$

Integrací tohoto vztahu získáme

$$K(t) = \frac{V}{r-V} e^{\frac{r-V}{V}\, t} = -\frac{V}{V-r} e^{\frac{r-V}{V}\, t},$$

přičemž integrační konstantu volíme rovnu nule. Partikulární řešení má potom tvar

$$y_p = -\frac{V}{V-r} e^{\frac{r-V}{V}\, t} e^{-\frac{r}{V} t} = -\frac{V}{V-r} e^{-t}$$

a obecným řešením je funkce

$$y = C e^{-\frac{r}{V} t} - \frac{V}{V-r} e^{-t}.$$

Z počáteční podmínky $y(0) = 0$ obdržíme rovnici

$$0 = C - \frac{V}{V-r}$$

s řešením $C = \dfrac{V}{V-r}$. Řešením počáteční úlohy (7.1) je tedy funkce

$$y = \frac{V}{V-r} \left(e^{-\frac{r}{V} t} - e^{-t} \right).$$

Směrové pole této rovnice a integrální křivka odpovídající tomuto řešení jsou na Obrázku 7 na straně 13.

Řešte následující slovní úlohy. Vystupuje-li v úloze rovnice exponenciálního růstu nebo logistická rovnice, využijte výsledků Příkladů 2.7 a 2.8.

Úloha 7.1. Populace bakterií roste tak, že rychlost růstu je úměrná velikosti populace, tj. roste podle rovnice exponenciálního růstu. Mezi $12{:}00$ a $14{:}00$ se velikost populace ztrojnásobila. Zjistěte, v kolik hodin se velikost populace zvýší na 100-násobek velikosti, jaká byla ve $12{:}00$.

Úloha 7.2. Populace bakterií roste podle logistické rovnice (viz str. 9 a 19). Počáteční populace je $1\,000$ jedinců a maximální stabilní populace je $10\,000$ jedinců. Sčítání velikosti populace na konci první hodiny ukázalo velikost populace $2\,000$ jedinců. Určete velikost populace jako funkci času t.

Úloha 7.3 (samočištění jezera s nepřetržitým znečišťováním). Jezero uvedené v modelu samočištění jezer (viz Příklad 1.2, str. 8) je nepřetržitě znečišťováno konstantní rychlostí c $[\mathrm{kg}/\mathrm{den}]$.

(i) Napište diferenciální rovnici, která popisuje množství nečistot v jezeře v závislosti na čase t.
(ii) Rovnici vyřešte a zjistěte, na jaké hodnotě se množství nečistot ustálí.

Úloha 7.4 (samočištění jezera s periodickým znečišťováním). Uvažujme opět jezero z Příkladu 1.2 na straně 8, avšak předpokládejme, že v něm na počátku nejsou přítomny žádné znečišťující částice. V čase $t = 0$ bylo jezero kontaminováno dávkou y_0 kg nečistot.

(i) Nalezněte množství nečistot v jezeře po uplynutí T dní.
(ii) Po uplynutí T dní bylo jezero opět kontaminováno dávkou y_0 kg nečistot. Nalezněte množství nečistot v jezeře po uplynutí $2T$ dní.
(iii) Opakovaně, vždy po uplynutí T dní, byla do jezera vypuštěna další dávka y_0 kg nečistot. Nalezněte množství nečistot v jezeře po uplynutí nT dní a limitní hodnotu tohoto množství pro $n \to \infty$.

Úloha 7.5. Nabídka potravy pro určitou populaci podléhá sezonním změnám, které ovlivňují růst této populace. Jako jednoduchý model pro takovou populaci může sloužit rovnice

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = ky\cos t,$$

kde k je kladná konstanta. Je známa počáteční velikost y_0 populace v čase $t = 0$. Vyřešte tuto rovnici a nalezněte maximální a minimální hodnotu, mezi kterými bude velikost populace oscilovat.

Následující úloha sice vede na rovnici druhého řádu (obsahuje druhou derivaci hledané funkce), převedeme ji však na řešení dvou diferenciálních rovnic řádu prvního.

Úloha 7.6. Uvažujme ohebné lano natažené mezi body A, B, které je prověšeno vlastní vahou. Fyzikální rozbor situace ukazuje, že lano zaujme tvar křivky $y = y(x)$ popsané diferenciální rovnicí

$$y'' = a\sqrt{1 + (y')^2}, \tag{7.2}$$

kde a je konstanta charakterizující sílu, která lano napíná a hmotnost lana (předpokládáme, že lano má hmotnost rovnoměrně rozloženu podél svojí délky).

(i) Substitucí $z(x) = y'(x)$ převeďte rovnici (7.2) na diferenciální rovnici prvního řádu

$$z' = a\sqrt{1 + z^2}. \tag{7.3}$$

(ii) Separací proměnných vyřešte rovnici (7.3) a ukažte, že funkce

$$\ln|z + \sqrt{1 + z^2}| = ax + C_1, \quad C_1 \in \mathbb{R}, \tag{7.4}$$

je obecným řešením této rovnice.

(iii) Převeďte funkci (7.4) do explicitního tvaru a ukažte tak, že obecným řešením rovnice (7.3) je funkce

$$z(x) = \frac{e^{ax+C_1} - e^{-(ax+C_1)}}{2}, \quad C_1 \in \mathbb{R}. \tag{7.5}$$

(iv) Ze substituce $y'(x) = z(x)$ vypočtěte integrací funkci y a ukažte tak, že funkce

$$y(x) = \frac{e^{ax+C_1} + e^{-(ax+C_1)}}{2a} + C_2, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}, \tag{7.6}$$

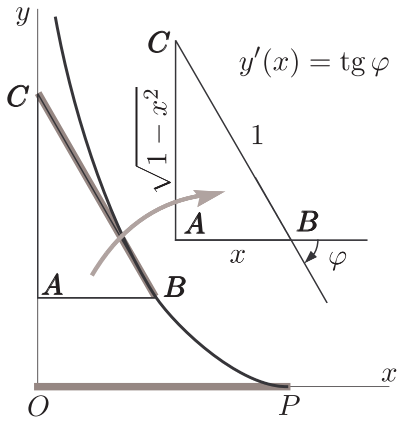
je řešením rovnice (7.2).

Poznámka 7.1. Funkce $y = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$ se nazývá *hyperbolický kosinus*, označujeme ji $\cosh x$. Graf funkce (7.6) můžeme obdržet z grafu funkce $y = \cosh x$ posunutím a zvětšením, jak si čtenář může samostatně rozmyslet. Funkce $\cosh x$ tedy udává tvar křivky[13], kterou zaujmou volně visící ohebná lana, dráty nebo řetízky, např. dráty elektrického vedení.

Úloha 7.7. Body $O = [0, 0]$ a $P = [1, 0]$ jsou spojeny neprotažitelnou strunou délky $l = 1$. Bod O se začne pohybovat v kladném směru osy y a táhne bod P za sebou. Nalezněte diferenciální rovnici křivky[14], po níž se bude bod P pohybovat a tuto rovnici vyřešte.
Návod: Situace je znázorněna na Obrázku 13. Směr struny je vždy tečný ke křivce, po níž se bod P pohybuje. Dostane-li se bod O do bodu C, přemístí se bod P do bodu B. Vyjděte z pravoúhlého trojúhelníka ABC. Derivace funkce y' je rovna $\operatorname{tg}\varphi$, kde φ je orientovaný úhel, který svírá struna s kladnou částí osy x (vysvětlete proč!). Vypočtete pomocí Pythagorovy věty délku strany AC, odsud vyjádřete $\operatorname{tg}\varphi$ a dosaďte $y' = \operatorname{tg}\varphi$. Pozor: platí $\varphi \in (-\frac{\pi}{2}, 0)$, tj. $\operatorname{tg}\varphi < 0$. Při výpočtu integrálu užijte substituci $1 - x^2 = t^2$, $x\,\mathrm{d}x = -t\,\mathrm{d}t$.

[13] Tato křivka se nazývá *řetězovka*, anglicky *catenary* z lat. „catenaris“=řetízek.

[14] Anglický název této křivky je *tractrix*, z latinského „tractum“=táhnout. Tuto křivku vykreslí za jistých okolností například zadní pneumatika jízdního kola při zatáčení (ostré zatočení o devadesát stupňů — ve větších rychlostech raději nezkoušejte).



OBRÁZEK 13. Křivka táhnutí

8. Závěrečné poznámky

Poznámka 8.1 (derivace jako podíl diferenciálů). Ze základních kurzů matematické analýzy víme, že výraz $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$, který má formálně tvar podílu, je jenom jiný zápis derivace funkce $y(x)$ v bodě x a nejedná se tedy o podíl výrazů v „běžném" smyslu toho slova. Například $\frac{\mathrm{d}e^{-x}}{\mathrm{d}x} = -e^{-x}$ (derivace funkce e^{-x}). Přesto je mnohdy povoleno a dokonce výhodné s tímto výrazem jako s podílem pracovat.
Pomocí diferenciálů lze velice snadno zapsat řetězové pravidlo pro derivaci složené funkce:

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y} \cdot \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$$

(což zapsáno v obvyklé symbolice není nic jiného, než vzorec $z'(y(x))y'(x) = [z(y(x))]'$) a pravidlo pro derivaci inverzní funkce

$$\frac{1}{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}$$

(což značí vzorec $\frac{1}{y'(x)} = x'(y)$, kde $x = x(y)$ je funkce inverzní k funkci $y = y(x)$ a $x'(y)$ je derivace této inverzní funkce podle proměnné y).
Je evidentní, že tyto dva vztahy, ač se vlastně jedná o vzorce z diferenciálního počtu, velice připomínají jednoduché vzorce pro algebraickou úpravu zlomků: násobení a krácení zlomků a úpravu složeného zlomku. Zapamatujeme si proto, že tyto úpravy lze provádět i s podílem diferenciálů a některé výpočty se takto výrazně formálně zjednoduší a zpřehlední.

Příklad 8.1 (záměna závislé a nezávislé proměnné). Diferenciální rovnice ♖

$$y'\left(e^y - \frac{x}{y}\right) = 1$$

je poměrně složitá a nespadá do žádné z kategorií rovnic, kterým se věnujeme v těchto skriptech. Zapíšeme-li derivaci pomocí diferenciálů

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\left(e^y - \frac{x}{y}\right) = 1$$

a převedeme-li rovnici pomocí algebraických úprav do tvaru

$$e^y - \frac{x}{y} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}$$

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} + \frac{1}{y}\,x = e^y,$$

vidíme, že se jedná o lineární diferenciální rovnici, pokud neznámou je x a hledáme x jako funkci proměnné y. Řešením této rovnice je funkce

$$x = e^y\Big(1 - \frac{1}{y}\Big) + \frac{C}{y}.$$

Tato rovnost určuje řešení zadané rovnice implicitně, explicitně najít funkci y jako funkci proměnné x nedokážeme.

8.1. Některá zobecnění diferenciálních rovnic

Diferenciální rovnici je možno, jak bylo v textu uvedeno na příkladech, chápat jako jistou souvislost mezi stavem studovaného systému, který je vyjádřen hodnotou funkce y, s jeho vývojem, tj. se změnou jeho stavu, která je vyjádřena derivací y'. Diferenciální rovnice

$$y'(x) = \varphi(x, y(x)),$$

a všechny její speciální případy studované v první kapitole předpokládá, že odezva systému na změnu je okamžitá, funkce y i y' mají stejný argument x. V praxi má někdy smysl uvažovat i případy, kdy systém reaguje na změny s jistým zpožděním, což vede k *diferenciální rovnici se zpožděním* τ

$$y'(x) = \varphi(x, y(x - \tau)).$$

Toto zpoždění přitom může nebo nemusí být konstantní. Rovnice se zpožděním jsou speciálním případem tzv. *funkcionálních diferenciálních rovnic*.

V úloze 7.4 na straně 43 jsme vlastně hledali řešení rovnice, které není spojitou funkcí, ale vykazuje v určitých časových intervalech předepsané skoky (impulsy), realizované opakovanými kontaminacemi jezera. Takovéto rovnice se nazývají *impulsivní diferenciální rovnice*. Od obyčejných diferenciálních rovnic se liší především tím, že řešení nehledáme v množině spojitých funkcí, ale v množině funkcí, které vykazují předem zadané skoky.

V některých případech je funkce popisující stav systému funkcí nikoliv jedné, ale více proměnných. Například při studiu kmitů membrány nás zajímá výchylka u jednotlivých bodů membrány oproti jejich rovnovážné poloze. Tato výchylka je jednak funkcí času t a jednak funkcí polohy, kterou u membrány popisujeme dvojicí souřadnic x, y. Funkce u je tedy funkcí tří proměnných $u = u(x, y, t)$ a fyzikální rozbor problému ukazuje, že u splňuje diferenciální rovnici druhého řádu

$$\frac{1}{k}\,\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2},$$

kde k je konstanta závislá na typu membrány a druhé derivace vystupující v rovnici jsou parciální derivace. Proto se tyto rovnice nazývají *parciální diferenciální rovnice*.

Úloha nalézt řešení počáteční úlohy

$$y' = \varphi(x, y), \quad y(x_0) = y_0$$

je téměř ekvivalentní s úlohou nalézt spojitou funkci $y(x)$ splňující *integrální rovnici*

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} \varphi(t, y(t))\,\mathrm{d}t.$$

Ve skutečnosti je tato integrální rovnice poněkud obecnější, protože jejím řešením může být i funkce, která nemá derivaci, což u diferenciální rovnice ve smyslu uvedeném v těchto skriptech postrádá smysl.

Především díky aplikacím v ekonomii se ukázalo, že je možné (a účelné) studovat i diferenciální rovnice, které obsahují nejenom veličiny s přesně zadanými hodnotami, ale i náhodné veličiny. Tím vznikla třída *stochastických diferenciálních rovnic*, které se uplatňují např. při oceňování některých finančních produktů.

Lano prověšené vlastní vahou zaujme tvar hyperbolického kosinu — křivky popsané diferenciální rovnicí $y'' = \sqrt{1 + (y')^2}$ *(viz Příklad 7.6)*

Kapitola 2

Diferenciální rovnice vyšších řádů

1. Lineární diferenciální rovnice druhého řádu

Definice (lineární diferenciální rovnice druhého řádu). Buďte p, q a f funkce definované a spojité na intervalu I. Diferenciální rovnice

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x) \tag{1.1}$$

se nazývá *lineární diferenciální rovnice druhého řádu* (zkráceně LDR druhého řádu). *Řešením rovnice* (nebo též *integrálem rovnice*) na intervalu I rozumíme funkci, která má spojité derivace do řádu 2 na intervalu I a po dosazení identicky splňuje rovnost (1.1) na I. Úloha nalézt řešení rovnice, které splňuje v bodě $x_0 \in I$ *počáteční podmínky*

$$\begin{cases} y(x_0) = y_0, \\ y'(x_0) = y_0', \end{cases} \tag{1.2}$$

kde y_0 a y_0' jsou reálná čísla, se nazývá *počáteční úloha* (*Cauchyova úloha*). Řešení počáteční úlohy se nazývá *partikulární řešení rovnice* (1.1).

Definice (obecné řešení). Všechna řešení LDR druhého řádu (1.1) lze vyjádřit ve tvaru obsahujícím dvě nezávislé konstanty C_1, $C_2 \in \mathbb{R}$. Tento předpis se nazývá *obecné řešení rovnice* (1.1).

Definice (speciální typy LDR druhého řádu). Platí-li v rovnici (1.1) $f(x) = 0$ pro všechna $x \in I$, nazývá se rovnice (1.1) *homogenní*, v opačném případě *nehomogenní*. Jsou-li koeficienty $p(x)$ a $q(x)$ na intervalu I konstantní funkce, nazývá se (1.1) *rovnice s konstantními koeficienty*.

Poznámka 1.1. Pojem partikulárního řešení budeme používat v souladu s Poznámkou 1.11 v předešlé kapitole na straně 11.

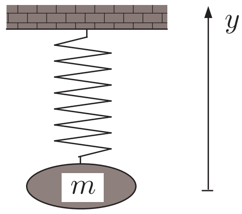
Poznámka 1.2 (existence a jednoznačnost). Každá Cauchyova počáteční úloha pro rovnici (1.1) má řešení, které je určeno jednoznačně a toto řešení je definované na celém intervalu I. Lze jej obdržet z obecného řešení vhodnou volbou konstant.

Poznámka 1.3 (operátorová symbolika). Podobně jako u lineární diferenciální rovnice prvního řádu, i zde často pravou stranu rovnice zkracujeme do tvaru $L[y](x)$. Definujeme-li tedy

$$L[y](x) = y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x), \tag{1.3}$$

je tímto předpisem definován operátor, který každé dvakrát diferencovatelné funkci přiřazuje levou stranu rovnice (1.1). Rovnici (1.1) je potom možno zapsat ve tvaru $L[y] = f(x)$.

Příklad 1.1 (kmity pružiny). Uvažujme těleso o hmotnosti $m[\mathrm{kg}]$, pohybující se na pružině s jedním stupněm volnosti, tj. v přímce. Veličina $y(x)$ nechť udává polohu tělesa v čase x. Potom veličina $y'(x)$ udává rychlost a veličina $y''(x)$ udává zrychlení tělesa v čase x. Volme počátek



OBRÁZEK 1. Těleso na pružině

soustavy souřadnic tak, aby v rovnovážné poloze platilo $y = 0$. Je-li těleso v místě o souřadnici y, působí na něj síla $F = -ky$, kde veličina k se nazývá tuhost pružiny (pro danou pružinu je konstantní) a znaménko mínus vyjadřuje skutečnost, že síla vrací těleso do rovnovážné polohy. Nepůsobí-li na těleso žádná další síla, platí podle Newtonova pohybového zákona

$$my'' + ky = 0,$$

což je diferenciální rovnice pohybu tělesa. Je-li v čase $x = 0$ známa počáteční poloha y_0 a počáteční rychlost v_0, doplníme tuto rovnici počátečními podmínkami

$$y(0) = y_0, \quad y'(0) = v_0.$$

Pohybuje-li se těleso v prostředí, které klade odpor proti pohybu a předpokládáme-li, že odporová síla je úměrná rychlosti y', je diferenciální rovnice pohybu

$$my'' + by' + ky = 0,$$

kde b je konstanta charakterizující odpor prostředí. Předpokládáme-li navíc, že na těleso působí další síla $f(x)$ (například konstantní gravitační síla, nebo časově proměnná vnější síla), nezávislá na poloze nebo na rychlosti, je diferenciální rovnice pohybu

$$my'' + by' + ky = f(x).$$

Jak vidíme, ve všech uvedených případech je pohyb tělesa určen lineární diferenciální rovnicí druhého řádu s konstantními koeficienty.

Poznámka 1.4 (samoadjungovaný tvar LDR druhého řádu). Homogenní LDR druhého řádu se též často uvádí ve tvaru

$$\Big(r(x)y'\Big)' + c(x)y = g(x), \tag{1.4}$$

kde c, g jsou spojité funkce a r je kladná spojitě diferencovatelná funkce. Derivováním součinu ry' a následným vydělením rovnice faktorem r lze tuto rovnici přepsat do tvaru (1.1). Naopak, rovnici (1.1) lze vynásobením faktorem $e^{\int p(x)\,\mathrm{d}x}$ a užitím stejného obratu s derivací součinu, který jsme použili v Poznámce 4.9 na straně 30, psát v samoadjungovaném tvaru (1.4) při označení $r(x) = e^{\int p(x)\,\mathrm{d}x}$, $c(x) = r(x)q(x)$ a $g(x) = f(x)r(x)$.

Poznámka 1.5 (triviální řešení). Funkce $y(x) \equiv 0$ je řešením homogenní LDR 2. řádu vždy, bez ohledu na tvar koeficientů p, q. (Ověřte sami dosazením.) Toto řešení nazýváme *triviální řešení rovnice* (1.1).

Definice (asociovaná homogenní rovnice). Nahradíme-li v nehomogenní LDR (1.1) pravou stranu (tj. funkci f) nulovou funkcí, obdržíme rovnici

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0. \tag{1.5}$$

Tato rovnice se nazývá *homogenní rovnice asociovaná k rovnici* (1.1).

Mezi řešeními nehomogenní a asociované homogenní rovnice existuje (podobně jako u diferenciálních rovnic prvního řádu) jistá souvislost, kterou s výhodou použijeme při hledání obecného řešení. Tato souvislost je důsledkem následujícího principu superpozice.

Lemma 1.1 (linearita a princip superpozice). Operátor (1.3) zachovává lineární kombinaci funkcí, tj. pro libovolné dvě funkce y_1 a y_2 a libovolné reálné konstanty C_1 a C_2 platí

$$L[C_1y_1 + C_2y_2] = C_1L[y_1] + C_2L[y_2]. \tag{1.6}$$

(Důkaz je stejný jako důkaz odpovídajícího tvrzení v kapitole věnované lineární diferenciální rovnici prvního řádu v Poznámce 4.5 na straně 26.)

Jako speciální případ vztahu (1.6) dostáváme implikace

$$\begin{aligned}
&L[y_2] = 0 \text{ a } L[y_1] = f(x) &&\Rightarrow && L[y_1 + y_2] = 0 + f(x) = f(x),\\
&L[y_1] = L[y_2] = f(x) &&\Rightarrow && L[y_1 - y_2] = f(x) - f(x) = 0,\\
&L[y_1] = L[y_2] = 0 &&\Rightarrow && L[C_1y_1 + C_2y_2] = C_1 \cdot 0 + C_2 \cdot 0 = 0,
\end{aligned}$$

které lze slovně zformulovat následovně:

- Součet řešení zadané nehomogenní a asociované homogenní LDR je řešením dané nehomogenní rovnice.
- Rozdíl dvou řešení nehomogenní LDR je řešením asociované homogenní rovnice.
- Každá lineární kombinace dvou řešení homogenní LDR je opět řešením této rovnice.

Vidíme, že relace (1.6) (a potom i všechny její důsledky) jsou stejné jako u LDR prvního řádu. I zde tedy budeme studovat nejprve homogenní rovnici.

2. Homogenní rovnice druhého řádu

V této podkapitole budeme studovat homogenní LDR druhého řádu, tj. rovnici (1.5)

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0,$$

kterou můžeme zkráceně zapsat jako $L[y] = 0$, kde operátor L je lineární diferenciální operátor druhého řádu definovaný vztahem (1.3).

Motivace. Nejprve si všimněme, že i když je funkce $y_1(x)$ řešením této rovnice, není funkce $y(x) = Cy_1(x)$ ještě obecným řešením, jak tomu bylo u rovnice prvního řádu. Vskutku, uvažujeme-li počáteční podmínku $y(\alpha) = \beta, y'(\alpha) = \gamma$, po dosazení získáváme dvě rovnice pro jednu neznámou C

$$\begin{aligned}
\beta &= Cy_1(\alpha),\\
\gamma &= Cy_1'(\alpha),
\end{aligned}$$

která nemusí mít vždy řešení. Protože dosazením počátečních podmínek získáme dvě rovnice, zdá se býti rozumné hledat řešení ve tvaru, který obsahuje dvě konstanty[1]. Protože z linearity operátoru

[1] Srovnejte s definicí obecného řešení na straně 49.

L víme, že lineární kombinace dvou řešení homogenní LDR je opět řešením, budeme předpokládat že funkce $y_1(x)$ a $y_2(x)$ jsou obě řešeními a budeme hledat podmínky, za kterých je funkce

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$$

obecným řešením. Derivováním tohoto vztahu získáváme

$$y'(x) = C_1 y_1'(x) + C_2 y_2'(x)$$

a dosazení počátečních podmínek $y(\alpha) = \beta$, $y'(\alpha) = \gamma$ vede k následující soustavě lineárních rovnic s neznámými C_1, C_2

$$\begin{aligned} \beta &= C_1 y_1(\alpha) + C_2 y_2(\alpha), \\ \gamma &= C_1 y_1'(\alpha) + C_2 y_2'(\alpha). \end{aligned} \tag{2.1}$$

Jak je známo z lineární algebry, tato soustava má právě jedno řešení pro libovolnou volbu čísel β, γ právě tehdy, když matice soustavy, tj. matice $\begin{pmatrix} y_1(\alpha) & y_2(\alpha) \\ y_1'(\alpha) & y_2'(\alpha) \end{pmatrix}$, je regulární. Tato matice je regulární právě tehdy, když její determinant je nenulový a to nastane právě tehdy, když jeden sloupec není násobkem druhého. Tímto motivujeme následující definice.

Definice (lineární (ne-)závislost funkcí). Buďte y_1 a y_2 funkce definované na intervalu I. Řekneme, že funkce y_1 a y_2 jsou na intervalu I *lineárně závislé*, jestliže jedna z nich je na intervalu I násobkem druhé, tj. jestliže existuje reálné číslo $k \in \mathbb{R}$ s vlastností

$$y_1(x) = k y_2(x) \qquad \text{pro všechna } x \in I,$$

nebo

$$y_2(x) = k y_1(x) \qquad \text{pro všechna } x \in I.$$

V opačném případě říkáme, že funkce y_1, y_2 jsou na intervalu I *lineárně nezávislé*.

Poznámka 2.1 (k předchozí definici). Dvě funkce jsou (podle uvedené definice) lineárně nezávislé v případě, že ani jedna není násobkem druhé funkce. Zejména tedy ani jedna není identicky na intervalu I rovna nulové funkci. (Nulová funkce je nula-násobkem čehokoliv.) V případě většího počtu funkcí jsou lineární závislost a nezávislost definovány poněkud složitějším způsobem, podobně jako je tomu u algebraických vektorů. Vzhledem k tomu, že v textu nebudeme uvažovat lineární závislost více než dvou funkcí, není nutné tuto složitější definici uvádět.

Definice (wronskián). Buďte $y_1(x)$ a $y_2(x)$ dvě libovolná řešení homogenní rovnice (1.5). *Wronskiánem* funkcí $y_1(x)$, $y_2(x)$ rozumíme determinant

$$W[y_1, y_2](x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = y_1(x) y_2'(x) - y_1'(x) y_2(x). \tag{2.2}$$

Wronskián slouží jako efektivní nástroj k posouzení lineární závislosti či nezávislosti dvou řešení téže lineární homogenní rovnice. Platí totiž následující věta.

Věta 2.1 (lineární (ne)závislost). *Budťe $y_1(x)$ a $y_2(x)$ dvě řešení rovnice* (1.5) *na intervalu I. Tato řešení jsou lineárně nezávislá právě tehdy když je jejich wronskián různý od nuly na intervalu I.*

Poznámka 2.2. Lze dokázat, že je-li wronskián dvou řešení $y_1(x)$ a $y_2(x)$ roven nule v jednom bodě intervalu I, je identicky roven nulové funkci na celém intervalu I. Nenulovost wronskiánu při ověřování lineární nezávislosti dvou řešení tedy stačí posoudit v libovolném bodě intervalu I, což přesně odpovídá požadavku na jednoznačnou řešitelnost soustavy (2.1) pro libovolné konstanty β a γ. Jako další kriterium pro ověřování lineární nezávislosti funkcí může sloužit poznatek, že *dvě lineárně nezávislá řešení nemohou mít společné kořeny*.

Shrneme-li (za použití nově zavedených pojmů) naše dosavadní úvahy, dostáváme následující (důležitou) větu.

Věta 2.2 (obecné řešení homogenní LDR). *Jsou-li y_1 a y_2 dvě netriviální lineárně nezávislá řešení rovnice* (1.5) *na intervalu I, je funkce y definovaná vztahem*

$$y(x, C_1, C_2) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x), \qquad C_1 \in \mathbb{R},\ C_2 \in \mathbb{R}, \tag{2.3}$$

obecným řešením rovnice (1.5) *na intervalu I.*

Definice (fundamentální systém řešení). Dvojici funkcí y_1 a y_2 z předchozí věty nazýváme *fundamentální systém řešení rovnice* (1.5).

Poznámka 2.3 (metodická). K nalezení obecného řešení (a tedy všech řešení) homogenní LDR 2. řádu nám podle předchozí věty stačí nalézt dvě lineárně nezávislá partikulární řešení. Poté jsme schopni sestavit obecné řešení a libovolné další partikulární řešení.

Příklad 2.1. Rovnice

$$y'' + y = 0 \tag{2.4}$$

má řešení $y_1 = \sin x$ a $y_2 = \cos x$ (ověřte dosazením). Tyto funkce jsou lineárně nezávislé[2] a obecné řešení je tedy podle Věty 2.2 dáno vztahem

$$y(x) = C_1 \sin x + C_2 \cos x.$$

Pokusme se určit partikulární řešení vyhovující počátečním podmínkám $y(0) = 1$ a $y'(0) = -1$. Výpočtem derivace dostáváme

$$y'(x) = C_1 \cos x - C_2 \sin x$$

a po dosazení počátečních podmínek do vyjádření funkcí y a y' obdržíme soustavu rovnic

$$\begin{aligned} 1 &= 0 \cdot C_1 + \phantom{0 \cdot {}} C_2, \\ -1 &= \phantom{0 \cdot {}} C_1 + 0 \cdot C_2, \end{aligned}$$

z níž okamžitě plyne $C_2 = 1$ a $C_1 = -1$. Partikulárním řešením je tedy

$$y(x) = -\sin x + \cos x.$$

Je nutno podotknout, že nalézt lineárně nezávislá řešení homogenní LDR dokážeme pouze v jistých velice speciálních případech. Nejdůležitějšímu z těchto případů – rovnici s konstantními koeficienty – vyhradíme samostatnou následující podkapitolu.
Dalšímu ze speciálních případů – pokud známe alespoň jedno z řešení rovnice (1.5) – se budeme věnovat v následujících odstavcích.
Nejprve upozorníme na fakt, že wronskián dvou řešení téže LDR druhého řádu je (až na multiplikativní konstantu) jednoznačně určen již samotnou rovnicí a do jisté míry tedy nezávisí na konkrétní volbě $y_1(x)$ a $y_2(x)$.

Věta 2.3 (souvislost wronskiánu s koeficienty rovnice). *Nechť $y_1(x)$, $y_2(x)$ jsou dvě libovolná (závislá či nezávislá) řešení rovnice* (1.4) *a $W[y_1, y_2](x)$ jejich wronskián. Potom existuje reálná konstanta W_0 taková, že*

$$W[y_1, y_2](x) = \frac{W_0}{r(x)}. \tag{2.5}$$

Uvažujeme-li namísto (1.4) *rovnici ve tvaru* (1.5)*, je nutno ve vzorci* (2.5) *položit*

$$r(x) = e^{\int p(x)\,\mathrm{d}x}.$$

[2]Protože nemají společné kořeny. Podpořte toto tvrzení i výpočtem wronskiánu.

Následující věta je založena na identitě

$$\left(\frac{y_2(x)}{y_1(x)}\right)' = \frac{W[y_1, y_2](x)}{\big(y_1(x)\big)^2},$$

která platí pro libovolná dvě řešení téže LDR a kterou si můžete sami ověřit derivováním a užitím definice wronskiánu. Dosazením za wronskián (např. z předchozí věty, kde W_0 bude libovolné nenulové číslo), integrací a osamostatněním funkce $y_2(x)$ lze takto nalézt funkci, která je řešením rovnice (1.4), které je lineárně nezávislé na $y_1(x)$. Toto tvrzení je obsaženo v následující větě.

Věta 2.4. *Buď* $y_1(x)$ *libovolné řešení rovnice* (1.4) *na intervalu* I. *Potom funkce*

$$y_2(x) = y_1(x) \cdot \int \frac{1}{r(x) y_1^2(x)}\, \mathrm{d}x \tag{2.6}$$

je řešením téže rovnice a $W[y_1, y_2](x) \neq 0$ *na* I. *Řešení* $y_1(x)$ *a* $y_2(x)$ *jsou tedy lineárně nezávislá a obecným řešením rovnice* (1.4) *je funkce*

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x),$$

kde C_1 *a* C_2 *jsou libovolné reálné konstanty.*
Uvažujeme-li namísto (1.4) *rovnici ve tvaru* (1.5), *je nutno ve vzorci* (2.6) *položit*

$$r(x) = e^{\int p(x)\, \mathrm{d}x}.$$

Příklad 2.2 (Eulerova rovnice). Řešme na intervalu $(0, \infty)$ Eulerovu rovnici

$$y'' + \frac{1}{4x^2} y = 0. \tag{2.7}$$

Protože zatím nemáme čeho se chytit, budeme hledat řešení střelbou naslepo. Zcela jistě rovnice nemá kromě nulové funkce žádné konstantní řešení. Vyzkoušíme tedy, zda rovnice nemá (alespoň jedno) řešení ve tvaru mocninné funkce $y = x^\gamma$. Derivací dostáváme

$$y'' = (x^\gamma)'' = \big(\gamma x^{\gamma-1}\big)' = \gamma(\gamma-1)x^{\gamma-2}$$

a dosazením do (2.7) obdržíme vztah

$$\gamma(\gamma-1)x^{\gamma-2} + \frac{1}{4x^2} x^\gamma = 0.$$

Úpravou získáme

$$\gamma(\gamma-1) + \frac{1}{4} = 0,$$

což je kvadratická rovnice s dvojnásobným kořenem $\gamma_{1,2} = \dfrac{1}{2}$. Rovnice (2.7) má tedy řešení $y_1(x) = \sqrt{x}$. Protože rovnice je v samoadjungovaném tvaru (1.4), vidíme že $r(x) = 1$ a druhé řešení budeme hledat podle vzorce (2.6):

$$y_2(x) = y_1(x) \int \frac{1}{y_1^2(x)}\, \mathrm{d}x = \sqrt{x} \int \frac{1}{x}\, \mathrm{d}x = \sqrt{x} \ln x.$$

Obecným řešením rovnice (2.7) je tedy funkce

$$y(x) = C_1 \sqrt{x} + C_2 \sqrt{x} \ln x,$$

kde C_1 a C_2 jsou libovolné reálné konstanty.

2.1. Homogenní LDR s konstantními koeficienty

Homogenní lineární diferenciální rovnice druhého řádu s konstantními koeficienty je rovnice tvaru

$$y'' + py' + qy = 0, \tag{LH2}$$

kde $p, q \in \mathbb{R}$. V tomto případě lze velice snadno nalézt fundamentální systém řešení rovnice. Všimněme si nejprve následujícího faktu: Dosadíme-li do levé strany rovnice $y = e^{zx}$, kde z je reálné číslo, po výpočtu derivací a po vytknutí faktoru e^{zx} získáváme

$$y'' + py' + qy = e^{zx}(z^2 + pz + q).$$

Protože exponenciální faktor na pravé straně je vždy nenulový, bude výraz na pravé straně roven nule pokud bude splněna podmínka

$$z^2 + pz + q = 0. \tag{2.8}$$

Pouze v tomto případě bude uvažovaná funkce řešením rovnice (LH2). Vidíme tedy, že rovnice (2.8) může hrát důležitou roli při hledání řešení rovnice (LH2). V následujících odstavcích si tuto souvislost zpřesníme. Začneme následující definicí.

Definice (charakteristická rovnice). Kvadratická rovnice (2.8) se nazývá *charakteristická rovnice pro rovnici* (LH2).

Návod jak najít fundamentální systém řešení rovnice (LH2) udává následující věta. Díky ní se hledání obecného řešení této rovnice stává ryze algebraickou operací (není nutné použít integrování).

Věta 2.5 (fundamentální systém řešení LDR s konstantními koeficienty). *Uvažujme diferenciální rovnici* (LH2) *a její charakteristickou rovnici* (2.8).

- *Jsou-li* $z_1, z_2 \in \mathbb{R}$ *dva různé reálné kořeny charakteristické rovnice* (2.8), *definujme*

  $$y_1 = e^{z_1 x} \qquad a \qquad y_2 = e^{z_2 x}.$$

- *Je-li* $z_1 \in \mathbb{R}$ *dvojnásobným kořenem charakteristické rovnice* (2.8), *definujme*

  $$y_1 = e^{z_1 x} \qquad a \qquad y_2 = xe^{z_1 x}.$$

- *Jsou-li* $z_{1,2} = \alpha \pm i\beta \notin \mathbb{R}$ *dva komplexně sdružené kořeny charakteristické rovnice* (2.8), *definujme*

  $$y_1(x) = e^{\alpha x}\cos(\beta x) \qquad a \qquad y_2(x) = e^{\alpha x}\sin(\beta x).$$

Potom funkce y_1 *a* y_2 *tvoří fundamentální systém řešení rovnice* (LH2) *na množině* $\mathbb{R}$. *Obecné řešení rovnice* (LH2) *je tedy*

$$y(x, C_1, C_2) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x), \qquad C_1 \in \mathbb{R},\ C_2 \in \mathbb{R}.$$

Příklad 2.3. Hledejme řešení rovnice $4y'' + 4y' + y = 0$.
Řešení. Jedná se o homogenní LDR druhého řádu. Charakteristická rovnice je

$$4z^2 + 4z + 1 = 0,$$

která má dvojnásobný kořen $z_{1,2} = -\frac{1}{2}$. Dvě lineárně nezávislá řešení jsou $y_1 = e^{-\frac{x}{2}}$ a $y_2 = xe^{-\frac{x}{2}}$. Obecné řešení je tedy

$$y = C_1 e^{-\frac{x}{2}} + C_2 x e^{-\frac{x}{2}} = e^{-\frac{x}{2}}(C_1 + C_2 x), \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Příklad 2.4. Hledejme řešení počáteční úlohy $y'' + 4y' + 29y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 10$.
Řešení. Jedná se o homogenní LDR druhého řádu. Charakteristická rovnice je

$$z^2 + 4z + 29 = 0,$$

a její kořeny jsou $z_{1,2} = -2 \pm 5i$. Obecné řešení je tedy

$$y = C_1 e^{-2x}\cos(5x) + C_2 e^{-2x}\sin(5x).$$

Jeho derivací dostáváme

$$y' = C_1(-2e^{-2x}\cos(5x) - 5e^{-2x}\sin(5x)) + C_2(-2e^{-2x}\sin(5x) + 5e^{-2x}\cos(5x)).$$

Dosazením počátečních podmínek obdržíme soustavu lineárních rovnic

$$\begin{aligned} 0 &= \quad C_1 + 0\cdot C_2 \\ 10 &= -2\cdot C_1 + 5\cdot C_2, \end{aligned}$$

odkud $C_1 = 0$, $C_2 = 2$ a řešením počáteční úlohy je funkce

$$y = 2e^{-2x}\sin(5x).$$

3. Nehomogenní rovnice druhého řádu

Jak jsme předeslali na straně 51, z linearity rovnice plyne následující vztah mezi řešeními homogenní a nehomogenní LDR druhého řádu.

Věta 3.1 (obecné řešení nehomogenní LDR). *Nechť y_1 a y_2 jsou dvě lineárně nezávislá řešení homogenní LDR* (1.5) *na intervalu I a nechť y_p je libovolné partikulární řešení nehomogenní LDR* (1.1) *na I. Potom funkce*

$$y(x, C_1, C_2) = C_1y_1(x) + C_2y_2(x) + y_p(x), \qquad C_1 \in \mathbb{R},\ C_2 \in \mathbb{R}, \tag{3.1}$$

je obecným řešením nehomogenní LDR (1.1) *na intervalu I.*

Příklad 3.1. Není těžké ověřit, že funkce $y(x) = 2$ je řešením rovnice

$$y'' + y = 2. \tag{3.2}$$

Fundamentální systém řešení asociované homogenní rovnice (2.4) je tvořen funkcemi $\sin x$ a $\cos x$ (viz Příklad 2.1). Obecné řešení rovnice (3.2) je funkce

$$y(x) = C_1\sin x + C_2\cos x + 2.$$

Poznámka 3.1 (technická). Věta 3.1 udává přímo *návod*, jak nalézt obecné řešení nehomogenní lineární diferenciální rovnice. Problém se (podobně jako v případě LDR prvního řádu) podstatně redukuje. Nyní nám stačí nalézt dvě netriviální lineárně nezávislá řešení homogenní rovnice a libovolné partikulární řešení nehomogenní rovnice. Použitím vzorce (3.1) poté obdržíme *obecné řešení nehomogenní LDR* a vhodnou volbou konstant i libovolné partikulární řešení této rovnice. V dalším se zaměříme pouze na rovnici s konstantními koeficienty, protože představuje jedinou rovnici, u které je možno v obecném případě najít fundamentální systém řešení.

3.1. Nehomogenní rovnice s konstantními koeficienty

Nehomogenní lineární diferenciální rovnice druhého řádu s konstantními koeficienty je rovnice tvaru

$$y'' + py' + qy = f(x), \tag{L2}$$

kde $p, q \in \mathbb{R}$. Její obecné řešení je určeno Větou 3.1 na každém intervalu, kde je funkce f spojitá, pokud známe alespoň jedno partikulární řešení této rovnice a fundamentální systém řešení asociované homogenní rovnice. Protože požadovaný fundamentální systém umíme nalézt pomocí Věty 2.5, vidíme, že stačí nalézt partikulární řešení rovnice (L2). Metoda, která nám toto umožňuje, je metoda variace konstant, uvedená v následujícím odstavci.

3.2. Metoda variace konstant

Podobně jako v případě LDR prvního řádu, budeme hledat partikulární řešení ve tvaru, kdy konstanty v obecném řešení asociované homogenní LDR nahradíme vhodnými funkcemi. Nyní tedy hledáme partikulární řešení ve tvaru

$$y_p(x) = A(x)y_1(x) + B(x)y_2(x), \tag{3.3}$$

kde A, B jsou spojitě diferencovatelné funkce a y_1, y_2 jsou lineárně nezávislá řešení asociované homogenní rovnice. Postup je technicky poněkud náročnější než v případě LDR prvního řádu (i když hlavní myšlenka zůstává stejná), proto si metodu uvedeme bez odvození formou následující věty[3].

Věta 3.2 (metoda variace konstant). *Nechť y_1 a y_2 jsou funkce tvořící fundamentální systém řešení homogenní rovnice* (LH2) *a y_1', y_2' jsou jejich derivace. Nechť funkce $A(x)$ a $B(x)$ jsou funkce mající derivace $A'(x)$ a $B'(x)$, které splňují soustavu rovnic*

$$\begin{cases} A'(x)y_1(x) + B'(x)y_2(x) = 0, \\ A'(x)y_1'(x) + B'(x)y_2'(x) = f(x). \end{cases} \tag{3.4}$$

Potom funkce y_p definovaná vzorcem (3.3) *je partikulárním řešením nehomogenní rovnice* (L2). *Obecné řešení rovnice* (L2) *je tedy tvaru*

$$y(x) = C_1y_1(x) + C_2y_2(x) + y_p(x).$$

Poznámka 3.2 (k řešení soustavy (3.4)**).** Soustava (3.4) je vždy jednoznačně řešitelná. Toto plyne z faktu, že funkce y_1 a y_2 jsou lineárně nezávislé a jejich wronskián (což není nic jiného než determinant matice soustavy (3.4)) je nenulový. Při jejím řešení lze tedy kromě „obvyklých metod“ (dosazovací, sčítací) použít i Cramerovo pravidlo - viz str. 99, vzorce (D.2).

ALGORITMUS 6 (řešení nehomogenní LDR druhého řádu s konstantními koeficienty). ♔

(i) Nalezneme asociovanou homogenní LDR, tj. nahradíme pravou stranu rovnice (L2) nulovou funkcí.
(ii) Sestavíme charakteristickou rovnici a vyřešíme ji. Pomocí Věty 2.5 nalezneme fundamentální systém řešení homogenní LDR a sestrojíme obecné řešení této rovnice.
(iii) Partikulární řešení původní rovnice hledáme ve tvaru (3.3). Identifikujeme pravou stanu rovnice $f(x)$ a sestavíme soustavu rovnic (3.4).
(iv) Algebraickými úpravami vypočteme funkce $A'(x)$, $B'(x)$. Integrací funkcí $A'(x)$, $B'(x)$ nalezneme hledané koeficienty $A(x)$, $B(x)$. Integrační konstantu volíme libovolně (nejčastěji 0).
(v) Nalezené funkce $A(x)$, $B(x)$ dosadíme do (3.3) a obdržíme partikulární řešení nehomogenní LDR. Obecné řešení nehomogenní LDR získáme ze vzorce ve Větě 3.2.
(vi) Jsou-li zadány počáteční podmínky, vypočteme derivaci obecného řešení a do obecného řešení i do jeho derivace dosadíme tyto podmínky. Obdržíme soustavu dvou lineárních rovnic o neznámých C_1, C_2, která má jediné řešení. Toto řešení nalezneme a vypočtené hodnoty konstant C_1, C_2 použijeme v obecném řešení.

Poznámka 3.3 (alternativní postup). Zahrneme-li dvě integrační konstanty C_1 a C_2 již do funkcí $A(x)$ a $B(x)$, získáváme z (3.3) nikoliv pouze partikulární, ale již přímo obecné řešení rovnice (L2).

---

[3] Věta platí ve skutečnosti i pro rovnici s nekonstantními koeficienty. V případě těchto rovnic však obecně nemáme (s výjimkou vzorce (2.6)) metodu, která by nám umožnila nalézt fundamentální systém řešení asociované homogenní LDR.

Příklad 3.2. Hledejme řešení rovnice $y'' - 4y' + 4y = e^{-x}$.
Řešení. Jedná se o nehomogenní LDR druhého řádu. Asociovaná homogenní LDR je tvaru

$$y'' - 4y' + 4y = 0.$$

Charakteristická rovnice této homogenní LDR je kvadratická rovnice

$$z^2 - 4z + 4 = 0,$$

která má dvojnásobný kořen $z_{1,2} = 2$. Fundamentální systém řešení volme podle Věty 2.5 následovně: $y_1(x) = e^{2x}$, $y_2(x) = xe^{2x}$. Partikulární řešení zadané rovnice hledejme ve tvaru $y = A(x)y_1(x) + B(x)y_2(x)$. Využijeme přitom Věty 3.2. Derivace funkcí, tvořících fundamentální systém řešení, jsou $y_1' = 2e^{2x}$ a $y_2' = e^{2x}(1 + 2x)$. Soustava pro neurčité koeficienty A', B' (argument x již pro stručnost vypisovat nebudeme) má proto tvar

$$\begin{aligned} A'e^{2x} + B'xe^{2x} &= 0, \\ 2A'e^{2x} + B'(1 + 2x)e^{2x} &= e^{-x}. \end{aligned}$$

Obě rovnice vydělíme faktorem e^{2x} a dostáváme

$$\begin{aligned} A' + B'x &= 0, \\ 2A' + B'(1 + 2x) &= e^{-3x}. \end{aligned}$$

Po vynásobení první rovnice číslem -2 a přičtení k rovnici druhé obdržíme $B' = e^{-3x}$ a po dosazení do první rovnice a výpočtu získáváme $A' = -xe^{-3x}$. Integrací obdržíme koeficienty A a B

$$\begin{aligned} A(x) &= \int A' \,\mathrm{d}x = \int -xe^{-3x} \,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}xe^{-3x} - \frac{1}{3}\int e^{-3x} \,\mathrm{d}x = \\ &= \frac{1}{3}xe^{-3x} + \frac{1}{9}e^{-3x}, \\ B(x) &= \int B' \,\mathrm{d}x = \int e^{-3x} \,\mathrm{d}x = -\frac{1}{3}e^{-3x} \end{aligned}$$

a partikulární řešení má tvar

$$y_p(x) = A(x)y_1(x) + B(x)y_2(x) = \left(\frac{1}{3}xe^{-3x} + \frac{1}{9}e^{-3x}\right)e^{2x} - \frac{1}{3}e^{-3x}xe^{2x} = \frac{1}{9}e^{-x}.$$

Obecné řešení zadané rovnice je tedy

$$y(x) = C_1e^{2x} + C_2xe^{2x} + \frac{1}{9}e^{-x}, \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Příklad 3.3. Hledejme řešení rovnice $y'' - 5y' + 6y = xe^{x}$.
Řešení. Jedná se opět o nehomogenní LDR druhého řádu. Asociovaná homogenní LDR je tvaru

$$y'' - 5y' + 6y = 0.$$

Charakteristická rovnice této homogenní LDR je

$$z^2 - 5z + 6 = 0,$$

která má reálné kořeny $z_1 = 2$, $z_2 = 3$. Fundamentální systém řešení volme $y_1(x) = e^{2x}$, $y_2(x) = e^{3x}$ a partikulární řešení hledejme ve tvaru (3.3). Derivace funkcí y_1 a y_2 jsou $y_1' = 2e^{2x}$ a $y_2' = 3e^{3x}$. Soustava pro neurčité koeficienty A', B' má tvar

$$\begin{aligned} A'e^{2x} + B'e^{3x} &= 0, \\ 2A'e^{2x} + 3B'e^{3x} &= xe^{x}. \end{aligned}$$

Obě rovnice vydělíme faktorem e^{2x} a dostáváme

$$\begin{aligned} A' + B'e^x &= 0, \\ 2A' + 3B'e^x &= xe^{-x}. \end{aligned}$$

Z první rovnice dostáváme $A' = -B'e^x$ a po dosazení do rovnice druhé obdržíme $B'e^x = xe^{-x}$ a tedy $B' = xe^{-2x}$. Pomocí B' již snadno vypočteme, že $A' = -B'e^x = -xe^{-x}$. Integrací nalezneme hledané koeficienty A a B. Oba integrály počítáme metodou per-partés a po integraci obdržíme

$$A(x) = (x+1)e^{-x}, \qquad B(x) = -\Big(\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\Big)e^{-2x}$$

a partikulární řešení má tvar

$$y_p(x) = A(x)y_1(x) + B(x)y_2(x) = (x+1)e^{-x}e^{2x} - \Big(\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\Big)e^{-2x}e^{3x} = \frac{1}{4}e^x(2x+3).$$

Obecné řešení zadané rovnice je tedy

$$y(x) = C_1e^{2x} + C_2e^{3x} + \frac{1}{4}e^x(2x+3), \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Příklad 3.4. Hledejme řešení rovnice $y'' + y = \dfrac{\cos x}{\sin x}$ na intervalu, kde platí $\sin(x) > 0$.

Řešení. Asociovaná homogenní diferenciální rovnice má tvar

$$y'' + y = 0.$$

Charakteristická rovnice je rovnice

$$z^2 + 1 = 0.$$

Kořeny této rovnice jsou komplexně sdružená čísla $z_1 = i$ a $z_2 = -i$. Fundamentální systém řešení lze podle Věty 2.5 volit ve tvaru $y_1(x) = \cos x$ a $y_2(x) = \sin x$. Hledáme-li partikulární řešení rovnice ve tvaru $y_p = Ay_1 + By_2$, hledáme funkce A, B, jejichž derivace splňují soustavu rovnic

$$\begin{aligned} A'\cos x + B'\sin x &= 0, \\ -A'\sin x + B'\cos x &= \frac{\cos x}{\sin x}. \end{aligned}$$

Soustavu vyřešíme Cramerovým pravidlem (viz str. 99). Determinant matice soustavy (wronskián) je roven

$$W = \begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix} = \cos^2 x + \sin^2 x = 1.$$

Pomocné determinanty jsou

$$W_1 = \begin{vmatrix} 0 & \sin x \\ \frac{\cos x}{\sin x} & \cos x \end{vmatrix} = -\cos x \qquad \text{a} \qquad W_2 = \begin{vmatrix} \cos x & 0 \\ -\sin x & \frac{\cos x}{\sin x} \end{vmatrix} = \frac{\cos^2 x}{\sin x}.$$

Derivace hledaných neurčitých koeficientů jsou tedy $A' = \dfrac{W_1}{W} = -\cos x$ a $B' = \dfrac{W_2}{W} = \dfrac{\cos^2 x}{\sin x}$.

Odsud okamžitě dostáváme $A(x) = \displaystyle\int -\cos x \,\mathrm{d}x = -\sin x$ a po krátkém výpočtu

$$\begin{aligned} B(x) &= \int \frac{\cos^2 x}{\sin x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\cos^2 x}{1-\cos^2 x}\sin x\,\mathrm{d}x \\ &= \int \frac{t^2}{t^2-1}\,\mathrm{d}t = \int 1 - \frac{1}{1-t^2}\,\mathrm{d}t = t - \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right| \\ &= \cos x - \frac{1}{2}\ln\frac{1+\cos x}{1-\cos x}. \end{aligned}$$

Při výpočtu funkce $B(x)$ jsme využili substituci $\cos x = t$, dělení polynomů se zbytkem a vzorec[4] pro integrál $\int \frac{1}{1-t^2}\,\mathrm{d}t$. Hledané partikulární řešení je potom tvaru

$$\begin{aligned} y_p(x) &= A(x)\cos x + B(x)\sin x = -\sin x\cos x - \frac{1}{2}\sin x \ln\frac{1+\cos x}{1-\cos x} + \sin x\cos x \\ &= -\frac{1}{2}\sin x\ln\frac{1+\cos x}{1-\cos x}. \end{aligned}$$

Obecným řešením rovnice je funkce

$$y(x) = C_1\cos x + C_2\sin x - \frac{\sin x}{2}\ln\frac{1+\cos x}{1-\cos x}.$$

Příklad 3.5. Hledejme řešení rovnice $y'' + 4y = 2\sin^2 2x$.
Řešení. Charakteristická rovnice $z^2 + 4 = 0$ má kořeny $z_{1,2} = \pm 2i$ a fundamentální systém řešení je tedy $y_1(x) = \cos(2x)$ a $y_2(x) = \sin(2x)$. Partikulární řešení budeme hledat ve tvaru (3.3). Aby tato funkce byla řešením zadané rovnice, stačí, aby derivace funkcí $A'(x)$ a $B'(x)$ splňovaly soustavu rovnic (3.4). Tato soustava má v našem případě tvar

$$\begin{aligned} A'\cos(2x) + B'\sin(2x) &= 0, \\ -2A'\sin(2x) + 2B'\cos(2x) &= 2\sin^2(2x). \end{aligned}$$

Řešením této soustavy jsou funkce

$$A'(x) = -\sin^3(2x), \qquad B'(x) = \cos(2x)\sin^2(2x).$$

Integrací při substituci $\cos(2x) = t$ dostáváme

$$A(x) = -\int \sin^3(2x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int (1-t^2)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\left(t - \frac{t^3}{3}\right) = \frac{1}{2}\left(\cos(2x) - \frac{\cos^3(2x)}{3}\right)$$

a při substituci $\sin(2x) = t$

$$B(x) = \int \cos(2x)\sin^2(2x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int t^2\,\mathrm{d}t = \frac{t^3}{6} = \frac{\sin^3(2x)}{6}.$$

Dosadíme-li funkce $A(x)$, $B(x)$ do (3.3), obdržíme po několika úpravách partikulární řešení ve tvaru

$$\begin{aligned} y_p(x) &= \frac{1}{2}\left(\cos(2x) - \frac{\cos^3(2x)}{3}\right)\cos(2x) + \frac{\sin^3(2x)}{6}\sin(2x) \\ &= \frac{1}{2}\cos^2(2x) - \frac{1}{6}\cos^4(2x) + \frac{1}{6}\sin^4(2x) \\ &= \frac{1}{2}\cos^2(2x) - \frac{1}{6}\left(\cos^2(2x) - \sin^2(2x)\right)\left(\cos^2(2x) + \sin^2(2x)\right) \\ &= \frac{1}{2}\cos^2(2x) - \frac{1}{6}\left(\cos^2(2x) - \sin^2(2x)\right) \\ &= \frac{1}{3}\cos^2(2x) + \frac{1}{6}\sin^2(2x) \\ &= \frac{1}{6}\cos^2(2x) + \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

Obecným řešením je tedy funkce

$$y(x) = C_1\cos(2x) + C_2\sin(2x) + \frac{1}{6}\cos^2(2x) + \frac{1}{6}.$$

[4] alternativním postupem může být namísto použití vzorce i rozklad na parciální zlomky

3.3. Metoda neurčitých koeficientů

Metoda variace konstant je pouze jednou z metod na nalezení partikulárního řešení nehomogenní rovnice. Někdy je možno řešení „uhodnout“ jako v Příkladu 3.1. U rovnic složitějších než je rovnice z tohoto příkladu pro takové „hádání“ existuje *metoda neurčitých koeficientů*, která spočívá v tom, že je-li pravá strana rovnice v jistém speciálním tvaru, můžeme „kvalifikovaně odhadnout“ tvar partikulárního řešení, který již pouze „doladíme“ tak, aby se jednalo skutečně o řešení rovnice. Nejčastěji přitom používáme následující větu.

Věta 3.3 (odhad partikulárního řešení). *Nechť pravá strana rovnice* (L2) *má tvar* $f(x) = = e^{\alpha x}\Big(P_n(x)\cos(\beta x) + Q_m(x)\sin(\beta x)\Big)$, *kde* $P_n(x)$ *je polynom stupně* n *a* $Q_m(x)$ *je polynom stupně* m.

- *Označme* $k = \max\{n, m\}$ *větší ze stupňů obou polynomů. Pokud některý z polynomů na pravé straně nefiguruje, dosazujeme za jeho stupeň nulu.*
- *Uvažujme charakteristickou rovnici pro asociovanou homogenní rovnici, tj. rovnici* (2.8)*. Pokud (obecně komplexní) číslo* $\alpha + i\beta$ *není kořenem této rovnice, položme* $r = 0$. *Pokud je číslo* $\alpha + i\beta$ *jednoduchým kořenem této rovnice, položme* $r = 1$ *a pokud dvojnásobným*[5]*, položme* $r = 2$.

Partikulární řešení je možno nalézt ve tvaru

$$y_p(x) = e^{\alpha x}x^r\Big(\widehat{P}_k(x)\cos(\beta x) + \widehat{Q}_k(x)\sin(\beta x)\Big), \tag{3.5}$$

kde $\widehat{P}_k(x)$ *a* $\widehat{Q}_k(x)$ *jsou polynomy stupně nejvýše* k. *Tyto polynomy je možno najít metodou neurčitých koeficientů bez použití integrování.*

Poznámka 3.4. Nevýhodou metody neurčitých koeficientů je skutečnost, že není aplikovatelná na libovolnou rovnici, ale pouze na rovnice se speciální nehomogenitou $f(x)$. Protože je předchozí věta formulována poměrně obecně, rozeberme si některé její speciální případy.

- Pokud se exponenciální část na pravé straně nevyskytuje, klademe $\alpha = 0$. Při této volbě je $e^{\alpha x} = 1$ a exponenciální člen se v součinu neuplatní. Například u diferenciální rovnice

  $$y'' + 2y' + 3y = (x^2 + 4)\cos(x) + (x - 2)\sin(x)$$

  hledáme partikulární řešení ve tvaru $y_p = (ax^2+bx+c)\cos(x)+(tx^2+ux+v)\sin(x)$. V tomto případě platí $r = 0$, protože číslo $\alpha + i\beta = i$ není kořenem charakteristické rovnice. Všimněme si, že v partikulárním řešení u funkce $\sin(x)$ figuruje kvadratický polynom, i když na pravé straně rovnice je pouze polynom lineární. To proto, že oba polynomy v obecném tvaru partikulárního řešení mají stejný stupeň, který je roven většímu ze stupňů polynomu na pravé straně rovnice.
- Pokud se goniometrická část na pravé straně nevyskytuje, je $\beta = 0$. Odsud potom plyne, že $\cos(\beta x) = 1$, $\sin(\beta x) = 0$ a ani goniometrická část, ani polynomy $Q(x)$ a $\widehat{Q}(x)$ se neuplatní. Například u diferenciální rovnice

  $$y'' - y = (x + 1)e^x$$

  hledáme partikulární řešení ve tvaru $y = x(ax + b)e^x$. V tomto případě platí $r = 1$, protože $\alpha + i\beta = 1$ je jednoduchým kořenem charakteristické rovnice.
- Pokud je polynom $Q(x)$ roven nule, vyskytuje se na pravé straně jenom funkce kosinus. Podobné platí pro polynom $P(x)$ a sinus. I v těchto případech se však v partikulárním řešení mohou vyskytnout obě funkce $\cos(\beta x)$ i $\sin(\beta x)$. Například partikulární řešení rovnice

  $$y'' - y = x\sin(x)$$

[5] Toto může nastat pouze je-li $\beta = 0$.

hledáme ve tvaru $y_p = (ax+b)\cos(x) + (cx+d)\sin(x)$ (uvažujeme i část s funkcí kosinus i přesto, že se funkce kosinus na pravé straně rovnice vůbec nevyskytuje). Z tvrzení věty totiž *nijak nevyplývá*, že je-li $Q(x) = 0$, platí totéž i pro $\widehat{Q}(x)$. I v tomto případě platí $r = 0$, protože číslo $\alpha + i\beta = i$ není kořenem charakteristické rovnice.

Poznámka 3.5. Větu 3.3 o odhadu partikulárního řešení je možno použít například pro rovnice

$$y'' + y' = \sin(x), \qquad y'' + 3y' + y = \frac{x\sin(x)}{e^x},$$
$$y'' + 3y' = -4, \qquad y'' + 2y' + y = (x^2+3)\cos(x)$$

(v druhé rovnici je $\alpha = -1$), ale není možno ji použít například na následující rovnice

$$y'' + 4y' + 3y = \sin(x) + x^2\cos(2x), \tag{3.6}$$
$$y'' + y' - 3y = \ln x$$

(u první rovnice „vadí“ odlišný argument u obou goniometrických funkcí, u druhé rovnice „vadí“ funkce $\ln(x)$). Rovnici (3.6) však přesto můžeme metodou neurčitých koeficientů vyřešit. Z principu superpozice snadno vidíme, že součet partikulárních řešení rovnic

$$y'' + 4y' + 3y = \sin(x) \tag{3.7}$$
$$y'' + 4y' + 3y = x^2\cos(2x) \tag{3.8}$$

je partikulárním řešením rovnice (3.6). Partikulární řešení rovnice (3.7) najdeme podle Věty 3.3 ve tvaru $y = a\sin x + b\cos x$ a partikulární řešení rovnice (3.8) ve tvaru $y = (ax^2 + bx + c)\sin(2x) + (sx^2 + tx + u)\cos(2x)$. Metodu neurčitých koeficientů lze použít dokonce i pro rovnici z Příkladu 3.5, pokud pravou stranu zapíšeme ve tvaru $2\sin^2(2x) = 1 - \cos(4x)$ a hledáme samostatně řešení rovnice

$$y'' + 4y = 1$$

ve tvaru $y = a$ a rovnice

$$y'' + 4y = -\cos(4x)$$

ve tvaru $y = b\cos(4x) + c\sin(4x)$. Součtem výsledných řešení bude (ověřte si sami) $y = \frac{1}{4} + \frac{\cos(4x)}{12}$. Po několika snadných úpravách vidíme, že tento výsledek je ekvivalentní výsledku získanému variací konstant, protože

$$\begin{aligned}
y &= \frac{1}{4} + \frac{\cos(4x)}{12} = \frac{1}{4} + \frac{\cos^2(2x)}{12} - \frac{\sin^2(2x)}{12} \\
&= \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{\cos^2(2x)}{12} - \frac{\sin^2(2x)}{12} = \frac{1}{6} + \frac{\cos^2(2x)}{12} + \frac{1}{12}(1 - \sin^2(2x)) \\
&= \frac{1}{6} + \frac{\cos^2(2x)}{12} + \frac{\cos^2(2x)}{12} = \frac{1}{6} + \frac{\cos^2(2x)}{6}.
\end{aligned}$$

Příklad 3.6. Hledejme řešení rovnice

$$y'' - 4y' + 4y = e^{-x}$$

z Příkladu 3.2 pomocí metody neurčitých koeficientů.

Řešení. Z postupu na straně 58 vidíme, že charakteristická rovnice asociované homogenní rovnice má dvojnásobný kořen $z_{1,2} = 2$ a asociovaná homogenní rovnice má obecné řešení $y(x) = C_1e^{2x} + C_2xe^{2x}$. Budeme nyní hledat partikulární řešení. Pravou stranu rovnice můžeme zapsat ve tvaru $e^{-x} = e^{-x}\big(1\cos(0x) + 0\sin(0x)\big)$ a ve Větě 3.3 stačí položit $\alpha = -1$, $\beta = 0$, $k = 0$ (konstantní polynom $P(x) = 1$ má stupeň nula) a $r = 0$ (číslo $\alpha + i\beta = -1$ není kořenem charakteristické rovnice). Partikulární řešení tedy hledáme ve tvaru $y_p(x) = e^{-x}(A\cos(0x)+B\sin(0x)) = Ae^{-x}$. Výpočtem derivací obdržíme $y_p'(x) = -Ae^{-x}$ a $y_p''(x) = Ae^{-x}$. Dosazením do rovnice

$$y'' - 4y' + 4y = e^{-x}$$

obdržíme

$$\begin{aligned} Ae^{-x} - 4\big(-Ae^{-x}\big) + 4Ae^{-x} &= e^{-x} \\ 9Ae^{-x} &= e^{-x} \\ 9A &= 1 \\ A &= \frac{1}{9} \end{aligned}$$

Partikulární řešení má tedy tvar $y_p(x) = \dfrac{1}{9}e^{-x}$ a obecné řešení je tedy $y(x) = C_1e^{2x} + C_2xe^{2x} + \dfrac{1}{9}e^{-x}$.

Příklad 3.7. Hledejme řešení rovnice

$$y'' - 5y' + 6y = xe^x$$

z Příkladu 3.3 pomocí metody neurčitých koeficientů.

Řešení. Z postupu na straně 58 vidíme, že charakteristická rovnice asociované homogenní rovnice má kořeny $z_1 = 2$ a $z_2 = 3$ a asociovaná homogenní rovnice má obecné řešení $y(x) = C_1e^{2x} + C_2e^{3x}$. Budeme nyní hledat partikulární řešení. Pravou stranu rovnice můžeme zapsat ve tvaru $xe^x = e^x\big(x\cos(0x)+0\sin(0x)\big)$ a ve Větě 3.3 je tedy nutno položit $\alpha = 1$, $\beta = 0$, $k = 1$ (lineární polynom $P(x) = x$ má stupeň jedna) a $r = 0$ (číslo $\alpha + i\beta = 1$ není kořenem charakteristické rovnice).

Partikulární řešení tedy hledáme (rozmyslete si podrobně sami) ve tvaru $y_p(x) = e^x(Ax + B)$. Derivací[6] získáme po úpravě $y_p'(x) = (Ax+A+B)e^x$ a $y_p''(x) = (Ax+2A+B)e^x$ a po dosazení do rovnice obdržíme

$$(Ax + 2A + B)e^x - 5\big((Ax + A + B)e^x\big) + 6\big(e^x(Ax + B)\big) = xe^x.$$

Po vydělení rovnice společným součinitelem e^x a po sečtení výrazů na levé straně obdržíme rovnici

$$2Ax + 2B - 3A = x,$$

která má platit pro všechna reálná x. To je možno splnit jen tehdy, pokud koeficienty u jednotlivých mocnin na levé a pravé straně budou stejné. Musí tedy platit

$$\begin{aligned} 2A &= 1 \\ 2B - 3A &= 0, \end{aligned}$$

protože koeficient u lineárního člene na pravé straně je 1 a absolutní člen je 0. Řešením této soustavy lineárních rovnic vidíme, že $A = \dfrac{1}{2}$ a $B = \dfrac{3}{2}A = \dfrac{3}{4}$. Řešením rovnice je tedy funkce $y(x) = C_1e^{2x} + C_2e^{3x} + \left(\dfrac{1}{2}x + \dfrac{3}{4}\right)e^x$.

Příklad 3.8. Hledejme řešení rovnice

$$y'' - 5y' + 6y = xe^{2x}.$$

Jedná se tedy o mírnou modifikaci předchozího příkladu, kdy jsme změnili exponent na pravé straně.

Řešení. Podobně jako v předchozím příkladě vidíme, že charakteristická rovnice asociované homogenní rovnice má kořeny $z_1 = 2$ a $z_2 = 3$ a asociovaná homogenní rovnice má obecné řešení

[6] Používáme vzorec pro derivaci součinu dvou funkcí.

$y(x) = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}$. Na rozdíl od předchozího příkladu je nyní $\alpha = 2$ a $r = 1$ (číslo $\alpha + i\beta = 2$ *je* jednoduchým kořenem charakteristické rovnice.
Partikulární řešení tedy hledáme (rozmyslete si podrobně sami) ve tvaru

$$y_p(x) = e^{2x}(Ax + B)x = e^{2x}(Ax^2 + Bx).$$

Derivací a úpravou získáme

$$y_p'(x) = (2Ax^2 + 2Bx + 2Ax + B)e^{2x}$$
$$y_p''(x) = (4Ax^2 + 4Bx + 8Ax + 4B + 2A)e^{2x}$$

a po dosazení do rovnice obdržíme

$$(4Ax^2 + 4Bx + 8Ax + 4B + 2A)e^{2x} - 5(2Ax^2 + 2Bx + 2Ax + B)e^{2x} + \\ + 6e^{2x}(Ax^2 + Bx) = xe^{2x}.$$

Po vydělení rovnice společným součinitelem e^{2x} a po sečtení výrazů na levé straně (všimněte si, že členy s x^2 se odečtou) obdržíme rovnici

$$-2Ax - B + 2A = x,$$

která má platit pro všechna reálná x. To je možno splnit jen tehdy, pokud koeficienty u jednotlivých mocnin na levé a pravé straně budou stejné. Musí tedy platit

$$-2A = 1,$$
$$-B + 2A = 0.$$

Řešením této soustavy lineárních rovnic vidíme, že $A = -\dfrac{1}{2}$ a $B = 2A = -1$. Řešením rovnice je tedy funkce $y(x) = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x} + \left(-\dfrac{1}{2}x - 1\right) xe^{2x}$.

Příklad 3.9. Hledejme řešení rovnice

$$y'' + 2y' + 2y = 2\cos x.$$

Řešení. Asociovaná homogenní rovnice

$$y'' + 2y' + 2y = 0$$

má charakteristickou rovnici

$$z^2 + 2z + 2 = 0$$

s kořeny $z_{1,2} = \dfrac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 2}}{2} = \dfrac{-2 \pm \sqrt{-4}}{2} = -1 \pm i$. Asociovaná homogenní rovnice má proto obecné řešení $y(x) = C_1 e^{-x} \cos x + C_2 e^{-x} \sin x$. Zbývá najít partikulární řešení.
Partikulární řešení budeme hledat ve tvaru

$$y_p(x) = A\cos x + B\sin x,$$

kde A a B jsou reálná čísla. Derivováním obdržíme $y_p'(x) = -A\sin x + B\cos x$ a $y_p''(x) = -A\cos x - B\sin x$. Dosazením do rovnice a úpravou obdržíme

$$(-A\cos x - B\sin x) + 2(-A\sin x + B\cos x) + 2(A\cos x + B\sin x) = 2\cos x$$
$$(A + 2B)\cos x + (B - 2A)\sin x = 2\cos x.$$

Aby tato rovnice platila pro všechna reálná x, je nutné a stačí, aby koeficienty u goniometrických funkcí nalevo i napravo byly stejné. Musí tedy platit

$$A + 2B = 2,$$
$$B - 2A = 0.$$

Řešením této soustavy rovnic obdržíme $A = \frac{2}{5}$ a $B = \frac{4}{5}$. Nyní již dosazením sestavíme snadno partikulární řešení a obecné řešení má tvar $y(x) = C_1e^{-x}\cos x + C_2e^{-x}\sin x + \frac{2}{5}\cos x + \frac{4}{5}\sin x$.

Úloha 3.1. Nalezněte obecné řešení následujících diferenciálních rovnic druhého řádu. Kde to je možné, použijte obě metody pro nalezení partikulárního řešení.

1. $y'' + y' - 2y = e^{-x}$

2. $y'' + 2y' = e^{x}$

3. $y'' + 5y' + 6y = xe^{-2x}$

4. $y'' - 4y = 1 + 2e^{x}$

5. $y'' - y = e^{x} + 1$

6. $y'' + 2y' + y = e^{-x}\ln x$

7. $y'' - 2y' + y = \dfrac{e^x}{x^3}$

8.* $y'' - 2y' + y = \dfrac{e^x}{x}$

9. $y'' - 2y' + y = \dfrac{e^x}{\sqrt{1-x^2}}$

10. $y'' + y = \dfrac{1}{\sin x}$

11. $y'' + y = \dfrac{1}{\sin^3 x}$

12. $y'' + y = \sin x$

13. $y'' + y = \dfrac{\cos x}{\sin^2 x}$

14. $y'' + y = 3$

15. $y'' + 4y = x$

16. $2y'' + y' - y = 2e^{x}$

17. $y'' - 3y' + 2y = e^{x}$

18. $y'' - 3y' + 2y = 10e^{-x}$

19. $y'' - 3y' + 2y = \sin x$

20.† $y'' + 3y' + 2y = \dfrac{1}{e^x + 1}$

Úloha 3.2. Nalezněte obecné řešení následujících diferenciálních rovnic druhého řádu. Pro nalezení partikulárního řešení použijte metodu neurčitých koeficientů.

1. $y'' + 2y' + y = x^2 + x - 2$

2. $y'' + 2y = x^3 - 1$

3. $y'' + 2y' - 3y = \sin x$

4. $y'' + 2y' - 3y = 3e^{x}$

5. $y'' - 2y = x^3$

6. $y'' + 2y' + y = \cos x - 2\sin x$

7. $y'' - 3y' + y = (x-2)e^{x}$

8. $y'' + y' + y = x^2 - 1$

Poznámka 3.6 (numerické řešení). Diferenciální rovnici (1.1) s počátečními podmínkami (1.2) je možno substitucí $y_1(x) = y(x)$ a $y_2(x) = y'(x)$ zapsat jako počáteční úlohu pro soustavu diferenciálních rovnic prvního řádu

$$\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = f(x) - p(x)y_2 - q(x)y_1 \end{cases} \quad \text{s počátečními podmínkami} \quad \begin{cases} y_1(x_0) = y_0, \\ y_2(x_0) = y_0'. \end{cases}$$

Modifikací Eulerovy metody vyložené v kapitole o diferenciálních rovnicích prvního řádu můžeme numericky aproximovat řešení pomocí schematu

$$\begin{aligned} x_{i+1} &= x_i + h, \\ y_{1,i+1} &= y_{1,i} + k_i h, \\ y_{2,i+1} &= y_{2,i} + l_i h, \end{aligned}$$

kde $k_i = y_{2,i}$ a $l_i = f(x_i) - p(x_i)y_{2,i} - q(x_i)y_{1,i}$. Různá vylepšení a modifikace tohoto základního postupu jsou detailně prostudovány a popsány v literatuře věnované numerickým metodám.

4. Diferenciální rovnice n-tého řádu

Definice (DR n-tého řádu). Nechť f je funkce spojitá na intervalu I. *Diferenciální rovnicí n-tého řádu, rozřešenou vzhledem k nejvyšší derivaci a neobsahující fázové proměnné* (zkráceně *diferenciální rovnicí n-tého řádu*) s neznámou y rozumíme rovnici

$$y^{(n)} = f(x), \tag{4.1}$$

kde $y^{(n)}$ značí n-tou derivaci funkce $y(x)$ podle proměnné x.
Řešením rovnice (4.1) (též *integrálem rovnice* (4.1)) rozumíme každou funkci f, která je n-krát diferencovatelná na intervalu I a splňuje zde rovnost (4.1).
Nechť $y_0, y_0', y_0'', \dots, y_0^{(n-1)}$ jsou reálná čísla. Úloha nalézt řešení rovnice (4.1), splňující v bodě $x_0 \in I$ *počáteční podmínky*

$$\begin{cases} y(x_0) = y_0, \\ y'(x_0) = y_0', \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} \end{cases} \tag{4.2}$$

se nazývá *počáteční* (též *Cauchyova*) *úloha* pro rovnici (4.1).

Poznámka 4.1 (existence a jednoznačnost řešení). Libovolná Cauchyova úloha (4.1)–(4.2) má vždy jediné řešení a toto řešení je definováno na celém intervalu I.

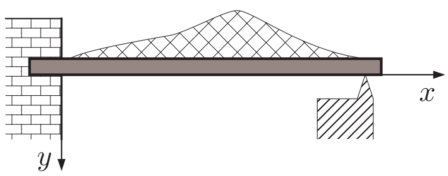
Poznámka 4.2 (obecnější tvar DR n-tého řádu). Obecněji diferenciální rovnicí n-tého řádu rozumíme rovnici tvaru

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}),$$

kde f je funkce $(n+1)$ proměnných, nebo tvaru

$$0 = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}, y^{(n)}),$$

kde f je funkce $(n+2)$ proměnných. Tyto rovnice jsou nepoměrně komplikovanější a v tomto textu se jimi zabývat nebudeme. Proto budeme pod pojmem diferenciální rovnice n-tého řádu rozumět výhradně rovnici tvaru (4.1). V praktických aplikacích se setkáváme především s lineárními diferenciálními rovnicemi druhého řádu — tyto rovnice se hojně objevují v klasické nerelativistické mechanice a věnovali jsme se jim v předchozích částech této kapitoly. Z rovnic vyšších řádů zmiňme zejména rovnice čtvrtého řádu, které mají uplatnění ve statice, jak ukazuje následující příklad.



OBRÁZEK 2. Nosník.

Příklad 4.1 (deformace nosníků). Uvažujme vodorovný nosník, který je upevněn na dvou koncích (zabudovaný do stěny nebo podložený), případně zabudovaný do stěny na jednom konci a volný na druhém konci. Předpokládejme, že v místě ve vzdálenosti x od levého konce je nosník vertikálně namáhán silou $f(x)$ (síla se může měnit podél nosníku). Označme $y(x)$ odchylku nosníku od nezatížené polohy v místě ve vzdálenosti x od levého konce. Funkce y splňuje diferenciální rovnici čtvrtého řádu

$$y^{(iv)} = kf(x),$$

kde k je konstanta související s materiálem a s tvarem nosníku.

Rovnici (4.1) řešíme postupnou integrací. Každým integrováním rovnice (4.1) obdržíme rovnici řádu o jedničku nižšího a integrační konstantu. n-násobným opakováním tohoto postupu obdržíme funkci y a celkem n integračních konstant, které obecně navzájem nijak nesouvisí. Takto získáváme *obecné řešení rovnice* (4.1) v explicitním tvaru. Všimněme si, že (stejně jako u ostatních rovnic) obecné řešení obsahuje tolik konstant, jaký je řád diferenciální rovnice.

ALGORITMUS 7 (řešení DR n-tého řádu). ♔

(i) Vyjdeme z rovnice (4.1) a integrujeme ji. Obdržíme rovnici

$$y^{(n-1)}(x) = \int f(x)\,\mathrm{d}x + C_1,$$

kde C_1 je integrační konstanta a $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ značí libovolnou z primitivních funkcí k funkci f na intervalu I.

(ii) Rovnost získanou v předchozím kroku opět integrujeme, obdržíme tedy

$$y^{(n-2)}(x) = \int \left(\int f(x)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}x + C_1 x + C_2,$$

kde C_2 je integrační konstanta, která obecně nijak nesouvisí s C_1 a $\int \left(\int f(x)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}x$ značí libovolnou z primitivních funkcí k funkci $\int f(x)\,\mathrm{d}x$.

(iii) Postup z předchozích kroků opakujeme. Po výpočtu n-tého integrálu na levé straně obdržíme hledanou funkci y a na pravé straně funkci, která vznikla n-násobným integrováním funkce $f(x)$ a výraz sestávající se z celkem n obecně nesouvisejících konstant $C_1, C_2, \ldots, C_n$. Získali jsme tedy obecné řešení rovnice (4.1) a toto řešení již je v explicitním tvaru. Je-li cílem algoritmu nalezení obecného řešení, jsme hotovi.

(iv) Jsou-li zadány počáteční podmínky, dosadíme tyto do jednotlivých derivací funkce y. Soustavu rovnic, kterou obdržíme, vyřešíme vzhledem k neznámým $C_1, C_2, \ldots, C_n$ postupným dosazováním. Hodnoty, které vypočteme, použijeme v obecném řešení, čímž obdržíme řešení partikulární.

Příklad 4.2. Hledejme řešení počáteční úlohy ♖

$$y^{(iv)} = xe^x, \quad y(0) = y'(0) = 1,\ y''(0) = y'''(0) = 0.$$

Řešení. Zadanou rovnici budeme postupně integrovat (per–partés)

$$y''' = \int xe^x\,\mathrm{d}x = (x-1)e^x + c_1,$$

$$y'' = \int ((x-1)e^x + c_1)\,\mathrm{d}x = (x-2)e^x + c_1 x + c_2,$$

$$y' = \int ((x-2)e^x + c_1 x + c_2)\,\mathrm{d}x = (x-3)e^x + c_1\frac{x^2}{2} + c_2 x + c_3,$$

$$y = (x-4)e^x + c_1\frac{x^3}{6} + c_2\frac{x^2}{2} + c_3 x + c_4,$$

čímž jsme v posledním kroku obdrželi obecné řešení rovnice. Do jednotlivých rovnic dosadíme počáteční podmínky

$$0 = -1 + c_1,$$

$$
\begin{aligned}
0 &= -2 + c_2,\\
1 &= -3 + c_3,\\
1 &= -4 + c_4.
\end{aligned}
$$

Tuto soustavu vyřešíme a získané konstanty dosadíme do obecného řešení. Hledaným partikulárním řešením je tedy funkce $y_p = (x-4)e^x + \frac{1}{6}x^3 + x^2 + 4x + 5$.

Příklad 4.3. Hledejme obecné řešení rovnice

$$y''' = \sin x \cos x.$$

Řešení. Rovnici nejprve upravíme do tvaru vhodnějšího pro integrování

$$y''' = \frac{1}{2}\sin(2x),$$

a postupně integrujeme

$$
\begin{aligned}
y'' &= -\frac{1}{4}\cos(2x) + c_1,\\
y' &= -\frac{1}{8}\sin(2x) + c_1 x + c_2,\\
y &= \frac{1}{16}\cos(2x) + \frac{1}{2}c_1 x^2 + c_2 x + c_3.
\end{aligned}
$$

Obecné řešení ještě upravíme

$$
\begin{aligned}
y &= \frac{1}{16}(\cos^2 x - \sin^2 x) + \frac{1}{2}c_1 x^2 + c_2 x + c_3,\\
&= \frac{1}{16}(\cos^2 x - (1-\cos^2 x)) + \frac{1}{2}c_1 x^2 + c_2 x + c_3,\\
&= \frac{1}{8}\cos^2 x + \frac{1}{2}c_1 x^2 + c_2 x + \left(c_3 - \frac{1}{16}\right).
\end{aligned}
$$

Po přeznačení konstant dostáváme obecné řešení

$$y = \frac{1}{8}\cos^2 x + C_1 x^2 + C_2 x + C_3, \quad C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}.$$

Úloha 4.1. Nalezněte obecná řešení následujících diferenciálních rovnic.

1.* $y^{(iv)} = 0$

2.* $y''' = 12x$

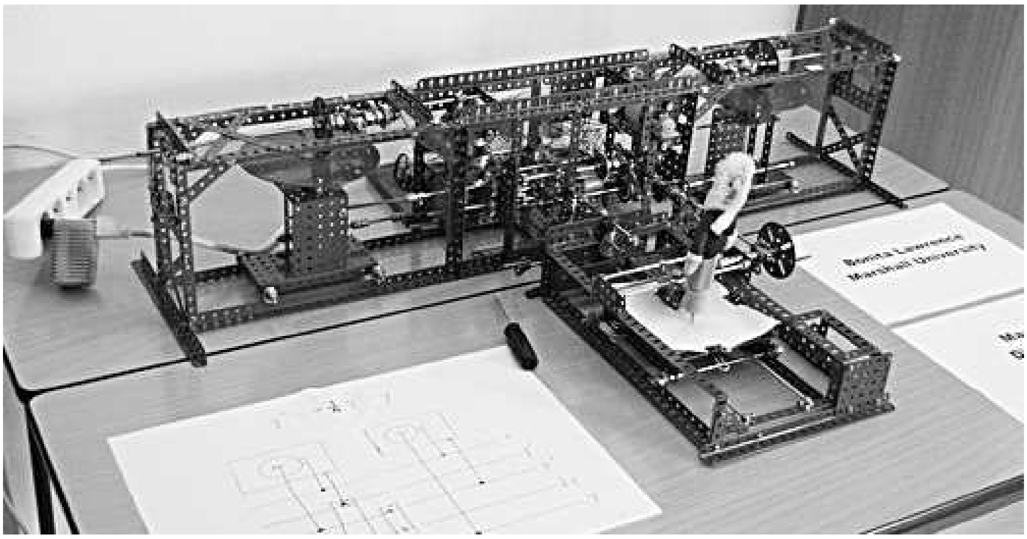
3. $y'' = \frac{1}{x}$, $x > 0$

4. $y''' = 4(1-x)^2$

5. $y''' = e^{-x}$

6.† $y''' = \frac{1}{x}$

7.† $y^{(iv)} = x \sin x$



Analogové počítače umožňují derivovat a integrovat fyzikální veličiny vhodným sestavením elektrických obvodů a mechanických nebo vodních konstrukcí.

Počítač na obrázku je sestaven ze stavebnice Meccano — obdoby u nás známého Merkuru. Sestavil jej tým studentů z Marshall University (USA), vedený prof. Bonita Lawrence. V konfiguraci na snímku počítač řeší diferenciální rovnici $y'' + \frac{1}{4}y' + y = 0.$
Foto: J. Franců, konference Equadiff 12

Kapitola 3

Autonomní systémy v rovině

1. Úvod do teorie

V Poznámce 2.8 na straně 21 jsme se seznámili s autonomní diferenciální rovnicí. V této kapitole se budeme věnovat podobné problematice, ale zaměříme svoji pozornost na soustavy dvou rovnic o dvou neznámých, kde figurují hledané funkce a jejich derivace, ale již zde nefiguruje nezávislá proměnná. V tomto případě tradičně nezávislou proměnnou neoznačujeme x jako doposud, ale t a nazýváme ji *čas*. Neznámé funkce budou $x(t)$ a $y(t)$.

Definice (autonomní systém v rovině). Nechť f a g jsou spojité funkce dvou proměnných. Soustava dvou diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned} x' &= f(x,y), \\ y' &= g(x,y), \end{aligned} \tag{AS}$$

kde $' = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$, se nazývá *dvourozměrný autonomní systém*. Jeho *řešením* rozumíme každou dvojici funkcí $x(t)$, $y(t)$, které mají derivace na uvažovaném intervalu a po jejich dosazení do (AS) přejdou obě rovnice v identity. Proměnná t se nazývá *čas*.

Definice (počáteční úloha). Nechť t_0, x_0 a y_0 jsou libovolná reálná čísla. *Počáteční úloha* pro soustavu (AS) je úloha najít řešení soustavy (AS), které v bodě t_0 splňuje *počáteční podmínky*

$$\begin{cases} x(t_0) = x_0, \\ y(t_0) = y_0. \end{cases} \tag{1.1}$$

Poznámka 1.1 (posun v čase). Je-li dvojice funkcí $x(t)$, $y(t)$ řešením soustavy (AS) a je-li c libovolné reálné číslo, je řešením i dvojice funkcí $x(t+c)$, $y(t+c)$. Čas t_0, ve kterém formulujeme počáteční podmínky, lze tedy volit libovolně. Zpravidla klademe bez újmy na obecnosti $t_0 = 0$.

Definice (stacionární řešení). Nechť x^* a y^* jsou reálná čísla, která splňují

$$\begin{aligned} f(x^*, y^*) &= 0, \\ g(x^*, y^*) &= 0. \end{aligned}$$

Pak dvojice konstantních funkcí $x(t) = x^*$, $y(t) = y^*$ je řešením systému (AS). Toto řešení nazýváme *stacionární řešení*.

Příklad 1.1. Není těžké ověřit, že řešením autonomního systému

$$\begin{aligned} x' &= -y, \\ y' &= x, \end{aligned} \tag{1.2}$$

je dvojice funkcí

$$\begin{cases} x(t) = A\cos(t+c), \\ y(t) = A\sin(t+c), \end{cases} \tag{1.3}$$

kde A a c jsou libovolná reálná čísla. Vskutku:

$$x' = \big(A\cos(t+c)\big)' = A\big(-\sin(t+c)\big)\cdot 1 = -A\sin(t+c) = -y,$$
$$y' = \big(A\sin(t+c)\big)' = A\cos(t+c)\cdot 1 = x.$$

Lze dokonce ukázat, že v tomto zápise jsou pro vhodnou volbu konstant obsažena *všechna* řešení.

2. Trajektorie

Nalézt obecně řešení autonomního systému je poměrně nesnadná záležitost. V mnoha případech se však řešení chovají po uplynutí dostatečně dlouhého času relativně jednoduše: konvergují k některému z tzv. stacionárních bodů nebo k některému ze speciálních řešení. Pro prozkoumání takového chování není nutno znát analytické řešení. Následující pojem je nadmíru užitečný pro vyšetřování kvalitativních vlastností autonomních systému: definuje pojem trajektorie, který je možno chápat jako průmět prostorového třídimenzionálního grafu řešení do roviny.

Definice (trajektorie autonomního systému). Nechť dvojice funkcí $x(t)$, $y(t)$ je řešením systému (AS). Množina T bodů v rovině (x, y) definovaná relací

$$T = \{(\tilde{x}, \tilde{y}) :\ x(\tilde{t}) = \tilde{x} \text{ a } y(\tilde{t}) = \tilde{y} \text{ pro nějaké } \tilde{t} \in \mathbb{R}\}$$

se nazývá *trajektorie systému* (AS). Rovinu, do které zakreslujeme trajektorie, nazýváme *fázovou rovinou*.
Trajektorie stacionárního řešení je tvořena jediným bodem $[x^*, y^*]$ a nazývá se *stacionární bod* (též *singulární bod*).

Příklad 2.1. Uvažujme systém (1.2) a jeho řešení (1.3). Nalezneme několik partikulárních řešení a jim odpovídající trajektorie.

- Zadáme-li počáteční podmínku $x(0) = 0$ a $y(0) = 0$, je řešením dvojice konstantních funkcí

  $$\begin{cases} x(t) = 0, \\ y(t) = 0. \end{cases} \tag{2.1}$$

  Jedná se o konstantní řešení a odpovídající trajektorie je tvořena pouze bodem $[0, 0]$. Tento bod je jediným stacionárním bodem tohoto systému (1.2).
- Zadáme-li počáteční podmínku $x(0) = 1$ a $y(0) = 0$, je řešením dvojice funkcí

  $$\begin{cases} x(t) = \cos t, \\ y(t) = \sin t. \end{cases} \tag{2.2}$$

  V rovině xy se jedná o parametrické rovnice jednotkové kružnice.
- Zadáme-li počáteční podmínku $x(0) = 0$ a $y(0) = 1$, je řešením dvojice funkcí

  $$\begin{cases} x(t) = \cos\Big(t + \dfrac{\pi}{2}\Big), \\ y(t) = \sin\Big(t + \dfrac{\pi}{2}\Big). \end{cases} \tag{2.3}$$

V rovině xy se jedná *(opět!)* o parametrické rovnice jednotkové kružnice. Ač jsme obdrželi jiné řešení počáteční úlohy, trajektorie tohoto řešení je stejná. To je proto, že body $[1, 0]$ i $[0, 1]$ uvažované v minulých počátečních podmínkách leží oba na téže trajektorii.

- Zadáme-li počáteční podmínku $x(0) = 2$ a $y(0) = 0$, je řešením dvojice funkcí $x(t) = 2\cos t, y(t) = 2\sin t$. V rovině xy se jedná o parametrické rovnice kružnice se středem v počátku a poloměrem 2. Dostáváme jinou trajektorii než v předešlých případech, protože bod $[2, 0]$ již na jednotkové kružnici neleží.

Všechny ostatní trajektorie kromě stacionárního bodu jsou kružnice se středem v počátku. Všimněte si, že trajektorie odpovídající řešení (2.2) a (2.3) jsou totožné, i když se jedná o různé funkce!

Poznámka 2.1 (geometrické vlastnosti trajektorií, fázový portrét). Zakreslíme-li trajektorii nějakého řešení autonomního systému, ztrácíme informaci o čase. Máme pouze informace, kterých hodnot (x, y) řešení nabývají v tomtéž okamžiku. Nemáme však informaci o tom, za jak dlouho řešení do tohoto stavu dospěje. Abychom měli zachycenu alespoň informaci o tom, který stav předchází a který následuje, zpravidla trajektorie orientujeme podle směru toku času.
Prochází-li trajektorie bodem (x^*, y^*), jedná se o trajektorii odpovídající řešení počáteční úlohy

$$\begin{cases} x(0) = x^*, \\ y(0) = y^*. \end{cases}$$

Tato trajektorie má v bodě (x^*, y^*) tečnu danou směrovým vektorem $(f(x^*, y^*), g(x^*, y^*))$. Podobně jako u směrového pole diferenciální rovnice, zakreslení směrových vektorů tečných k trajektoriím lze uskutečnit jen ze znalosti funkcí f a g a odsud je zpravidla možné si udělat základní představu o tvaru trajektorií. Systém těchto vektorů spolu se zakreslenými vybranými trajektoriemi se nazývá *fázový portrét* autonomního systému. Jedná se a jakousi obdobu směrového pole diferenciální rovnice.
Vzhledem k jednoznačné řešitelnosti se dvě různé trajektorie nikde neprotínají. Mají-li proto dvě trajektorie společný alespoň jeden bod, jsou zcela totožné!

Poznámka 2.2 (nulkliny). Křivka složená z bodů (x, y) v rovině, které splňují $f(x, y) = 0$ se nazývá x-*nulklina*. V bodech této nulkliny platí $x' = 0$ a veličina x se tedy v okolí této nulkliny nemění (resp. mění velice pomalu). Z geometrického hlediska má tato křivka vlastnost, že každá trajektorie ji protíná ve svislém směru (zdola nahoru nebo shora dolů).
Podobně, křivka složená z bodů (x, y) v rovině, které splňují $g(x, y) = 0$ se nazývá y-*nulklina*. Tato křivka má tu vlastnost, že každá trajektorie ji protíná ve vodorovném směru, protože v bodech y-nulkliny platí $y' = 0$.

Příklad 2.2. Systém (1.2) má jednu x-nulklinu (přímku $y = 0$, tj. osu x) a jednu y-nulklinu (přímku $x = 0$, tj. osu y).

Poznámka 2.3 (pozitivně a negativně invariantní oblasti).

- Ve fázové rovině mohou existovat oblasti, které mají tu vlastnost, že každá trajektorie která vstoupí do této oblast ji již v žádném pozdějším čase nemůže opustit. Tyto oblasti se nazývají *pozitivně invariantní oblasti*.
- Naopak, oblasti, které mají tu vlastnost, že pokud se v nich trajektorie vyskytuje v jistém čase, vyskytuje se v nich i ve všech dřívějších časech, se nazývají *negativně invariantní*.

Poznámka 2.4 (trajektorie jako integrální křivky). Na část trajektorie T, kde každému x odpovídá jediné y, lze pohlížet jako na graf funkce $y = y(x)$. Vzhledem k tomu, že podle pravidla pro derivaci složené a inverzní funkce platí v diferenciální symbolice

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \cdot \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \cdot \frac{1}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}} = \frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}},$$

vyhovuje uvažovaná část trajektorie diferenciální rovnici

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{g(x,y)}{f(x,y)}.$$

Tato rovnice definuje jednoznačně trajektorie (až na směr toku času) podobně jako systém (AS). Poznamenejme, že v bodech x-nulklin (viz dále) je pravá strana rovnice nespojitá a ve stacionárních bodech může být porušena jednoznačnost řešení.

Příklad 2.3. Trajektorie systému (1.2) jsou popsány diferenciální rovnicí

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{y'}{x'} = \frac{x}{-y} = -\frac{x}{y}.$$

Tuto rovnici můžeme řešit separací proměnných následovně:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= -\frac{x}{y},\\
-y\,\mathrm{d}y &= x\,\mathrm{d}x,\\
-\frac{y^2}{2} + c &= \frac{x^2}{2},\\
-y^2 + C &= x^2, \qquad \text{kde } C = 2c \text{ je nová konstanta}\\
x^2 + y^2 &= C.
\end{aligned}$$

Odsud vidíme, že se jedná o rovnice soustředných kružnic. To jsme ostatně viděli již z obecného řešení (1.3), které bylo parametrickým vyjádřením rovnice kružnice o poloměru A.

Věta 2.1 (klasifikace trajektorií). *Předpokládejme, že každá trajektorie systému* (AS) *je prodloužena maximálně oběma směry. Rozeznáváme pouze tři následující typy trajektorií:*

(i) ***Stacionární body**. Tyto body odpovídají stacionárním řešením.*
(ii) *Uzavřené trajektorie (**cykly**). Tyto trajektorie odpovídají periodickým řešením. Uvnitř každého cyklu leží alespoň jeden stacionární bod.*
(iii) *Trajektorie, které samy sebe nikde neprotínají a pro $t \to \pm\infty$ tyto trajektorie mají jednu z následujících vlastností.*
  (a) *Trajektorie mají alespoň jednu složku neohraničenou.*
  (b) *Trajektorie konvergují k některému ze stacionárních bodů.*
  (c) *Trajektorie konvergují k některému z cyklů.*
  (d) *Trajektorie konvergují k množině tvořené konečným počtem stacionárních bodů a jinými trajektoriemi, které vedou z jednoho stacionárního bodu do druhého.*

Poznámka 2.5. V praxi se s trajektoriemi, které konvergují ke složitější množině než ke stacionárnímu bodu nebo cyklu většinou nesetkáváme. Každá trajektorie, která je ohraničená a není stacionárním bodem ani cyklem tedy začíná a končí buď ve stacionárním bodě nebo se odmotává z nějakého cyklu (resp. namotává na nějaký cyklus).

Příklad 2.4. Systém (1.2) má pouze dva druhy trajektorií: stacionární bod v počátku a cykly, které jsou tvořeny soustřednými kružnicemi.

Poznámka 2.6 (spojitá závislost na počátečních podmínkách). Malá změna počátečních podmínek vyvolává relativně malou změnu výsledného řešení autonomního systému. Z tohoto důvodu dvě trajektorie, které procházejí dvěma dostatečně blízkými body, mají v okolí tohoto bodu přibližně stejný směr, s výjimkou okolí stacionárních bodů.

3. Stacionární body

Ohraničené trajektorie zpravidla konvergují k některému ze stacionárních bodů nebo cyklů. Proto si v následujících odstavcích všimneme blíže stacionárních bodů. Nejprve všechny stacionární body rozdělíme do několika skupin, podle chování trajektorií v jejich okolí.

Poznámka 3.1 (klasifikace stacionárních bodů). Podle chování trajektorií v okolí stacionárních bodů rozdělujeme stacionární body do několika navzájem disjunktních skupin (viz Tabulka 1 na straně 77). Nechť $[x^*, y^*]$ je stacionárním bodem systému (AS).

Uzel: Stacionární bod $[x^*, y^*]$ se nazývá *uzel*, jestliže všechny trajektorie z nějakého okolí tohoto bodu konvergují pro $t \to \infty$ nebo $t \to -\infty$ k bodu $[x^*, y^*]$ tak, že nedochází k oscilacím kolem limitní hodnoty.

Ohnisko: Stacionární bod $[x^*, y^*]$ se nazývá *ohnisko*, jestliže všechny trajektorie z nějakého okolí tohoto stacionární bodu do tohoto bodu konvergují buď pro $t \to \infty$ nebo pro $t \to -\infty$ a to tak, že kolem tohoto bodu oscilují se zmenšující se amplitudou.

Sedlo: Stacionární bod $[x^*, y^*]$ se nazývá *sedlo*, jestliže v každém jeho okolí existuje pouze konečný počet trajektorií, které pro $t \to \pm\infty$ konvergují k tomuto bodu.

Bod rotace: Stacionární bod $[x^*, y^*]$ se nazývá *bod rotace*, jestliže každé jeho okolí obsahuje nekonečně mnoho trajektorií, které jsou cykly. Pokud v nějakém okolí existují pouze cykly, nazývá se tento bod navíc *střed*.

- Uzel nebo ohnisko nazýváme *stabilní*, jestliže všechny trajektorie do něj konvergují pro $t \to \infty$, tj. všechny trajektorie z nějakého okolí směřují do tohoto bodu. V opačném případě tento bod nazýváme *nestabilní*.
- Pro stabilní uzel a ohnisko existují oblasti ve fázové rovině, které mají tu vlastnost, že všechny trajektorie procházející některou z těchto oblastí konvergují pro $t \to \infty$ do tohoto stacionárního bodu. Takové oblasti se nazývají *oblasti atraktivity* stacionárního bodu.

Příklad 3.1. Stacionární bod $[0, 0]$ systému (1.2) je střed (viz Příklad 2.4).

Definice (Jacobiho matice). Matice

$$J(x,y) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) & \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) \\ \dfrac{\partial g}{\partial x}(x,y) & \dfrac{\partial g}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix}$$

se nazývá *Jacobiho matice soustavy* (AS).

Definice (charakteristická rovnice, vlastní čísla). *Charakteristickou rovnicí* matice A rozumíme kvadratickou rovnici $\det(A - \lambda I) = 0$ s neznámou λ. Kořeny této rovnice (reálné nebo komplexní) nazýváme *vlastní čísla matice* A (též *charakteristická čísla matice* A).

Poznámka 3.2 (charakteristická rovnice 2×2 matice). Charakteristickou rovnicí matice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ je podle definice (rozepište si podrobně sami) rovnice

$$\lambda^2 - (a+d)\lambda + ad - bc = 0.$$

Poznámka 3.3 (charakteristická rovnice pomocí stopy a determinantu). Označíme-li $\mathrm{Tr}(A) = a + d$ *stopu*[1] matice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ a $\det(A) = ad - bc$ *determinant* matice A, je možno charakteristickou rovnici matice psát ve tvaru $\lambda^2 - \mathrm{Tr}(A)\lambda + \det(A) = 0$.

[1] Stopa čtvercové matice je číslo udávající součet prvků v hlavní diagonále.

Příklad 3.2. Jacobiho matice systému (1.2) v bodě $[0, 0]$ je matice $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Charakteristická rovnice této matice má tvar

$$\lambda^2 + 1 = 0$$

a vlastní čísla této matice jsou $\lambda_1 = i$, $\lambda_2 = -i$, kde i je imaginární jednotka (vlastní čísla nejsou reálná).

Úloha 3.1. Ukažte, že pokud v matici 2×2 je některé číslo ve vedlejší diagonále nulové, jsou čísla v hlavní diagonále vlastními čísly této matice.

Návod: Ukažte, že pokud platí $b = 0$ nebo $c = 0$, má charakteristická rovnice matice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ tvar $(a - \lambda)(d - \lambda) = 0$.

Věta 3.1 (klasifikace stacionárních bodů pomocí vlastních čísel Jacobiho matice). *Uvažujme vlastní čísla Jacobiho matice vypočtené ve stacionárním bodě.*

- *Jsou-li obě vlastní čísla reálná kladná, je stacionární bod nestabilní uzel.*
- *Jsou-li obě vlastní čísla reálná záporná, je stacionární bod stabilní uzel.*
- *Jsou-li vlastní čísla reálná a mají-li opačná znaménka, je stacionární bod sedlo.*
- *Jsou-li vlastní čísla komplexně sdružená s kladnou reálnou částí, je stacionární bod nestabilní ohnisko.*
- *Jsou-li vlastní čísla komplexně sdružená se zápornou reálnou částí, je stacionární bod stabilní ohnisko.*
- *Jsou-li vlastní čísla komplexně sdružená s nulovou reálnou částí, je stacionární bod ohnisko nebo bod rotace.*

V následující větě D značí determinant Jacobiho matice v bodě (x^*, y^*) a Δ stopu Jacobiho matice v tomto bodě, tj.

$$D = \det J(x^*, y^*) = \frac{\partial f}{\partial x}(x^*, y^*)\frac{\partial g}{\partial y}(x^*, y^*) - \frac{\partial f}{\partial y}(x^*, y^*)\frac{\partial g}{\partial x}(x^*, y^*),$$

$$\Delta = \operatorname{Tr} J(x^*, y^*) = \frac{\partial f}{\partial x}(x^*, y^*) + \frac{\partial g}{\partial y}(x^*, y^*).$$

Věta 3.2 (klasifikace stacionárních bodů pomocí determinantu a stopy Jacobiho matice). *Nechť (x^*, y^*) je stacionární bod soustavy* (AS) *a $J(x^*, y^*)$ hodnota Jacobiho matice v tomto bodě. Pomocí čísel D a Δ lze rozhodnout o kvalitě stacionárního bodu (x^*, y^*) podle následující tabulky.*

$D < 0$			*sedlo*
$D > 0$	$\Delta > 0$	$\Delta^2 \geq 4D$	*nestabilní uzel*
		$\Delta^2 < 4D$	*nestabilní ohnisko*
	$\Delta < 0$	$\Delta^2 \geq 4D$	*stabilní uzel*
		$\Delta^2 < 4D$	*stabilní ohnisko*
	$\Delta = 0$		*bod rotace nebo ohnisko*

Příklad 3.3. Najděte stacionární body autonomního systému

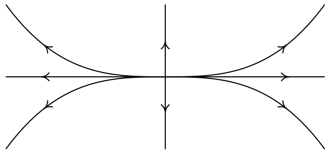
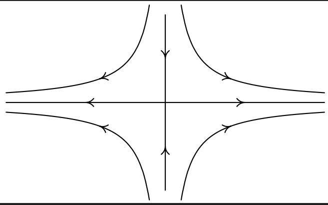
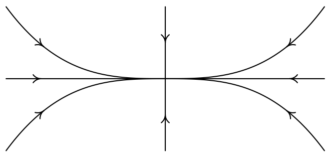
$$x' = x(x - 3y + 1),$$

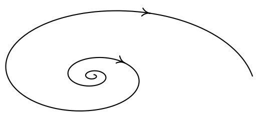
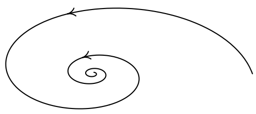
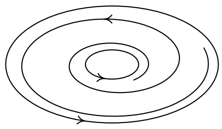
$$y' = x^2 - 3y - 1$$

a určete jejich typ. Nakreslete nulkliny a trajektorie autonomního systému.

Vliv vlastních hodnot na typ stacionárního bodu

Zjednodušeně řečeno, kdykoliv se mezi vlastními hodnotami Jacobiho matice v bodě S objeví vlastní hodnota se zápornou reálnou částí, existuje trajektorie konvergující do bodu S. Pokud má některá vlastní hodnota kladnou reálnou část, existuje trajektorie vycházející z bodu S. Pokud mají vlastní hodnoty nenulovou imaginární část, dochází v okolí bodu S k oscilacím. Jednotlivé možnosti jsou shrnuty v následující tabulce. ($\Re(\lambda)$ značí reálnou část čísla λ.)

Reálné vlastní hodnoty, $\lambda_{1,2} \in \mathbb{R}$	**typ stacionárního bodu**	**typický průběh trajektorií**
$\lambda_1 \geq \lambda_2 > 0$	nestabilní uzel	
$\lambda_1 > 0 > \lambda_2$	sedlo	
$0 > \lambda_1 \geq \lambda_2$	stabilní uzel	

Komplexní vlastní hodnoty, $\lambda_{1,2} \notin \mathbb{R}$	**typ stacionárního bodu**	**typický průběh trajektorií**
$\Re(\lambda_{1,2}) > 0$	nestabilní ohnisko	
$\Re(\lambda_{1,2}) < 0$	stabilní ohnisko	
$\Re(\lambda_{1,2}) = 0$	ohnisko nebo bod rotace	 nebo kterákoliv z předchozích dvou možností

TABULKA 1. Klasifikace stacionárních bodů podle vlastních hodnot

Řešení. Stacionární body nalezneme řešením soustavy rovnic

$$0 = x(x - 3y + 1),$$
$$0 = x^2 - 3y - 1.$$

Z první rovnice plyne, že platí buď $x = 0$ nebo $(x - 3y + 1) = 0$. Rozdělíme tedy postup na dva případy.

(i) Dosazením $x = 0$ do druhé rovnice získáváme

$$0 = 0 - 3y - 1$$
$$y = -\frac{1}{3}$$

a bod $S_1 = \left[0, -\frac{1}{3}\right]$ je prvním stacionárním bodem.

(ii) Uvažujme druhou možnost, $(x - 3y + 1) = 0$. Aby byly splněny obě rovnice, je nutno řešit soustavu

$$0 = x - 3y + 1,$$
$$0 = x^2 - 3y - 1.$$

Odečtením první rovnice od druhé získáme kvadratickou rovnici $0 = x^2 - x - 2$, která má kořeny $x = -1$ a $x = 2$. Postupným dosazením těchto hodnot do jedné z rovnic a výpočtem y dostáváme další dva stacionární body $S_2 = [-1, 0]$ a $S_3 = [2, 1]$.

Autonomní systém má tedy tři stacionární body. Jacobiho matice v obecném bodě $[x, y]$ má tvar $J(x, y) = \begin{pmatrix} 2x - 3y + 1 & -3x \\ 2x & -3 \end{pmatrix}$. Vyšetříme nyní jednotlivé stacionární body.

(i) Stacionární bod $S_1 = \left[0, -\frac{1}{3}\right]$. V tomto bodě má Jacobiho matice tvar $J(S_1) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$. Charakteristický polynom má tvar

$$\det(J(S_1) - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2 - \lambda & 0 \\ 0 & -3 - \lambda \end{vmatrix} = (2 - \lambda)(-3 - \lambda).$$

Díky tomu, že matice je diagonální, jsme polynom obdrželi již přímo rozložený na kořenové činitele. Proto vidíme přímo vlastní čísla $\lambda_1 = 2$ a $\lambda_2 = -3$. Protože jsou obě vlastní čísla reálná a mají opačná znaménka, je stacionární bod S_1 typu sedlo.

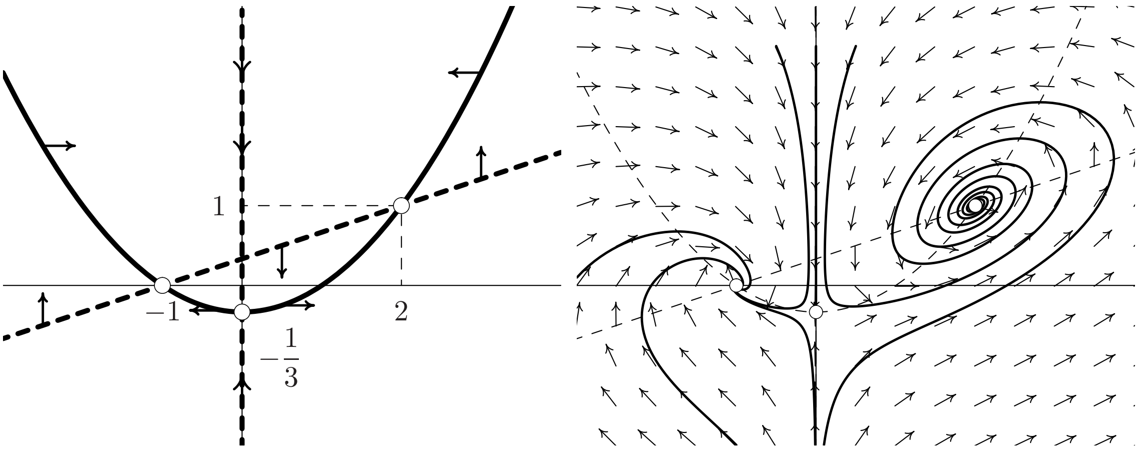
(ii) Stacionární bod $S_2 = [-1, 0]$. V tomto bodě má Jacobiho matice tvar $J(S_2) = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$. Charakteristický polynom má tvar

$$\det(J(S_2) - \lambda I) = \begin{vmatrix} -1 - \lambda & 3 \\ -2 & -3 - \lambda \end{vmatrix} = (-1 - \lambda)(-3 - \lambda) - 3(-2) = \lambda^2 + 4\lambda + 9.$$

Kořeny charakteristického polynomu jsou (pomocí vzorce pro kořeny kvadratické rovnice) $\lambda_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{-20}}{2} = -2 \pm i\sqrt{5}$. Protože jsou kořeny komplexně sdružená čísla se zápornou reálnou částí, jedná se o stabilní ohnisko.

(iii) Stacionární bod $S_3 = [2, 1]$. V tomto bodě má Jacobiho matice tvar $J(S_3) = \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$. Charakteristický polynom má tvar

$$\det(J(S_3) - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2 - \lambda & -6 \\ 4 & -3 - \lambda \end{vmatrix} = (2 - \lambda)(-3 - \lambda) - (-6)4 = \lambda^2 + \lambda + 18.$$



OBRÁZEK 1. Nulkliny a trajektorie autonomního systému z Příkladu 3.3.

Kořeny charakteristického polynomu jsou (pomocí vzorce pro kořeny kvadratické rovnice) $\lambda_{1,2} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{-71}}{2} = -\dfrac{1}{2} \pm i\dfrac{\sqrt{71}}{2}$. Kořeny jsou opět komplexně sdružená čísla se zápornou reálnou částí, jedná se tedy o stabilní ohnisko.

Pokusíme se zakreslit směrové pole a odhadnout tvar trajektorií.

y-nulklina má rovnici $0 = x^2 - 3y - 1$. Odsud osamostatněním y obdržíme $y = \dfrac{1}{3}(x^2 - 1)$ a vidíme, že se jedná o parabolu posunutou směrem dolů, která protíná osu x v bodech 1 a -1. Vrchol paraboly je v bodě $\left[0, -\dfrac{1}{3}\right]$. Tuto parabolu protínají všechny trajektorie ve vodorovném směru. Nad touto parabolou platí $y' < 0$ a všechny trajektorie míří směrem dolů, pod touto parabolou naopak platí $y' > 0$ a všechny trajektorie míří nahoru.

x-nulkliny mají rovnici $0 = x(x - 3y + 1)$ a jedná se tedy o osu y (přímka $x = 0$) a přímku $y = \dfrac{1}{3}(x + 1)$. Obě přímky můžeme vyznačit do obrázku a vyznačit na ně šipky charakterizující směr směrového pole: šipky budou svislé (jedná se o x-nulklinu) a jak již bylo řečeno, budou mířit nahoru v bodech pod parabolou $y = \dfrac{1}{3}(x^2 - 1)$ a dolů v ostatních bodech.

Zbývá rozhodnout o tom, jak bude vypadat směrové pole na y-nulklinách. Výraz $x(x - 3y + 1)$ je kladný, tj. $x' > 0$, pokud současně platí buď obě nebo žádná z nerovností $x > 0$ a $y < \dfrac{1}{3}(x + 1)$. Směrové pole tedy míří doprava v bodech, které jsou buď napravo od osy y a pod přímkou $y = \dfrac{1}{3}(x + 1)$ nebo v bodech, které leží nad touto přímkou a současně nalevo osy y. V ostatních bodech směrové pole míří doleva.

Na Obrázku 1 vlevo jsou nulkliny, stacionární body a směrové pole na těchto nulklinách. Vpravo jsou nulkliny a počítačem vygenerované trajektorie. Všimněte si, že u ohniska s větší absolutní hodnotou reálné části konvergují trajektorie ke stacionárnímu bodu mnohem rychleji[2]. Podrobnější rozbor tohoto fenoménu je možno najít v odborné literatuře, například [**4**].

Úloha 3.2. U následujících autonomních systémů určete všechny stacionární body a pomocí vlastních čísel Jacobiho matice určete typ každého stacionárního bodu.

1. $\begin{cases} x' = x^3 y - y \\ y' = x - y \end{cases}$

2. $\begin{cases} x' = x + u + 1 \\ y' = x + y^3 - 1 \end{cases}$

[2]Tato konvergence je dokonce tak rychlá, že bez podrobnějšího rozboru by mohlo dojít k záměně ohniska za uzel.

3. $\begin{cases} x' = y - x^2 + 2 \\ y' = xy - y^2 \end{cases}$

4. $\begin{cases} x' = x^2 - xy \\ y' = x^2y^2 - y \end{cases}$

5. $\begin{cases} x' = x^2 + 2x + y - 4 \\ y' = x^3 - y^3 \end{cases}$

6. $\begin{cases} x' = x - 2y - 3 \\ y' = x + y^2 - 6 \end{cases}$

7. $\begin{cases} x' = x(5 - 2x - y) \\ y' = y(4 - x - 2y) \end{cases}$

8. $\begin{cases} x' = x(4 - 2x - y) \\ y' = y(7 - x - 3y) \end{cases}$

9. $\begin{cases} x' = x(x - y) \\ y' = x^2 + 2y - 3 \end{cases}$

10. $\begin{cases} x' = xy - 2x^2 \\ y' = 5 - x^2 - y^2 \end{cases}$

11. $\begin{cases} x' = y - x^2 \\ y' = 2xy - y^2 \end{cases}$

12. $\begin{cases} x' = x^2 - y^2 - 3 \\ y' = x - 2y \end{cases}$

13. $\begin{cases} x' = -x + 2y \\ y' = -x + y + y^2 \end{cases}$

14. $\begin{cases} x' = x(x - 3y + 1) \\ y' = x^2 - 3y - 1 \end{cases}$

15. $\begin{cases} x' = x^2 + x - y \\ y' = 2x - 2 \end{cases}$

16. $\begin{cases} x' = x + y - 2 \\ y' = x + y^2 - 2 \end{cases}$

17. $\begin{cases} x' = x^2 - y^2 \\ y' = 1 - x \end{cases}$

18. $\begin{cases} x' = y^2 - x^2 \\ y' = 1 - y \end{cases}$

19. $\begin{cases} x' = 2x(1 - x - 2y) \\ y' = y(2 - y - 3x) \end{cases}$

4. Model konkurence dvou druhů

Předpokládejme, že v jisté izolované oblasti jsou přítomny dva živočišné druhy, které si vzájemně konkurují. Předpokládejme dále, že konkurence ovlivní rychlost růstu daného druhu tak, že zpomalení rychlosti růstu je přímo úměrné četnosti, s níž se jedinci jednoho druhu setkávají s jedinci druhého druhu. Nepředpokládáme přitom nic bližšího o typu této konkurence, tj. zda jedinci jednoho druhu fyzicky brání jedincům druhého druhu v přístupu k potravě, či zda je konkurence založena jenom na tom, že „ujídají ze společného krajíce“. Náš model bude zahrnovat oba typy konkurence, změna se projeví pouze ve velikosti konstanty úměrnosti, která vyjadřuje zpomalení vývoje populací vlivem konkurence.
Je-li velikost první populace vyjádřena veličinou x a velikost druhé populace veličinou y, je možno systém popsat soustavou diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned} x' &= (a - bx)x - cxy, \\ y' &= (\alpha - \beta y)y - \gamma xy, \end{aligned} \tag{4.1}$$

kde všechno kromě x, y jsou kladné reálné parametry.
Prozkoumejme strukturu tohoto systému. První členy na pravých stranách soustavy (4.1) odpovídají logistickému růstu populace[3], pokud se tato populace nachází v prostředí osamocena. Druhé členy obsahují velikosti obou populací a odpovídají zpomalení růstu vlivem mezidruhové konkurence.
Frekvence setkávání jedinců populace x s jedinci populace y je úměrná součinu velikostí těchto populací xy a zpomalení růstu populace x vlivem těchto setkání je úměrné tomuto součinu. Konstanta úměrnosti c reprezentuje sílu konkurence, tj. jaký vliv má vzájemná konkurence na růst populace x. Vliv populace x na růst populace y je dán podobně parametrem γ, který obecně může být různý od c.

[3] viz strana 9

Prozkoumejme ještě možná jednodruhová podspolečenstva. Pro $y = 0$ je přítomna pouze populace x. První rovnice v (4.1) pak představuje logistickou rovnici pro vývoj populace x. Nosná kapacita prostředí je $\frac{a}{b}$.
Podobně, je-li $x = 0$, představuje druhá rovnice v (4.1) logistickou rovnici pro růst populace y s nosnou kapacitou prostředí $\frac{\alpha}{\beta}$.
Pro nalezení nulklin přepíšeme soustavu (4.1) do tvaru

$$\begin{aligned} x' &= (a - bx - cy)x, \\ y' &= (\alpha - \beta y - \gamma x)y \end{aligned} \tag{4.2}$$

a označíme specifické míry růstu populací $m(x, y) = a - bx - cy$ pro populaci x a $\mu(x, y) = \alpha - \beta y - \gamma x$ pro y. Jacobiho matice systému (4.2) je

$$J(x, y) = \begin{pmatrix} a - 2bx - cy & -cx \\ -\gamma y & \alpha - 2\beta y - \gamma x \end{pmatrix}. \tag{4.3}$$

Z (4.2) plyne, že systém má dvě x-nulkliny

$$n_{1x}: \quad x = 0, \tag{4.4}$$

$$n_{2x}: \quad a - bx - cy = 0, \tag{4.5}$$

a dvě y-nulkliny

$$n_{1y}: \quad y = 0, \tag{4.6}$$

$$n_{2y}: \quad \alpha - \beta y - \gamma x = 0. \tag{4.7}$$

V průsečících x-nulklin s y-nulklinami nalezneme stacionární body systému.
Nulklina n_{2x} je přímka procházející body $\left[0, \frac{a}{c}\right]$ a $\left[\frac{a}{b}, 0\right]$. Nulklina n_{2y} je přímka procházející body $\left[\frac{\alpha}{\gamma}, 0\right]$ a $\left[0, \frac{\alpha}{\beta}\right]$. Podle vzájemné polohy těchto bodů na osách x a y jsou možné čtyři kvalitativně odlišné případy znázorněné na obrázcích 2 až 5.
Průsečíkem nulklin n_{1x} a n_{1y} je stacionární bod $S_1 = [0, 0]$. Tento bod odpovídá stavu, kdy v prostředí není přítomna žádná z populací x, y. Pronikne-li do takového prostředí malé množství jedinců populace x, začnou se množit rychlostí $m(0, 0) = a$. Invazní parametr[4] je tedy kladný a populace se uchytí. Podobně invazní parametr populace y je $\mu(0, 0) = \alpha > 0$ a i populace y se v prostředí uchytí a začne množit. Jacobiho matice v bodě S_1 je

$$J(0, 0) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

a její vlastní čísla jsou a a α. Protože jsou obě vlastní čísla kladná, jedná se o nestabilní uzel.
Průsečíkem nulklin n_{1x} a n_{2y} je stacionární bod $S_2 = \left[0, \frac{\alpha}{\beta}\right]$. Tento stav odpovídá tomu, že populace x se v prostředí nevyskytuje a velikost populace y je ustálena na hodnotě nosné kapacity prostředí. Jakákoliv náhodná změna populace y vede k tomu, že se systém vrátí opět do tohoto stacionárního bodu, jak víme ze studia logistické rovnice. Prozkoumejme, jak se systém chová při malých náhodných změnách populace x. Invazní parametr této populace do stavu S_2 je $m\left(0, \frac{\alpha}{\beta}\right) = a - c\frac{\alpha}{\beta} = c\left(\frac{a}{c} - \frac{\alpha}{\beta}\right)$. Tento výraz je kladný, pokud

$$\frac{a}{c} > \frac{\alpha}{\beta}, \tag{4.8}$$

tj. pokud parametr c, charakterizující sílu mezidruhové konkurence, je dostatečně malý. V tomto případě se populace x uchytí a začne množit. Platí-li v (4.8) opačná nerovnost, bude invazní

[4] viz strana 8

parametr populace x záporný, populace bude vymírat a systém bude dospívat zpět do stacionárního stavu S_2. Jacobiho matice v bodě S_2 je

$$J\left(0, \frac{\alpha}{\beta}\right) = \begin{pmatrix} a - c\frac{\alpha}{\beta} & 0 \\ -\gamma\frac{\alpha}{\beta} & -\alpha \end{pmatrix}$$

a protože vlastní hodnoty jsou $-\alpha$ a $a - c\dfrac{\alpha}{\beta}$, je v bodě S_2 sedlo, jestliže platí (4.8) a stabilní uzel jinak.
Průsečíkem nulklin n_{2x} a n_{1y} je stacionární bod $S_3 = \left[\dfrac{a}{b}, 0\right]$. Situace je analogická jako u stacionárního bodu S_2, pouze jsou vyměněny role populací x a y. Systém tedy v nepřítomnosti populace y dospěje do stavu, kdy populace x se ustálí na hodnotě nosné kapacity prostředí, invazní parametr populace y do tohoto stavu je $\mu(\frac{a}{b}, 0) = \gamma\left(\dfrac{\alpha}{\gamma} - \dfrac{a}{b}\right)$ a je kladný pokud

$$\frac{\alpha}{\gamma} > \frac{a}{b} \tag{4.9}$$

a záporný jinak. Bod S_3 je sedlo, pokud platí (4.9) a stabilní uzel jinak.
Průsečík nulklin n_{2x} a n_{2y} získáme řešením soustavy rovnic

$$\begin{aligned} a - bx - cy &= 0, \\ \alpha - \beta y - \gamma x &= 0. \end{aligned} \tag{4.10}$$

Toto lze provést numericky, přímým řešením, nebo graficky. Zajímáme se přitom pouze o řešení, které se nachází v prvním kvadrantu, tj. jehož obě složky jsou nezáporné. Z náčrtů je patrné, že přímky odpovídající těmto nulklinám se protnou v prvním kvadrantu právě tehdy, když buď platí obě z nerovností (4.8), (4.9), nebo ani jedna. Označme průsečík nulklin $S_4 = (x^*, y^*)$. I když hodnoty x^*, y^* je možno explicitně vypočítat, uvidíme, že jejich znalost nebude pro vyšetřování typu stacionárního bodu důležitá. Jacobiho matice v bodě S_4 je

$$J(x^*, y^*) = \begin{pmatrix} a - 2bx^* - cy^* & -cx^* \\ -\gamma y^* & \alpha - 2\beta y^* - \gamma x^* \end{pmatrix}.$$

Vzhledem k tomu, že (x^*, y^*) jsou řešením (4.10), platí

$$\begin{aligned} a - bx^* - cy^* &= 0, \\ \alpha - \beta y^* - \gamma x^* &= 0 \end{aligned}$$

a proto

$$J(x^*, y^*) = \begin{pmatrix} -bx^* & -cx^* \\ -\gamma y^* & -\beta y^* \end{pmatrix}.$$

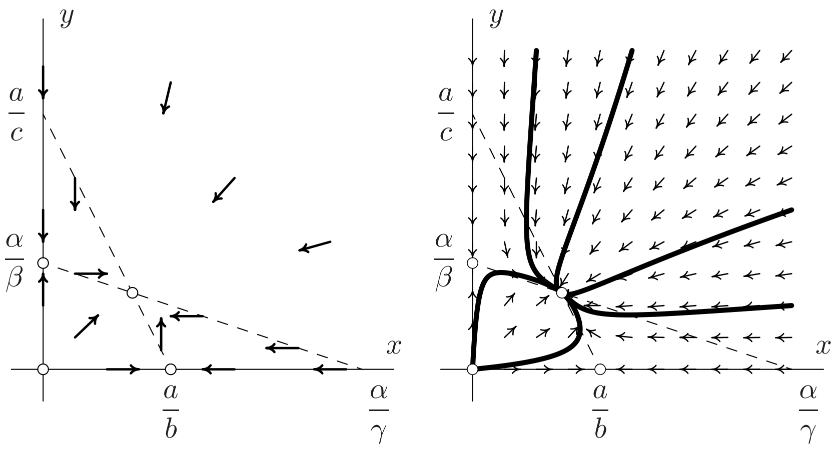
Stopa Jacobiho matice je vždy záporná. Determinant Jacobiho matice je

$$\det J(x^*, y^*) = b\beta x^* y^* - c\gamma x^* y^* = x^* y^* (b\beta - c\gamma).$$

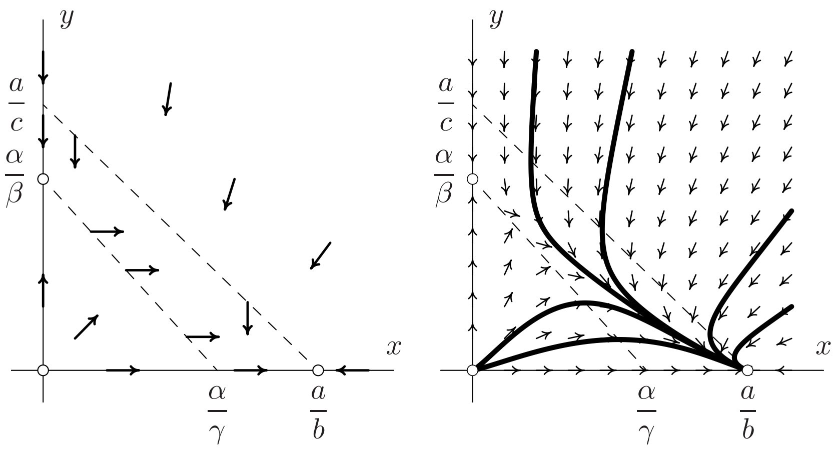
Pokud platí (4.8) a (4.9), pak

$$b\beta > \frac{a\gamma}{\alpha}\frac{\alpha c}{a} = c\gamma,$$

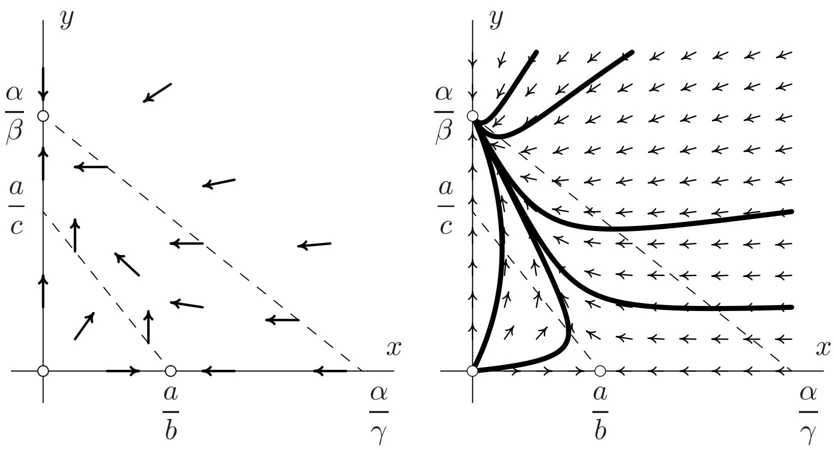
determinant Jacobiho matice je kladný a bod S_4 je ohnisko nebo uzel. Vzhledem k tvaru směrového pole se nemůže jednat o ohnisko a bod je tedy stabilní uzel. Pokud neplatí ani jedna z nerovností (4.8), (4.9), je determinant Jacobiho matice naopak záporný a v bodě S_4 je sedlo.
Situace v jednotlivých případech je znázorněna na obrázcích. Jsou možné čtyři případy.



OBRÁZEK 2. Slabá konkurence.

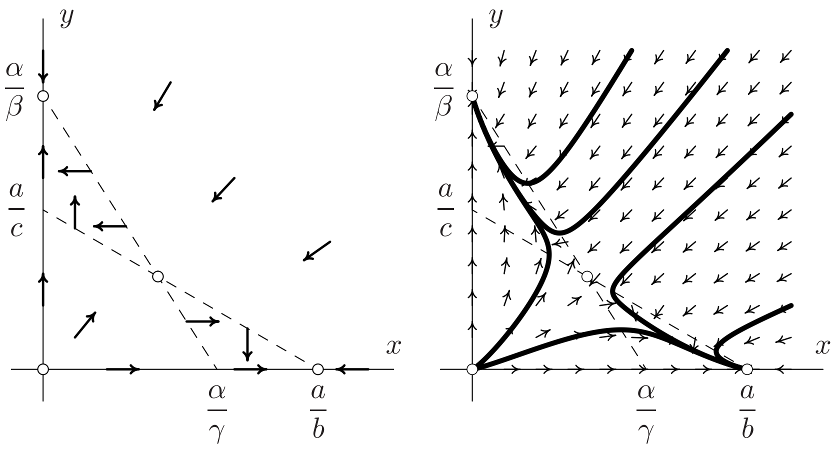


OBRÁZEK 3. Dominance druhu x.



OBRÁZEK 4. Dominance druhu y.

- Platí-li obě z nerovností (4.8), (4.9), leží uvnitř prvního kvadrantu stacionární bod, který je stabilním uzlem. Všechny trajektorie ležící v prvním kvadrantu konvergují do tohoto bodu pro $t \to \infty$. Systém tedy vždy dospěje do stavu, kdy přežívají obě populace. Podmínky (4.8) a (4.9) jsou splněny, pokud jsou parametry c, γ, které charakterizují



OBRÁZEK 5. Silná konkurence.

mezidruhovou konkurenci, dostatečně malé. Proto tento stav budeme nazývat *slabou konkurencí*.

- Platí-li (4.8) a neplatí-li (4.9), nemá systém uvnitř prvního kvadrantu stacionární bod a všechny trajektorie ležící uvnitř tohoto kvadrantu konvergují pro $t \to \infty$ do stacionárního bodu $[\frac{a}{b}, 0]$. V systému tedy dojde vlivem mezidruhové konkurence k vyloučení druhu y a populace druhu x se ustálí na hodnotě odpovídající jeho nosné kapacitě prostředí. Tento stav budeme nazývat *dominancí druhu* x.
- Platí-li (4.9) a neplatí-li (4.8), je situace podobná jako v předchozím bodě, pouze dochází ke konkurenčnímu vyloučení druhu x a jedná se tedy o *dominanci druhu* y.
- Neplatí-li ani jedna z nerovností (4.8), (4.9), má systém uvnitř prvního kvadrantu stacionární bod, který je sedlem a tedy pouze konečný počet trajektorií konverguje k tomuto bodu. Tento bod však nebude odpovídat reálnému stavu, ve kterém se může populace trvale nacházet, protože není odolný vůči náhodným perturbacím. Trajektorie, konvergující do tohoto sedlového bodu, rozdělí první kvadrant na dvě množiny, které tvoří oblasti atraktivity jednotlivých stabilních stacionárních bodů. Všechny trajektorie tedy směřují pro $t \to \infty$ buď do stacionárního bodu $\left[\frac{a}{b}, 0\right]$, nebo $\left[0, \frac{\alpha}{\beta}\right]$. V systému tedy vždy dojde ke konkurenčnímu vyloučení jednoho z druhů. Který z druhů bude vyloučen, záleží na počátečních podmínkách. Pokud jsou počáteční podmínky nastaveny tak, že trajektorie začíná v oblasti atraktivity stacionárního bodu $\left[\frac{a}{b}, 0\right]$, dojde k eliminaci druhu y, pokud je tomu naopak, dojde k eliminaci druhu x. Nesplnění nerovností (4.8), (4.9) odpovídá tomu, že parametry mezidruhové konkurence jsou dostatečně velké, proto tento stav budeme nazývat *silnou konkurencí*.

Všechny typy konkurence (dominance jednoho druhu, slabá konkurence, silná konkurence) jsou v přírodě pozorovány. V ekologii zpravidla největší pozornost upoutává slabá konkurence, kdy dochází ke stabilní koexistenci. Tento jev nastává, pokud, řečeno v biologických termínech, jedinec daného druhu svou existencí konkuruje jedincům svého druhu více, než jedincům druhu jiného. V praxi to znamená, že druhy musí mít poněkud odlišné ekologické nároky[5]. Například společně hnízdící druhy ptáků si konkurují v boji o hnízdiště. Tyto druhy mohou koexistovat, pokud mají například rozdílné složení potravy. V tomto případě jedinec konkuruje svému druhu i v boji o prostor k hnízdění i v boji o potravu, jedincům druhého druhu však konkuruje méně – pouze v boji o hnízdiště. Všimněme si ještě, že pokud vedle sebe koexistují dvě populace, součet velikostí je

[5]Gauseho princip

větší než velikost rovnovážných stavů kterékoliv osamocené populace. Dvě konkurující si populace tedy využívají zdroje efektivněji než populace jediná.
Lze ukázat, že ke konkurenčnímu vyloučení slabšího druhu nemusí dojít, pokud druhy žijí v komplikovanějších podmínkách, než jaké jsme dosud uvažovali: například v přítomnosti třetího konkurenta, v přítomnosti predátora, v periodicky se měnícím životním prostředí, či pokud na sebe druhy reagují se zpožděním, ve fragmentovaném prostředí, kdy silnější druh neobsadí všechny fragmenty a zůstane tak volný prostor pro slabší druh. Závislost principu konkurenčního vyloučení na věkové struktuře populací je dosud předmětem výzkumu.

5. Modely dravec – kořist

Předpokládejme, že v určité ohraničené lokalitě jsou přítomny dva živočišné druhy, z nichž jeden (kořist) slouží jako potrava druhého druhu (dravce). Předpokládejme, že společenstvo dravce nemá kromě kořisti žádné další zdroje potravy a bez kořisti tedy nemůže v dané lokalitě dlouhodobě existovat. Nebudeme pro jednoduchost uvažovat prostorové rozložení kořisti ani dravce v dané lokalitě a budeme předpokládat, že jednotliví dravci loví kořist samostatně (ani si nekonkurují, ani nespolupracují např. ve smečkách) a že jedinci kořisti unikají dravci také samostatně (nejedná se například o skupinovou obranu stáda). Tyto modely jsou v čínské literatuře vzhledem k předpokladům výstižně nazývány *panda – bambus*. Budeme dále předpokládat, že životní cykly dravce a kořisti jsou srovnatelně dlouhé a že tedy populace dravce reaguje na velikost populace kořisti a naopak. Přesněji: při dostatku potravy se dravec může rozmnožit, tím však začne více hubit kořist a způsobí, že množství jeho potravy se bude snižovat. To způsobí, že populace dravce bude trpět hlady a začne vymírat. Snížení populace dravce umožní opětovný nárůst velikosti populace kořisti. Po nárůstu populace kořisti je umožněn další vzrůst populace dravce.
Základním modelem uvažovaného společenství bude soustava diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned} x' &= \mu(x)x - V(x)y, \\ y' &= m(x)y, \end{aligned} \tag{5.1}$$

kde x je velikost populace kořisti, y je velikost populace dravce a funkce μ, V, m jsou spojité diferencovatelné funkce. Význam jednotlivých funkcí rozebereme v následujících odstavcích.
V nepřítomnosti dravce, tj. pro $y = 0$, platí $V(x)y = 0$ a populace kořisti se tedy vyvíjí podle rovnice

$$x' = \mu(x)x,$$

což je klasická rovnice pro vývoj jednodruhové populace se specifickou mírou růstu $\mu(x)$. Budeme předpokládat, že populace kořisti může kolonizovat prostředí, že u kořisti se projevuje vnitrodruhová konkurence, a že prostředí má omezenou nosnou kapacitu. Matematicky formulováno, o funkci $\mu(x)$ budeme předpokládat, že $\mu(0) = 0$ a že $\mu(x)$ je klesající a záporná pro dostatečně velká x.
Člen $V(x)y$ charakterizuje vliv dravce na rychlost růstu populace kořisti. Funkce $V(x)$ se nazývá *trofická funkce dravce* a charakterizuje, o kolik zpomalí růst populace kořisti přítomnost jednoho dravce (případně jednotkového množství dravce). Součin $V(x)y$ charakterizuje, jak je zpomalen růst dravce při nezávislé přítomnosti y dravců. Přirozené předpoklady na funkci V jsou takové, že není-li přítomna kořist, dravec nic neuloví, má-li dravec více kořisti, neuloví ji méně a že jeden dravec nemůže zkonzumovat neomezené množství potravy, ale loví a konzumuje kořist pouze do určité míry, která odpovídá hladině jeho nasycení. Matematicky formulováno, musí platit $V(0) = 0$ a funkce V je neklesající a shora ohraničená.
Funkce $m(x)$ udává specifickou míru růstu populace dravce. Tato veličina nezávisí na y, protože podle předpokladů dravci loví nezávisle na sobě. Přirozené předpoklady na vývoj populace dravce jsou, že bez přítomnosti kořisti populace dravce vyhyne a čím více mají dravci potravy, tím lépe jejich populace přežívá. Matematické požadavky na funkci m jsou tedy $m(0) < 0$, $m(x)$ je

neklesající a kladná pro dostatečně velká x. Zpravidla klademe $m(x) = kV(x) - \alpha$, kde α je úmrtnost dravce a člen $kV(x)$ vyjadřuje, že profit populace dravce je přímo úměrný ulovenému množství kořisti.

Podle předpokladů na funkci $\mu(x)$ existuje x^* s vlastností $\mu(x^*) = 0$. Tento bod odpovídá stacionárnímu stavu kořisti v prostředí bez přítomnosti populace dravce – nosné kapacitě prostředí. Vzhledem k tomu, že populace kořisti nemůže trvale převyšovat nosnou kapacitu prostředí, pro vzájemné přežívání obou populací ze zdá být rozumný předpoklad, že tento stav populace kořisti je schopen zajistit přežití populace dravce, tj. že $m(x^*) > 0$.

Nejběžnějším konkrétním tvarem funkce $\mu(x)$ je klesající přímka

$$\mu(x) = a\left(1 - \frac{x}{K}\right),$$

což znamená, že bez přítomnosti populace dravce se populace kořisti vyvíjí podle logistické rovnice s invazním parametrem a a nosnou kapacitou prostředí K.

Nejčastější uvažované typy trofických funkcí jsou následující.

(i) Trofická funkce Lotkova–Volterrova typu předpokládá, že množství ulovené a zkonzumované kořisti je přímo úměrné množství této kořisti, tj.

$$V_1(x) = ax, \qquad a \in \mathbb{R}^+.$$

Tato trofická funkce sice nesplňuje podmínku ohraničenosti pro velká x, nicméně uvádíme ji zde pro její jednoduchost a historické postavení (viz str. 87).

(ii) Dalším typem trofické funkce je funkce, která pro malá x je totožná s funkcí Lotkova–Volterrova typu a konstantní pro velká x, tj.

$$V_2(x) = \begin{cases} ax & x \in \left(0, \dfrac{S}{a}\right), \\ S & x \geq \dfrac{S}{a}, \end{cases}$$

kde S, a jsou reálné konstanty. Konstanta S odpovídá hladině nasycení dravce, jeden dravec nezkonzumuje více než S kořisti. Tento typ trofické funkce je typický například pro organismy, které loví kořist filtrováním vody (někteří měkkýši) a pro býložravce. V populační ekologii se tento typ funkce nazývá Holling-I.

(iii) Hladkou aproximací trofické funkce předchozího typu jsou například funkce

$$V_3(x) = S\frac{x}{x+p}, \qquad V_{3a}(x) = S\left(1 - e^{-ax}\right).$$

Číslo $p > 0$ je tzv. Michaelisova–Menterové konstanta a souvisí s rychlostí růstu trofické funkce. Přesněji: Je-li větší p, je růst trofické funkce pomalejší, neboť $V_3'(0) = \dfrac{S}{p}$). Tento typ trofické funkce se nazývá Holling-II. Podobný průběh má i funkce

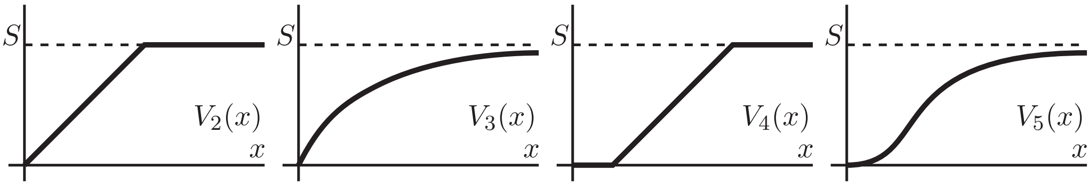
$$V_{3b}(x) = S\left(1 - e^{-axy^{1-b}}\right).$$

U této funkce je navíc parametr b, který charakterizuje vztahy mezi dravci. Případ $b \in (0,1)$ modeluje situaci, kdy si dravci pomáhají v ničení kořisti, případ $b > 1$ situaci, kdy si dravci konkurují.

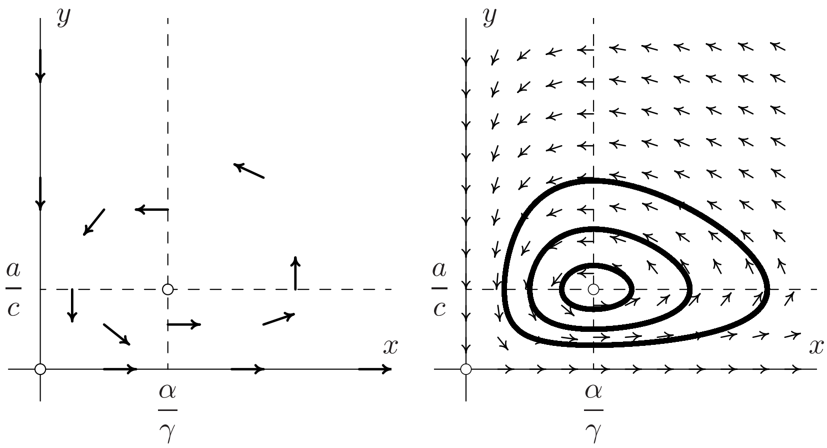
(iv) Má-li kořist možnost úkrytu před dravcem, nebo pokud dravci ignorují malé množství kořisti (to je možné pouze v případě, že mají ještě další alternativní zdroje potravy, což jsme zatím neuvažovali), lze trofickou funkci uvažovat po částech lineární, kdy je funkce nejprve nulová, poté lineární rostoucí a po dosažení hladiny nasycení dravců lineární konstantní. Tato funkce je zachycena na obrázku jako funkce $V_4(x)$.

(v) Hladkou aproximací předchozího typu funkce jsou například esovité funkce

$$V_5(x) = S\frac{x^2}{p+x^2}, \qquad V_{5a}(x) = S\left(1 - e^{-ax^2}\right)$$



OBRÁZEK 6. Trofické funkce.



OBRÁZEK 7. Lotkův–Voterův model dravec-kořist

Tento typ trofické funkce se nazývá Holling-III. Exponenciální funkci $V_{5a}(x)$ je možno opět modifikovat parametrem b, vyjadřujícím kooperaci nebo konkurenci dravců, podobně jako jsme to viděli u funkce $V_{3a}(x)$.

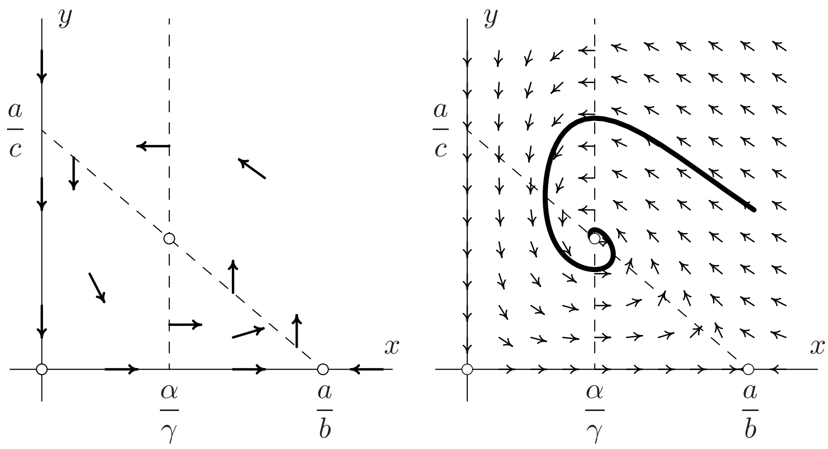
5.1. Lotkův–Volterrův model dravec–kořist

Jednoduchý model predace jako vzájemného působení dvou živočišných druhů sestavil italský matematik V. Volterra v roce 1926 při snaze vysvětlit kolísání populací ryb v Jaderském moři. Podobný systém diferenciálních rovnic studoval již dříve matematik A. Lotka, proto je tento model nazýván Lotkovým–Volterrovým modelem. Označíme-li x velikost populace kořisti a y velikost populace dravce, model interakce podle Volterry má tvar

$$\begin{aligned} x' &= ax - cxy, \\ y' &= -\alpha y + \gamma xy, \end{aligned} \tag{5.2}$$

kde a, α, c, γ jsou kladné reálné parametry. V tomto modelu je tedy obsažen předpoklad konstantní specifické míry růstu populace kořisti[6] a lineární trofické funkce.
x-nulklinami jsou přímky $x = 0$ a $y = \dfrac{a}{c}$, y-nulklinami jsou přímky $y = 0$ a $x = \dfrac{\alpha}{\gamma}$. Stacionárními body systému jsou $S_1 = [0, 0]$ a $S_2 = \left[\dfrac{\alpha}{\gamma}, \dfrac{a}{c}\right]$. Bod S_1 je sedlo, jak plyne z tvaru směrového pole. Bod S_2 je bod rotace, lze dokonce ukázat, že se jedná o střed, protože každá trajektorie systému v prvním kvadrantu je uzavřená. Každá trajektorie je cyklem, který se ve fázové rovině otáčí proti směru hodinových ručiček. Maximu kořisti tedy vždy následuje maximum dravce, které zredukuje množství kořisti k minimální hodnotě. Díky tomuto minimálnímu množství kořisti populace dravce vymírá, což umožní populaci kořisti její opětovné rozmnožení, které uzavře celý cyklus.

[6] Předpokládáme tedy poněkud nerealisticky exponenciální růst populace kořisti v prostředí bez predátorů.



OBRÁZEK 8. Modifikovaný Lotkův–Voterův model dravec-kořist

Velikou nevýhodou tohoto modelu je fakt, že jakékoliv náhodné změny v systému přesunou vývoj populace na jinou trajektorii, přičemž tato změna je trvalá. Náhodné fluktuace tedy v prostředí nezaniknou, ale zůstanou zachovány. Díky tomu je model poněkud nerealistický. Přesto se však pomocí tohoto modelu podařilo vysvětlit mnoho jevů, které byly skutečně pozorovány v přírodě. Známé jsou například dlouhodobé a podrobné záznamy Společnosti Hudsonova zálivu, týkající se pravidelného kolísání množství vykoupených kožešin zajíců a rysů v letech 1845–1935.

5.2. Modifikovaný Lotkův–Volterrův model

Kromě pravidelných cyklů ve velikosti populace dravce a kořisti byly pozorovány i společenstva, která naopak vykazují stabilní stavy populací – například populace býložravých veverek v Arktidě. Lze ukázat, že modifikace klasického Lotkova–Volterrova modelu spočívající v tom, že kořist budeme modelovat logistickou rovnicí s nosnou kapacitou prostředí, odstraňuje nestabilitu a nezachovává náhodné perturbace. Uvažujme model

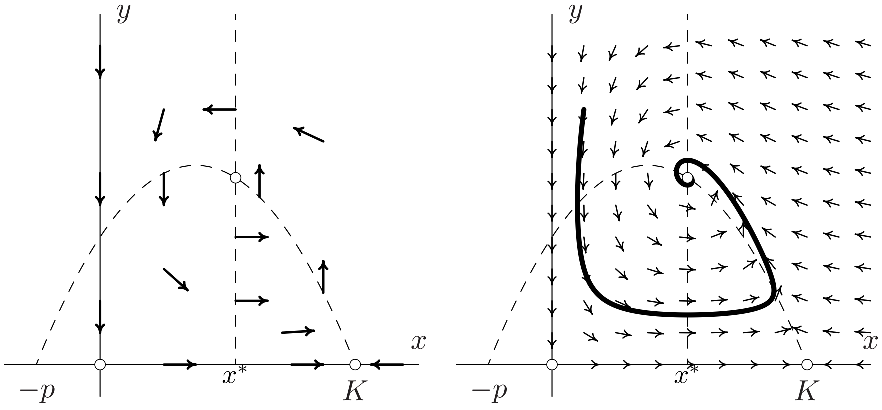
$$\begin{aligned} x' &= (a - bx)x - cxy, \\ y' &= -\alpha y + \gamma xy, \end{aligned} \tag{5.3}$$

kde všechny parametry jsou kladná reálná čísla.
V nepřítomnosti dravce (tj. pokud je $y = 0$) se populace kořisti vyvíjí podle logistické rovnice a její velikost nemůže trvale přesáhnout nosnou kapacitu prostředí $K = \dfrac{a}{b}$. Předpokládejme, že tato velikost populace může zajistit přežití populace dravce, tj. $\gamma\dfrac{a}{b} - \alpha > 0$.
V průsečíku nulklin $a-bx-cy = 0$ a $\gamma x-\alpha = 0$ je stacionární bod, který je buď stabilním ohniskem nebo stabilním uzlem (zkuste dokázat sami). Trajektorie se opět otáčí proti smyslu hodinových ručiček, tj. opět maximu kořisti následuje maximum dravce, minimum kořisti a minimum dravce, což je zcela přirozený výsledek.

5.3. Model dravec–kořist Gauseho typu

V Lotkově–Volterrově modelu jsou dravci velmi hladoví a zejména velmi žraví – trofická funkce není ohraničená. Pokusme se prozkoumat podrobněji model dravec–kořist s poněkud realističtější trofickou funkcí. Použijeme trofickou funkci Holling-II a předpoklad logistického růstu populace kořisti. Přesněji, uvažujme soustavu diferenciálních rovnic

$$x' = a\left(1 - \frac{x}{K}\right)x - \frac{c}{p + x}xy,$$



OBRÁZEK 9. Gauseho model dravec-kořist

$$y' = -\alpha y + \frac{\gamma}{p+x}xy,$$

kde x je velikost populace kořisti, y velikost populace dravce, $a, K, c, p, \gamma, \alpha$ jsou kladné konstanty.
x-nulklinami jsou přímka a parabola

$$n_{1x}: \quad x = 0,$$
$$n_{2x}: \quad a\left(1 - \frac{x}{K}\right) - \frac{cy}{p+x} = 0,$$

y-nulklinami jsou přímky

$$n_{1y}: \quad y = 0,$$
$$n_{2y}: \quad \frac{\gamma x}{p+x} = \alpha.$$

V průsečíku nulklin n_{1x} a n_{1y} je stacionární bod $S_1 = [0, 0]$. V tomto stavu má populace kořisti kladný a populace dravce záporný invazní parametr.
V průsečíku nulklin n_{2x} a n_{1y} je stacionární bod $S_2 = [K, 0]$. V tomto stavu je tedy populace kořisti ve stabilním stavu odpovídajícím hodnotě nosné kapacity prostředí. V dalším budeme předpokládat, že tato velikost populace kořisti uživí populaci dravce, tj. budeme předpokládat, že populace dravce má v tomto stavu kladný invazní parametr. Matematicky vyjádřeno, platí

$$\frac{\gamma K}{p+K} > \alpha.$$

Průsečík nulklin n_{2x} a n_2y označme $[x^*, y^*]$. Jedná se o body, ležící v průsečíku paraboly

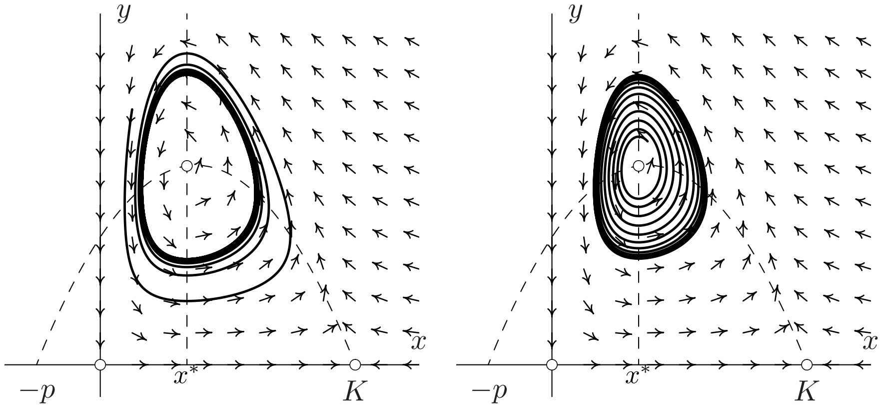
$$y = \frac{a}{c}(p+x)\left(1 - \frac{x}{K}\right)$$

a svislé přímky

$$\gamma x = \alpha(p+x), \quad \text{tj.} \quad x = \frac{\alpha p}{\gamma - \alpha}.$$

Nulkliny n_{1x} a n_{2y} jsou svislé přímky, které se neprotnou.
Jakobiho matice systému je matice

$$J(x,y) = \begin{pmatrix} -\frac{ax}{K} + a\left(1 - \frac{x}{K}\right) + \frac{cxy}{(p+x)^2} - \frac{cy}{p+x} & -\frac{cx}{p+x} \\ -\frac{\gamma}{(p+x)^2}xy + \frac{\gamma}{p+x}y & -\alpha + \frac{\gamma x}{p+x} \end{pmatrix}$$



OBRÁZEK 10. Limitní cyklus v Gauseho modelu (vlevo trajektorie, která se na cyklus namotává z vnějšku a vpravo z vnitřku)

Protože matice

$$J(0,0) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -\alpha \end{pmatrix}$$

a

$$J(K,0) = \begin{pmatrix} -a & -\dfrac{cK}{p+K} \\ 0 & -\alpha + \dfrac{\gamma K}{p+K} \end{pmatrix}$$

mají obě záporný determinant, je v bodech S_1, S_2 sedlo. V bodě S_3 platí

$$J(x^*,y^*) = \begin{pmatrix} -\dfrac{ax^*}{K} + \dfrac{cx^*y^*}{(p+x^*)^2} & -\dfrac{cx^*}{p+x^*} \\ \dfrac{p\gamma y^*}{(p+x^*)^2} & 0 \end{pmatrix}$$

a protože

$$\det J(x^*,y^*) = \frac{cp\gamma x^* y^*}{(p+x^*)^3} > 0,$$

není v bodě S_3 sedlo. Protože platí $\dfrac{cy^*}{p+x^*} = a\left(1 - \dfrac{x^*}{K}\right)$, je stopa Jakobiho matice v bodě S_3

$$\begin{aligned} \operatorname{Tr} J(x^*,y^*) &= x^*\left(-\frac{a}{K} + \frac{a\left(1-\frac{x^*}{K}\right)}{p+x^*}\right) \\ &= \frac{ax^*}{K(p+x^*)}(-(p+x^*) + (K-x^*)) \\ &= \frac{ax^*}{K(p+x^*)}(K-p-2x^*) \end{aligned}$$

a bod S_3 je tedy stabilní, pokud $x^* > \dfrac{K-p}{2}$ (viz Obrázek 9) a nestabilní, pokud $x^* < \dfrac{K-p}{2}$ (viz Obrázek 10). Pokud je tento bod nestabilní, znamená to, že v systému není žádný stabilní stacionární bod. Protože však z tvaru směrového pole plyne, že všechny trajektorie jsou ohraničené, musí v systému existovat alespoň jeden cyklus, ke kterému všechny trajektorie konvergují. Lze dále ukázat, že takový cyklus je jediný.

Systém se tedy bude nacházet ve stavu, kdy jsou velikosti obou populací buď konstantní, nebo se periodicky opakují, přičemž oba tyto stavy jsou stabilní vůči náhodným fluktuacím.

Dodatky

A. Výsledky úloh

Výsledky úloh ke Kapitole 1

Úloha 2.1. 1) $y^2(2xe^{-x}-2C)=1, C\in\mathbb{R}; y\equiv 0; y_p=\dfrac{1}{\sqrt{2xe^{-x}+1}}$. **2)** $y^2+2y+\ln(y-1)^2 = -\dfrac{2}{x}+C, C\in\mathbb{R}; y\equiv 1$. **3)** $y^2=\ln(1+e^x)+C, C\in\mathbb{R}$. **4)** $\sin y=-\left(\dfrac{x^3}{3}+x\right)+C$, $C\in\mathbb{R}$. **5)** $\arcsin y=\operatorname{tg}x+x+C, C\in\mathbb{R}; y\equiv\pm 1$. **6)** $\arcsin x+\arcsin y=C, C\in\mathbb{R}$. **7)** $y=\sqrt{x-\dfrac{1}{x}+C}, c\in\mathbb{R}$. **8)** $y=\operatorname{tg}\left(\dfrac{x^3}{3}+C\right), C\in\mathbb{R}$. **9)** $y=\dfrac{C}{1+e^x}, C\in\mathbb{R}$. **10)** $y = Cx^2e^{\frac{1}{x}}, C\in\mathbb{R}$. **11)** $y=C(x+1)+1, C\in\mathbb{R}\setminus\{0\}; y_p=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{3}{2}$. **12)** $x^2(y^2-1)=Ce^{-x^2}$, $C\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$. **13)** $y^2=1+C\dfrac{x+1}{x-1}, C\in\mathbb{R}$. **14)** $y=Ce^{-\frac{1}{x^2}}\ C\in\mathbb{R}$. **15)** $2ye^y-2e^y = e^{-x^2}+C, C\in\mathbb{R}$. **16)** $y=Ce^{x-\frac{x^2}{2}}, C\in\mathbb{R}; y_p=e^{x-x^2/2-1/2}$. **17)** $y=-\ln(1-Ce^x)$, $C\in\mathbb{R}$. **18)** $y=e^{C/x}, C\in\mathbb{R}$. **19)** $x^2(1+y^2)=C, C\in\mathbb{R}$. **20)** $1=(1-y)(C+\ln|\sin x|)$, $C\in\mathbb{R}; y\equiv 1$. **21)** $y^2+2y+\ln(y-1)^2=x^2-2x+\ln(x+1)^2+C, C\in\mathbb{R}; y\equiv 1$. **22)** $\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+y^2}=C, C\in\mathbb{R}$. **23)** $y=1-Ce^{1/x}, C\in\mathbb{R}$. **24)** $y=1-C\sqrt{1-x^2}$, $C\in\mathbb{R}$. **25)** $Cx(1-y^2)=1, C\in\mathbb{R}; y\equiv\pm 1$. **26)** $x^2(y^2-1)=Ce^{-x^2}, C\in\mathbb{R}; y\equiv\pm 1$. **27)** $y=(Cx^2-1)^2, C\in\mathbb{R}^+; y\equiv 0$. **28)** $\operatorname{arctg}x=\operatorname{arctg}y+C, C\in\mathbb{R}$. **29)** $y=\dfrac{1}{3}\Big(\dfrac{C}{\cos^3 x} - 1\Big), C\in\mathbb{R}$. **30)** $\sin y=C\cos x, C\in\mathbb{R}$. **31)** $\cos y=\dfrac{C}{\sin x}, C\in\mathbb{R}; y_p=\arccos\dfrac{\sqrt{2}}{2\sin x}$. **32)** $y=(x\ln x-x+C)^2, C\in\mathbb{R}; y_p=(x\ln x-x+1)^2$. **33)** $y=-\dfrac{3}{3x+x^3-C}, C\in\mathbb{R}; y_p = -\dfrac{3}{3x+x^3-3}$. **34)** Návod: přepište nejprve rovnici do tvaru $y'=ye^x$, řešením je $y=Ce^{e^x}$, $C\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

Úloha 3.1. V následujících vzorcích platí $C\in\mathbb{R}$, není-li výslovně uvedeno jinak. **1)** $\sin\dfrac{y}{x}=Cx$. **2)** $y=-\dfrac{x}{\ln|x|+C}, y\equiv 0$. **3)** $(y+x)^2=Cx^3, (y_p+x)^2=x^3$, tj. $y_p=x^{3/2}-x$. **4)** $y=xe^{Cx}$. **5)** Návod: upravte rovnici na tvar $y'=\dfrac{y}{x}\ln\dfrac{y}{x}$, $y=xe^{Cx+1}$. **6)** $y=-x\ln(C-\ln|x|)$. **7)** $y = x\arcsin(\ln|x|+C)$. **8)** $e^{y/x}=C(x+y), C\in\mathbb{R}\setminus\{0\}; y=-x. y_p=-x$. **9)** $ye^{-\frac{x}{y}}=C$,

$C \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $y \equiv 0$. **10)** $y^2 + 2xy - x^2 = C$. **11)** $\operatorname{arctg}(y/x) = \dfrac{1}{2}\ln(x^2 + y^2) + C$. **12)** $y^2 = x^2 \ln x^2 + Cx^2$.

Úloha 4.3. V následujících vzorcích platí $C \in \mathbb{R}$. **1)** $y = \left(\dfrac{x^2}{2} + x + C\right)(x+1)^2$. **2)** $y = \dfrac{1}{\sqrt{2x+1}}(C + x + 3\sqrt{2x+1})$. **3)** $y = C\cos x + \sin x$. **4)** $y = 2(-1 + \sin x) + Ce^{-\sin x}$. **5)** $y = \dfrac{1}{2}\Big(\dfrac{\sin^2 x}{\cos x} - \cos x + \dfrac{C}{\cos x}\Big)$. **6)** $y = x^2 + Cx^2 e^{\frac{1}{x}}$. **7)** $y = x - 1 + Ce^{-x}$, $y_p = x - 1 + 4e^{-x}$. **8)** $y = \dfrac{x^2}{3} + \dfrac{C}{x}$, $y_p = \dfrac{x^2}{3} - \dfrac{7}{3x^2}$. **9)** $y = \dfrac{1}{2x^2}\Big(C - e^{-x^2}\Big)$. **10)** $y = \dfrac{1}{\cos x}\Big(C - \dfrac{\cos 2x}{2}\Big)$. **11)** $y = e^x(C + \dfrac{x^2}{2} + \ln|x|)$. **12)** $y = -\dfrac{\cos x}{2} + \dfrac{C}{\cos x}$, $y_p = -\dfrac{\cos x}{2} + \dfrac{1}{2\cos x}$. **13)** $y = \dfrac{1}{2\sqrt{1-x^2}}[C + \arcsin^2 x]$.

Úloha 4.4. $\dfrac{1}{y-1}\,\mathrm{d}y = -a(x)\,\mathrm{d}x$

Úloha 5.3. V následujících vzorcích platí $C \in \mathbb{R}$. **1)** $y = \dfrac{C}{x^2+1}$. **2)** $x^3y^2 + 7x = C$. **3)** $e^{xy} + x^2 + y = C$. **4)** $x^2\cos^2 y - \cos y = C$. **5)** $\dfrac{x^3}{3} - xy^2 + 5y = C$. **6)** $\dfrac{x^2}{2} + x\ln y - \cos y = C$. **7)** $x\sin y + y\cos y = C$. **8)** $x^4 - x^2y^2 + y^4 = C$. **9)** $x + \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} = C$ nebo ekvivalentně $\operatorname{arctg}\dfrac{x}{y} - x = C$. **10)** $\sqrt{x^2 - y^2} - y = C$. **11)** $xy - \sqrt{1 + y^2} = C$. **12)** $x + \dfrac{1}{3}(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}} - \dfrac{y^2}{2} = C$. **13)** $\ln x \ln(\ln y) + \dfrac{x^2y^3}{3} = C$.

Úloha 6.1. Metody se liší jenom způsobem určení směrnice pro další krok. Stačí proto v algoritmu odpovídajícím způsobem nahradit řádek

```
k:=rovnice(x,y); # smer Eulerovy metody
```

V případě metody Runge Kutta druhého řádu tento řádek nahradíme například řádky

```
kE:=rovnice(x,y); # smer Eulerovy metody
k:=rovnice(x+krok/2,y+kE*krok/2); # smer metody RK
```

a v případě metody Runge Kutta čtvrtého řádu řádky

```
kE:=rovnice(x,y); # smer Eulerovy metody
kR:=rovnice(x+krok/2,y+kE*krok/2); # smer metody RK
ka:=rovnice(x+krok/2,y+kR*krok/2); # pomocny smer alpha
kb:=rovnice(x+krok,y+ka*krok); # pomocny smer beta
k:=(kE+2*kR+2*ka+kb)/6; # smer metody RK4
```

Úloha 7.1. Čas t začneme měřit od 12:00 hodin. Protože se růst bakterií řídí podle zadání diferenciální rovnicí $y' = ky$, platí $y = y_0 e^{kt}$, kde y_0 je velikost populace v čase $t = 0$, tj. ve 12:00. Podle zadání platí $3y_0 = y_0 e^{2k}$. Odsud je možno určit $k = \ln\sqrt{3}$. Zajímá nás čas t, pro který bude platit $100\,y_0 = y_0 e^{t\ln\sqrt{3}}$. Odsud $t \approx 8.3836 \approx 8\,\text{hod}\ 23\,\text{min}$. Velikost populace bude 100-násobná ve 20:23 hodin.

Úloha 7.2. Návod: platí (viz str. 19) $y(t) = 10\,000 \cdot \dfrac{Ce^{10\,000\cdot\alpha t}}{1+Ce^{10\,000\cdot\alpha t}}$. Z počáteční podmínky $y(0) = 1\,000$ určíme hodnotu konstanty C a poté z podmínky $y(1) = 2\,000$ určíme hodnotu konstanty α. Výsledek: $y(t) = 10\,000 \cdot \dfrac{e^{bt}}{9+e^{bt}}$, kde $b = \ln\dfrac{9}{4}$.

Úloha 7.3. Derivace $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$, která vyjadřuje změnu množství nečistot v jezeře za jeden den, se skládá za dvou částí. Jednak je tato změna způsobena přírůstkem c kg vlivem dodávaného znečištění a jednak úbytkem vzniklým odtokem z jezera. Tento úbytek je, stejně jako v Příkladu 1.2 na straně 8, roven $\dfrac{r}{V}y$, kde r, V jsou pro dané jezero konstanty. Zavedeme-li pro zjednodušení novou konstantu $k = \dfrac{r}{V}$, je změna množství nečistot v jezeře popsána rovnicí

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = c - ky,$$

kde c a k jsou konstanty. Jedná se o lineární rovnici, jejíž řešení je $y(t) = \dfrac{c}{k} + Ce^{-kt}$, kde C je integrační konstanta, která souvisí s počáteční podmínkou. Rovnovážnou hodnotu, na které se hladina znečištění ustálí, nalezneme buď jako limitu $\lim\limits_{t\to\infty} y(t)$, nebo z podmínky $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 0$. V obou případech vychází $y(\infty) = \dfrac{c}{k}$. Všimněme si, že tato rovnovážná poloha nezávisí na počáteční podmínce, ale pouze na parametrech charakterizujících jezero a rychlost znečišťování.

Úloha 7.4. Podle modelu v Příkladu 1.2 se změna množství nečistot v jezeře v každém okamžiku řídí rovnicí

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -ky,$$

kde $k = \dfrac{r}{V}$ je pro dané jezero konstanta. Řešením této rovnice, které splňuje počáteční podmínku $y(0) = y_0$, je funkce $y = y_0e^{-kt}$. Po čase T je tedy v jezeře y_0e^{-kT} kg nečistot. Po uplynutí času T se vždy množství nečistot v jezeře sníží e^{kT}-krát. Bezprostředně po vypuštění druhé dávky znečištění obsahuje jezero

$$(y_0e^{-kT} + y_0)\ \text{kg}$$

nečistot a po uplynutí doby $2T$ (tj. po uplynutí doby T od druhé kontaminace) obsahuje jezero

$$(y_0e^{-kT} + y_0)e^{-kT}\ \text{kg},\quad \text{neboli}\quad y_0e^{-2kT} + y_0e^{-kT}\ \text{kg}$$

nečistot. Po uplynutí nT hodin bude jezero obsahovat

$$y_0e^{-nkT} + \cdots + y_0e^{-2kT} + y_0e^{-kT}\ \text{kg}$$

nečistot. Jedná se o geometrickou řadu, pro $n \to \infty$ je součet této geometrické řady roven $y_0\dfrac{e^{-kT}}{1-e^{-kT}}$. K této hodnotě se bude množství nečistot blížit vždy v okamžiku těsně před novou kontaminací, tj. v okamžiku, kdy je jezero nejčistější.

Úloha 7.5. $y(t) = y_0e^{k\sin t}$, $y_{\min} = y_0e^{-k}$, $y_{\max} = y_0e^{k}$.

Úloha 7.7. Diferenciální rovnice křivky je

$$y' = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}.$$

Integrací obdržíme

$$y = -\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2}\ln\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{1-\sqrt{1-x^2}} + C = -\sqrt{1-x^2} + \ln\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x} + C.$$

Z počáteční podmínky $y(1) = 0$ plyne $C = 0$.

Výsledky úloh ke Kapitole 2

Úloha 3.1. V následujících vzorcích platí $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$. **1)** $y = C_1e^x + C_2e^{-2x} - \frac{1}{2}e^{-x}$. **2)** $y = C_1 + C_2e^{-2x} + \frac{1}{3}e^x$. **3)** $y = \left(\frac{1}{2}x^2 - x + 1\right)e^{-2x} + C_1e^{-2x} + C_2e^{-3x}$. **4)** $y = -\frac{1}{4} - \frac{2}{3}e^x + C_1e^{2x} + C_2e^{-2x}$. **5)** $y = C_1e^x + C_2e^{-x} + \frac{1}{2}xe^x - \frac{1}{4}e^x - 1 = c_1e^x + c_2e^{-x} + \frac{1}{2}xe^x - 1$. **6)** $y = \left(C_1 + C_2x + \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{3x^2}{4}\right)e^{-x}$. **7)** $y = \left(C_1 + C_2x + \frac{1}{2x}\right)e^x$. **8)** $y = \left(C_1 + C_2x - x + x\ln|x|\right)e^x$. **9)** $y = \left(C_1 + C_2x + x\arcsin x + \sqrt{1-x^2}\right)e^x$. **10)** $y = C_1\sin x + C_2\cos x - x\cos x + \sin x\ln\sin x$. **11)** $y = C_1\cos x + C_2\sin x + \frac{\cos^2 x}{\sin x} - \frac{1}{2\sin x}$. **12)** $y = C_1\sin x + C_2\cos x - \frac{1}{2}x\cos x + \frac{1}{2}\sin x$. **13)** $y = C_1\sin x + C_2\cos x - (\cos x)\ln|\sin x| - \cos x - x\sin x$. **14)** $y = C_1\cos x + C_2\sin x + 3$. **15)** $y = C_1\cos(2x) + C_2\sin(2x) + \frac{1}{4}x$. **16)** $y = C_1e^{x/2} + C_2e^{-x} + e^x$. Návod: nejprve přepište rovnici do tvaru $y'' + \frac{1}{2}y' - \frac{1}{2}y = e^x$. **17)** $y = C_1e^{2x} + C_2e^x - (x+1)e^x$. **18)** $y = C_1e^x + C_2e^{2x} + \frac{5}{3}e^{-x}$. **19)** $y = C_1e^x + C_2e^{2x} + \frac{1}{10}\sin x + \frac{3}{10}\cos x$. **20)** $y = C_1e^{-x} + C_2e^{-2x} + (e^{-x} + e^{-2x})\ln(e^x + 1)$.

Úloha 3.2. V následujících vzorcích platí $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$. **1)** $y = C_1e^{-x} + C_2xe^{-x} + x^2 - 3x + 2$. **2)** $y = C_1\cos\left(\sqrt{2}x\right) + C_2\sin\left(\sqrt{2}x\right) + \frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}$. **3)** $y = C_1e^x + C_2e^{-3x} - \frac{1}{5}\sin x - \frac{1}{10}\cos x$. **4)** $y = C_1e^x + C_2e^{-3x} + \frac{3}{4}e^x$. **5)** $y = C_1e^{-\sqrt{2}x} + C_2e^{\sqrt{2}x} - \frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{2}x$. **6)** $y = C_1e^{-x} + C_2xe^{-x} + \frac{1}{2}\sin x + \cos x$. **7)** $y = (3-x)e^x + C_1e^{(3+\sqrt{5})x/2} + C_2e^{(3-\sqrt{5})x/2}$. **8)** $y = x^2 - 2x - 1 + C_1e^{-x/2}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + C_2e^{-x/2}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$.

Úloha 4.1. V následujících vzorcích mohou všechny konstanty nabývat libovolných reálných hodnot. **1)** $y = C_1x^3 + C_2x^2 + C_3x + C_4$. **2)** $y = \frac{1}{2}x^4 + C_1x^2 + C_2x + C_3$. **3)** $y = x\ln x - x + c_1x + c_2 = x\ln x + C_1x + C_2$. **4)** $y = -\frac{1}{15}(1-x)^5 + C_1x^2 + C_2x + C_3$. **5)** $y = -e^{-x} + C_1x^2 + C_2x + C_3$. **6)** $y = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{3}{4}x^2 + c_1\frac{x^2}{2} + c_2x + c_3 = \frac{x^2}{2}\ln x + C_1x^2 + C_2x + C_3$. **7)** $y = x\sin x + 4\cos x + C_1x^3 + C_2x^2 + C_3x + C_4$.

Výsledky úloh ke Kapitole 3

Úloha 3.2. 1) stab. ohnisko v bodě $[0, 0]$, sedlo v bodě $[1, 1]$. **2)** nestab. uzel v bodě $[0, 1]$, nestab. uzel v bodě $[2, -1]$, sedlo v bodě $[1, 0]$. **3)** nestab. ohnisko v bodě $[-1, -1]$, sedlo v bodě $\left[\sqrt{2}, 0\right]$, sedlo v bodě $\left[-\sqrt{2}, 0\right]$, stab. uzel v bodě $[2, 2]$. **4)** nestab. ohnisko v bodě $[1, 1]$ nelze rozhodnout (Jacobiho matice má nulový determinant) v bodě $[0, 0]$. **5)** sedlo v bodě $[1, 1]$, stab. uzel v bodě $[-4, -4]$. **6)** nestab. ohnisko v bodě $[5, 1]$, sedlo v bodě $[-3, -3]$. **7)** nestab. uzel v bodě $[0, 0]$, stab. uzel v bodě $[2, 1]$, sedlo v bodě $[0, 2]$, sedlo v bodě $\left[\frac{5}{2}, 0\right]$. **8)** nestab. uzel v bodě $[0, 0]$, stab. uzel v bodě $[1, 2]$, sedlo v bodě $\left[0, \frac{7}{3}\right]$, sedlo v bodě $[2, 0]$. **9)** stab. ohnisko v bodě $[-3, -3]$, nestab. ohnisko v bodě $[1, 1]$, sedlo v bodě $\left[0, \frac{3}{2}\right]$. **10)** nestab. ohnisko v bodě $[-1, -2]$, sedlo v bodě $\left[0, -\sqrt{5}\right]$, sedlo v bodě $\left[\sqrt{5}, 0\right]$, stab. ohnisko v bodě $[1, 2]$. **11)** nelze rozhodnout (Jacobiho matice má nulový determinant) v bodě $[0, 0]$, stab. uzel v bodě $[2, 4]$. **12)** stab. uzel v bodě $[-2, -1]$, sedlo v bodě $[2, 1]$. **13)** ohnisko nebo bod rotace v bodě $[0, 0]$, sedlo v bodě $[2, 1]$. **14)** stab. ohnisko v bodě $[-1, 0]$, sedlo v bodě $\left[0, -\frac{1}{3}\right]$, stab. ohnisko v bodě $[2, 1]$. **15)** nestab. uzel v bodě $[1, 2]$. **16)** nestab. uzel v bodě $[1, 1]$, sedlo v bodě $[2, 0]$. **17)** sedlo v bodě $[1, 1]$, nestab. ohnisko v bodě $[1, -1]$. **18)** stab. uzel v bodě $[1, 1]$, sedlo v bodě $[-1, 1]$. **19)** nestab. uzel v bodě $[0, 0]$, stab. uzel v bodě $[0, 2]$, stab. uzel v bodě $[1, 0]$, sedlo v bodě $\left[\frac{3}{5}, \frac{1}{5}\right]$.

B. Řešení diferenciálních rovnic na počítači

V současnosti existuje mnoho matematických programů umožňujících řešit diferenciální rovnice symbolicky (hledání obecného řešení, přičemž v rovnici se mohou vyskytovat i parametry a obecné konstanty) i numericky (hledání aproximace řešení, přičemž v rovnici musí mít všechny konstanty přiřazenu konkrétní hodnotu a musí být zadána počáteční nebo okrajová podmínka).
Nejčastěji jsou používány takzvané systémy počítačové algebry, anglicky Computer Algebra Systems (CAS). Existují komerční i volně šiřitelné programy této skupiny a všechny jsou schopny jak řešit běžné diferenciální rovnice, tak počítat určité i neurčité integrály. Například v systému Maxima se výpočet integrálu $\int x^3 \sin(x)\,\mathrm{d}x$ redukuje na použití příkazu

```
integrate(x^3*sin(x),x);
```

a nalezení obecného řešení rovnice $y' = \sin(x)y^2$ na použití příkazu

```
ode2('diff(y,x)=sin(x)*y^2, y, x);
```

Komerční programy (Maple, Mathematica) jsou zpravidla výkonnější než programy volně šiřitelné, rozdíl výkonu se však projeví až při řešení úloh, které mnohonásobně převyšují nároky kladené na čtenáře tohoto textu. Volně šiřitelné programy jsou stále dostatečně výkonné a je často možno je spouštět přes webové rozhraní bez nutnosti instalace na lokální počítač. Do této kategorie patří programy SAGE (`http://sagemath.org/`, online notebook na `http://sagenb.org/`, základní česká dokumentace na `http://www.math.muni.cz/~plch/diplomky/Sage.pdf`) a Maxima (`http://maxima.sourceforge.net/`, online notebook na `http://www.my-tool.com/mathematics/maximaphp/`, základní slovenská dokumentace na `http://people.tuke.sk/jan.busa/kega/maxima.html`).

Dále je možno k řešení diferenciálních rovnic využít webové služby Wolfram Alpha (`http://wolframalpha.com`, zprostředkovává některé vybrané výpočty programu Mathematica) a MAW (`http://www.mendelu.cz/user/marik/maw`, řeší diferenciální rovnice i s postupem, který by použil při řešení student, u LDR druhého řádu umožňuje volbu metody mezi variací konstant a metodou neurčitých koeficientů) – viz Poznámka 2.4 na straně 17.

C. Metody výpočtu nejčastějších integrálů

Mnoho integrálů je možno „vypočítat" pomocí systémů počítačové algebry (viz předchozí odstavec). Dále je možno využít vyhledávač Wolfram Alpha (`http://www.wolframalpha.com`). Do tohoto vyhledávače stačí zapsat klíčové slovo `integral` následované funkcí a stisknout tlačítko Odeslat. Objeví se primitivní funkce a po kliknutí na odkaz „Show steps" se objeví i vhodná metoda výpočtu tohoto integrálu. Další podobná služba je přítomna na webu Mathematical Assistant on Web na adrese `http://user.mendelu.cz/marik/maw/index.php?form=integral`. Vždy je však vhodnější nevěřit slepě počítačům a jejich algoritmům,[7] ale umět vypočítat integrál vlastními silami.

1. Speciální typ složené funkce

$$\int f(ax+b)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\,F(ax+b), \tag{C.1}$$

kde a, b jsou libovolná reálná čísla, $a \neq 0$ a $F(\cdot)$ značí libovolnou z primitivních funkcí k funkci $f(\cdot)$.

2. Speciální typ zlomku

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x = \ln|f(x)| \tag{C.2}$$

3. Parciální zlomky

$$\int \frac{1}{x-a}\,\mathrm{d}x = \ln|x-a| \tag{C.3}$$

$$\int \frac{1}{(x-a)^n}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{1-n}(x-a)^{1-n}, \quad \text{pro } n>1 \tag{C.4}$$

$$\int \frac{1}{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\,\mathrm{arctg}\,\frac{x}{a} \tag{C.5}$$

$$\int \frac{1}{(x+m)^2+a^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\,\mathrm{arctg}\,\frac{x+m}{a} \tag{C.6}$$

Následující parciální zlomky rozepisujeme jako lineární kombinaci integrálů předchozích typů. Je-li ve jmenovateli kvadratický výraz, který neobsahuje lineární člen, postupujeme následovně:

$$\int \frac{Ax+B}{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x = \int \frac{A}{2}\,\frac{2x}{x^2+a^2} + B\frac{1}{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x, \tag{C.7}$$

[7] Algoritmy mohou skutečně selhat. Někdy dojde k tomu, že použitý program není schopen integrál vypočítat. Mnohem komplikovanější situace však nastává, pokud program vrací bez jakéhokoliv varování nesprávný výsledek. Opět je vhodné poznamenat, že taková situace zpravidla nastává (pokud vůbec) až při řešení problémů, které značně přesahují náročnost tohoto textu. Přesto však je nutno umět všechny výstupy matematických programů kriticky zhodnotit a není možno přesunout všechnu práci při řešení matematických úloh na bedra počítačových programů.

přitom první z těchto zlomků je zlomek typu (C.2) a druhý je typu (C.5). Je-li ve jmenovateli kvadratický trojčlen nemající reálné kořeny, postupujeme podle následujícího schematu:

$$\int \frac{Ax+B}{x^2+Mx+N}\,\mathrm{d}x = \int \alpha\frac{2x+M}{x^2+Mx+N} + \beta\frac{1}{x^2+Mx+N}\,\mathrm{d}x, \tag{C.8}$$

kde první zlomek je opět typu (C.2) a druhý doplněním na čtverec[8] převedeme na typ (C.6). Čísla α a β jsou vhodná reálná čísla (určená jednoznačně), která jsme v konkrétním případě schopni nalézt.

4. Racionální funkce.

Racionální funkcí rozumíme funkci, která je podílem dvou polynomů[9]. Při integraci těchto funkcí nastává právě jeden z následujících případů:

(i) Je-li stupeň polynomu v čitateli menší než stupeň polynomu ve jmenovateli, jedná se buď přímo o některý z parciálních zlomků, nebo lze funkci rozložit na součet parciálních zlomků, které integrujeme samostatně podle předchozího bodu.

(ii) Je-li stupeň polynomu v čitateli stejný nebo vyšší než stupeň polynomu ve jmenovateli, vydělíme čitatel jmenovatelem pomocí algoritmu pro dělení polynomů se zbytkem. Tímto úlohu převedeme na výpočet integrálu z polynomu a z racionální funkce předchozího typu — bude se jednat o parciální zlomek nebo o funkci, kterou lze na součet parciálních zlomků rozložit.

(iii) Je-li ve jmenovateli pouze výraz x^k, $k \in \mathbb{N}$, stačí vydělit samostatně každý člen čitatele tímto jmenovatelem a jednotlivé výrazy v takto získaném součtu integrovat každý zvlášť.

5. Integrály převoditelné substitucí na integrál z racionální funkce.

Nechť $R(x)$ je racionální funkce, resp. nechť $R(x,y)$ je racionální funkce dvou proměnných. Následující integrály lze pomocí substituce převést na integrál z racionální lomené funkce a řešit pomocí příslušného z předchozích bodů.

(i) $\boxed{\int R\Big(\cos(x)\Big)\sin(x)\,\mathrm{d}x}$ — substituce $\cos(x)=t$, $\sin(x)\,\mathrm{d}x = -\,\mathrm{d}t$.

(ii) $\boxed{\int R\Big(\sin(x)\Big)\cos(x)\,\mathrm{d}x}$ — substituce $\sin(x)=t$, $\cos(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t$.

(iii) $\boxed{\int R(x,\sqrt{ax+b})\,\mathrm{d}x}$ — substituce $t=\sqrt{ax+b}$, tj. $ax+b=t^2$, $a\,\mathrm{d}x = 2t\,\mathrm{d}t$.

(iv) $\boxed{\int R(x,\sqrt[k]{ax+b})\,\mathrm{d}x}$ — substituce $t=\sqrt[k]{ax+b}$, tj. $ax+b=t^k$, $a\,\mathrm{d}x = kt^{k-1}\,\mathrm{d}t$.

(v) $\boxed{\int R(e^x)\,\mathrm{d}x}$ — substituce $e^x=t$, tj. $x=\ln(t)$, $\mathrm{d}x = \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$

6. Integrály řešitelné metodou per–partés.

Nechť $P_n(x)$ je polynom stupně n. Následující integrály řešíme metodou per partés.

---

[8] Doplněním kvadratického výrazu x^2+Mx+N na čtverec rozumíme převedení tohoto výrazu do tvaru $(x+a)^2 + b$, kde a a b jsou vhodná reálná čísla.

[9] Pro jednoduchost budeme předpokládat, že polynom ve jmenovateli nemá násobné komplexní kořeny.

(i) Integrály $\boxed{\int P_n(x)\sin(ax+b)\,\mathrm{d}x}$, $\boxed{\int P_n(x)\cos(ax+b)\,\mathrm{d}x}$, $\boxed{\int P_n(x)e^{ax+b}\,\mathrm{d}x}$ počítáme metodou per–partés tak, že polynom $P_n(x)$ derivujeme a funkci, která s tímto polynomem stojí v součinu, integrujeme. Tímto postupem převedeme integrál buď na integrál z funkce sinus, kosinus nebo exponenciální funkce (v případě, že polynom $P_n(x)$ je lineární), nebo na integrál, který obsahuje polynom stupně o jedničku menšího. V druhém z těchto případů integraci per partés opakujeme (je potřeba celkem n-násobné opakování tohoto postupu).

(ii) Integrály $\boxed{\int P_n(x)\ln(x)\,\mathrm{d}x}$, $\boxed{\int P_n(x)\operatorname{arctg}(x)\,\mathrm{d}x}$ integrujeme metodou per-partés tak, že polynom $P_n(x)$ integrujeme a funkci, která s tímto polynomem stojí v součinu, derivujeme. Tímto integrál přejde v integrál z racionální funkce (ve jmenovateli bude buď x, nebo (x^2+1) – poté provedeme dělení polynomů se zbytkem a integrujeme zvlášť získaný polynom a parciální zlomek). Podobně řešíme integrál $\boxed{\int P_n(x)\ln^m(x)\,\mathrm{d}x}$. V tomto případě opět musíme postup opakovat, a to celkem m-krát.

7. Integrál řešitelný Ostrogradského metodou

Integrál $\boxed{\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,\mathrm{d}x}$, kde $P_n(x)$ je polynom stupně n, řešíme Ostrogradského metodou neurčitých koeficientů — primitivní funkci hledáme ve tvaru

$$Q_{n-1}(x)\sqrt{ax^2+bx+c}+k\int \frac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,\mathrm{d}x,$$

kde $Q_{n-1}(x)$ je vhodný polynom stupně $(n-1)$ a k je vhodné reálné číslo. Koeficienty polynomu Q a číslo k jsou určeny jednoznačně a jsme schopni je vypočítat. Tímto problém zjednodušíme, protože integrál, který zůstává, je buď přímo vzorec (je-li $a=\pm 1$ a $b=0$) nebo integrujeme doplněním výrazu pod odmocninou na čtverec, užitím pravidla (C.1) a příslušného vzorce.

Integrál typu $\boxed{\int \sqrt{ax^2+bx+c}\,\mathrm{d}x}$ lze upravit na tvar $\int \frac{ax^2+bx+c}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,\mathrm{d}x$ a počítat podle předchozího. Integrál $\boxed{\int P(x)\arcsin(x)\,\mathrm{d}x}$, kde $P(x)$ je polynom, počítáme metodou per–partés tak, že derivujeme funkci $\arcsin x$ a integrujeme polynom $P(x)$, čímž tento integrál přechází na integrál, který dále počítáme Ostrogradského metodou.

8. Integrály kvazipolynomů

Integrály typu $\boxed{\int P(x)e^{ax}\sin(bx)\,\mathrm{d}x}$, $\boxed{\int P(x)e^{ax}\cos(bx)\,\mathrm{d}x}$. Předpokládejme, že i exponenciální i goniometrická funkce se v integrálu skutečně vyskytují, tj. že $a\neq 0$ a $b\neq 0$ (jinak se jedná o integrál, který lze vypočítat podle bodu 6.). Tyto integrály lze vypočítat metodou per–partés. Protože použití této metody je v tomto případě poměrně komplikované, často používáme pro nalezení neurčitého integrálu metodu neurčitých koeficientů — hledáme řešení ve tvaru

$$p(x)e^{ax}\sin(bx)+q(x)e^{ax}\cos(bx),$$

kde $p(x)$ a $q(x)$ jsou polynomy stejného stupně, jako polynom $P(x)$. Tyto polynomy jsou určené jednoznačně a jsme schopni je nalézt porovnáním koeficientů u jednotlivých mocnin proměnné x.

D. Cramerovo pravidlo

Cramerovo pravidlo je jedním z prostředků, který v některých případech umožňuje velice efektivně nalézt řešení soustavy lineárních rovnic pomocí determinantů. Uveďme Cramerovo pravidlo pouze pro soustavy dvou nezávislých lineárních rovnic o dvou neznámých[10].

Věta D.1 (Cramerovo pravidlo). *Uvažujme soustavu lineárních rovnic*

$$\begin{aligned} ax + by &= c \\ Ax + By &= C \end{aligned}$$

s koeficienty a, b, A, B, s pravými stranami c, C a s neznámými x, y. Je-li determinant D matice soustavy nenulový, tj. je-li

$$D = \begin{vmatrix} a & b \\ A & B \end{vmatrix} \neq 0,$$

má soustava právě jedno řešení. Označíme-li

$$D_1 = \begin{vmatrix} c & b \\ C & B \end{vmatrix} \quad a \quad D_2 = \begin{vmatrix} a & c \\ A & C \end{vmatrix},$$

lze neznámé x a y najít jako podíly $x = \dfrac{D_1}{D}$ a $y = \dfrac{D_2}{D}$.

Při řešení nehomogenní LDR druhého řádu metodou variace konstant je jedním z úkolů nalézt řešení soustavy rovnic

$$\begin{cases} A'(x)y_1(x) + B'(x)y_2(x) = 0 \\ A'(x)y_1'(x) + B'(x)y_2'(x) = f(x), \end{cases} \tag{D.1}$$

kde $y_1(x)$ a $y_2(x)$ jsou známé funkce tvořící fundamentální systém řešení rovnice a $A'(x)$, $B'(x)$ jsou neznámé funkce. Determinant matice soustavy (*wronskián* – viz definice na straně 52) je nenulový, tj.

$$W[y_1, y_2](x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x) \neq 0.$$

Je tedy možné pro řešení soustavy (D.1) použít Cramerovo pravidlo a vypočteme-li pomocné determinanty

$$W_1 = \begin{vmatrix} 0 & y_2(x) \\ f(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} \quad \text{a} \quad W_2 = \begin{vmatrix} y_1(x) & 0 \\ y_1'(x) & f(x) \end{vmatrix},$$

lze neznámé funkce $A'(x)$, $B'(x)$ obdržet jako podíly

$$A'(x) = \frac{W_1}{W}, \qquad B'(x) = \frac{W_2}{W}. \tag{D.2}$$

Hledané funkce $A(x)$, $B(x)$ poté obdržíme integrací a pomocí nich a pomocí fundamentálního systému řešení sestavíme partikulární řešení rovnice metodou popsanou již dříve.
Využití Cramerových vzorců je velice efektivní v případě rovnic typu

$$y'' + y = f(x),$$

kdy fundamentální systém řešení je tvořen goniometrickými funkcemi $y_1 = \cos(x)$ a $y_2 = \sin(x)$. Řešení soustavy (D.1) sčítací nebo dosazovací metodou je v tomto případě poměrně zdlouhavé a málo přehledné. Používáme-li Cramerovo pravidlo, je wronskián roven 1 (případně -1, volíme-li fundamentální systém naopak, tj. $y_1 = \sin(x)$, $y_2 = \cos(x)$) a výpočet je poměrně snadný (viz řešený příklad v textu, str. 59).

[10] Obecnější formulaci Cramerova pravidla lze nalézt např. v [**1, 11**]

Rejstřík

Literatura

[1] Černá, B., *Matematika – Lineární algebra*, skriptum MZLU Brno, 1999, 129 stran.
[2] Greguš, M., Švec, M., Šeda, V., *Obyčajné diferenciálne rovnice*, SNTL Alfa, 1985, 374 stran.
[3] Kalas, J., Pospíšil, Z.: *Spojité modely v biologii*, skriptum MU Brno, 2001.
[4] Kalas, J., Ráb, M., *Obyčejné diferenciální rovnice*, skriptum MU Brno, 1995, 207 stran.
[5] Kuben, J., *Obyčejné diferenciální rovnice*, skriptum Voj. ak. Brno, 1995, 127 stran.
[6] Mařík, R., *Diferenciální a diferenční rovnice*, skriptum MZLU Brno, 2004, 79 stran.
[7] Navrátil, M., *Matematika, diferenciální a integrální počet funkcí dvou a více proměnných*, skriptum MZLU Brno, 2001, 123 stran.
[8] Plch, R., *Příklady z matematické analýzy – Diferenciální rovnice*, skriptum MU Brno, 1995, 29 stran.
[9] Ráb, M., *Metody řešení obyčejných diferenciálních rovnic*, skriptum MU Brno, 1998, 96 stran.
[10] Rainville, E. D., Bedient, P. F., *Elementary differential equations*, Macmillan Publ. Comp. (New York), 7-th edition, 1989, 546 stran.
[11] Rektorys, K. a kol., *Přehled užité matematiky*, vyšlo v mnoha vydáních, reference v textu se vztahují k vydání SNTL Praha, 1968, 1136 stran.
[12] Res, I., *Diferenciální rovnice*, skriptum MZLU Brno, 1998, 58 stran.
[13] Thomas, G. B., Finney, R. L., *Calculus and analytic geometry*, Addisson–Wesley publ., 7-th edition, 1990, 1136 stran.
[14] Vosmanská, G., *Matematika*, skriptum MZLU Brno, 1997, 120 stran.