Písemná část zkoušky z Matematiky, 7.2.2020, (90 minut)

1	2	3	4	5	6

Jméno: ....

1. [14 bodů] Derivace.

(a) Napište definici derivace funkce $f(x)$ jedné proměnné a definici parciální derivace podle x funkce dvou proměnných $f(x, y)$.

(b) Vypočtěte derivaci funkcí

$$y = \frac{x^2}{x+a}, \quad y = \frac{b}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}$$

kde $a, b > 0$ jsou parametry.

(c) Bazální metabolismus M (ve wattech) souvisí s hmotností W vztahem $M = AW^n$, kde n je pro mnoho živočišných druhů blízké číslu 0.75 a A je konstanta, která je specifická pro daný druh a v rámci daného druhu klesá s věkem. Určete derivaci $\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}W}$ a určete i fyzikální jednotku a interpretaci této derivace.

(d) Rychlost, s jako klesá objem vody v sudu s otevřenou výpustí ve dně je úměrná odmocnině z výšky hladiny. Zformulujte tento proces kvantitativně a napište rovnici pro výšku hladiny v sudu.

(e) Vysvětlete, proč je předchozí model stejný pro válcový sud i pro nádrž ve tvaru kvádru, ale jiný pro nádrž ve tvaru trychtýře nebo polokoule. V čem je rozdíl?

---

2. [6 bodů]

(a) Napište vzorec pro lineární aproximaci funkce.

(b) Odvoďte z předchozího iterační vzorec pro Newtonovu metodu.

---

3. [4 body] Napište, jak počítáme divergenci vektorového pole a co tato divergence vyjadřuje v praktických úlohách.

---

4. [8 bodů] Lineární algebra.

(a) Vyřešte následující soustavu rovnic.

$$\begin{aligned} x_1 + 3\,x_2 \phantom{{}+ x_3} &= 0 \\ x_1 + 2\,x_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \end{aligned}$$

(b) Zapište předchozí soustavu formálně pomocí maticového násobení.

(c) Vypočtěte matici A^2 pro následující matici.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},$$

---

5. [10 bodů] Integrál.

(a) Vypočtěte integrál $\int_0^1 3x + e^{2x}\,\mathrm{d}x$.

(b) Termohrnek bez atestu, vyrobený z rozemletého plastu ze staré elektroniky, uvolňuje do nápoje zdravotně závadné materiály. Například zpomalovače hoření, BFR. Předpokládejme, že tempo se kterým se BFR vylučuje do nápoje se snižuje s rostoucí kontaminací nápoje a s klesající teplotou nápoje, tj. klesá v čase. Vhodným modelem může být například

$$r(t) = (10 - 2t)\,\mu\,\mathrm{g/hod},$$

kde $r(t)$ je rychlost vylučování BFR do nápoje v čase t v mikrogramech za hodinu a t je čas v hodinách. Vypočtěte, jaké množství BFR se do nápoje uvolní za první hodinu a porovnejte s hodnotou, která se uvolní za druhou hodinu.

(c) Matti Lepparänta (A Review of Analytical Models of Sea-Ice Growth, Atmosphere–Ocean 1993) odvodil z rovnice vedení tepla a fyzikálních předpokladů o chování ledu, že tloušťka ledu na hladině moře roste ve stabilních podmínkách rychlostí nepřímo úměrnou této tloušťce. Zapište tento fakt pomocí vhodného matematického modelu a najděte řešení vzniklé diferenciální rovnice.

---

6. [8 bodů]

(a) Napište podmínku pro jednoznačnou řešitelnost počáteční úlohy pro diferenciální rovnici se separovanými proměnnými a ukažte, že není splněna pro rovnici

$$y' = \sqrt{y}$$

pokud $y = 0$.

(b) Nechť A je symetrická matice. Napište, jak můžeme najít matici P takovou, že $P^T AP$ je diagonální a k čemu je tato znalost užitečná.

(c) Jak je definována inverzní matice a jak vypadá inverzní matice k matici rotace

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}?$$

(d) Jak vypočtete pomocí matice rotace vektor, který vznikne otočením vektoru $(1, 1)$ o třicet stupňů v kladném směru?

- Pokud se ze zadaných údajů některá úloha nedá vyřešit pro nedostatek informací, napište, jaké údaje je nutno doplnit.
- Požadavek: alespoň 22 bodů z 50 možných.
- Pište co nejstručněji a nejvýstižněji.
- Po skončení písemky si zkontrolujte, je-li vám správně započítána bonifikace za účast na přednášce. Seznamy má dozor.

1) a) $\frac{df}{dx} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ $\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h,y) - f(x,y)}{h}$

b) $\frac{d}{dx}\left(\frac{x^2}{x+a}\right) = \frac{2x(x+a) - x^2 \cdot 1}{(x+a)^2}$, $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}\right) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}(-2x)e^{-x^2}$

c) $\frac{dM}{dW} = A \cdot n W^{n-1}$ $\left[\frac{dM}{dW}\right] = \frac{\text{watt}}{\text{kg}}$

$\frac{dM}{dW}$ je hodnota o kterou se zvýší bazální metabolismus pokud živočich zvýší svou hmotnost o jednotku

d) $V = S \cdot h$ $\Rightarrow$ $\frac{dV}{dt} = S \cdot \frac{dh}{dt}$

$\frac{dV}{dt} = k_1 \sqrt{h}$ $\rightarrow$ $\frac{dh}{dt} = k \cdot \sqrt{h}$

e) pro válec i kvádr je objem úměrný výšce vody, u kužele ani polokoule tomu tak není

---

2 a) $f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$

b) $0 = f(x_0) + f'(x_0)(x_1 - x_0)$

$-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = (x_1 - x_0)$

$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$

---

3) Pro $\vec{F} = (P, Q)$ je $\operatorname{div} \vec{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}$

vyjadřuje přírůstek toku v daném místě

4 a) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{array}\right)$

$x_1 + 3x_2 = 0$

$-x_2 + x_3 = 1$

$-x_3 = -2 \Rightarrow x_3 = 2 \Rightarrow x_2 = 1 \Rightarrow x_1 = -3$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$

$3\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 5 \end{pmatrix}$

$0\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$

---

5) a) $\int_0^1 3x + e^{2x}\, dx = \left[\frac{3x^2}{2} + \frac{1}{2}e^{2x}\right]_0^1 = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}e^2 - 0 + \frac{1}{2}e^0 =$

$= \frac{3}{2} + \frac{1}{2}e^2 + \frac{1}{2} = 2 + \frac{1}{2}e^2$

b) $\int_0^1 (10-2t)\, dt = \left[10t - t^2\right]_0^1 = 9 - 0 = 9$

$\int_1^2 (10-2t)\, dt = \left[10t - t^2\right]_1^2 = 20-4-(10-1) = 7$

Za druhou hodinu se vyrobí méně BFR

c) $\frac{dh}{dt} = \frac{k}{h} \Rightarrow h \cdot dh = k \cdot dt \Rightarrow \frac{1}{2}h^2 = k \cdot t + c$

$\int h\, dh = \int k\, dt$

6 a) $y' = f(x) \cdot g(y)$ $\quad y(x_0) = y_0$ má právě 1 řešení pokud

$g(y_0) \neq 0$.

u nás máme $g(0) = \sqrt{0} = 0$ a podmínka splněna

NENÍ!

b) P ... ve sloupcích má vlastní vektory matice A normované na jednotkovou délku

Slouží k transformaci matematického zápisu do tvaru s diagonálním tenzorem. V tomto případě je popis jednodušší!

c) $A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = I$

Rotace na opačnou stranu, tj. $\begin{pmatrix} \cos(-\theta) & -\sin(-\theta) \\ \sin(-\theta) & \cos(-\theta) \end{pmatrix}$

tj. $\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

d) Pomocí součinu

$$\begin{pmatrix} \cos 30^\circ & -\sin 30^\circ \\ \sin 30^\circ & \cos 30^\circ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \ldots$$