Písemná část zkoušky z Matematiky, 4.2.2020, (90 minut)

1	2	3	4	5	6

Jméno: ....

1. [14 bodů] Derivace.

(a) Napište definici derivace funkce $f(x)$ jedné proměnné a definici parciální derivace podle x funkce dvou proměnných $f(x, y)$.

(b) Vypočtěte derivaci funkcí

$$y = \frac{ax}{x+6}, \quad y = 1 - e^{bx^2}$$

kde $a, b > 0$ jsou parametry.

(c) Na rozdíl od jiných živočichů jsou malé ryby přibližně zmenšeniny velkých ryb a proto je u nich hmotnost přibližně úměrná třetí mocnině délky. Najděte souvislost mezi rychlostí s jakou roste hmotnost kapra a rychlostí, s jakou roste délka kapra.

(d) Otesánek se vykrmil do tvaru koule o průměru $2{,}4\,\mathrm{m}$ a dále baští. Jeho objem roste konstantní rychlostí $0{,}002\mathrm{m}^3/\mathrm{hod}$. Jak tato úloha souvisí s derivacemi a jak rychle roste průměr koule (Otesánka)?

$$V = \frac{1}{6}\pi d^3$$

(e) Dlouhý má na ramenou Bystrozrakého ve výšce 4 metry. Bystrozraký hledá princeznu a vzdálenost, na kterou vidí, je dána vzorcem pro vzdálenost k horizontu, tj.

$$H = 3.57\sqrt{h},$$

kde H je vzdálenost k horizontu v kilometrech a h je výška pozorovatele nad povrchem v metrech. Dlouhý roste rychlostí $0{,}1\,\mathrm{ms}^{-1}$. Jak tato úloha souvisí s derivacemi a jak rychle roste vzdálenost na kterou Bystrozraký vidí?

---

2. [6 bodů]

(a) Napište definici lokálního maxima funkce jedné proměnné.

(b) Najděte lokální extrémy a intervaly monotonie funkce $y = \dfrac{x^2}{x+1}$. Platí $y' = \dfrac{x(x+2)}{(x+1)^2}$.

---

3. [8 bodů] Lineární algebra.

(a) Napište, jak vypadá co nejobecnější matici 2×2 taková, že vlastní vektory jsou ve směru souřadných os a žádné vlastní číslo není nula. Odpověď zdůvodněte.

(b) Vypočtěte součiny matic AB a BA pro následující matice.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

---

4. [10 bodů] Integrál.

(a) Vypočtěte integrál $\displaystyle\int_0^1 3x + e^{2x}\,\mathrm{d}x$.

(b) Veličina $r(t)$ udává závislost intenzity srážek (v litrech na metr čtvereční za hodinu) na čase. Co vyjadřuje určitý integrál $\displaystyle\int_0^5 r(t)\,\mathrm{d}t$?

(c) Vyřešte počáteční úlohu $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{1}{y^2}$, $y(0) = 1$.

(d) Vypočtěte střední hodnotu funkce $y = 1 - x^2$ na intervalu $[0, 1]$.

---

5. [8 bodů]

(a) Jak vypočteme determinant čtvercové matice 2×2 a jak souvisí nulovost či nenulovost tohoto determinantu s řešením homogenních soustav lineárních rovnic.

(b) Vyjádřete matematicky nějaký konstitutivní zákon, který jsme použili pro popis materiálových vlastností (Fourierův, Darcyho, Fickův, vyberte si libovolný) a jak se liší v izotropním a anizotropním prostředí.

(c) Napište vzorec pro lineární aproximaci funkce.

(d) Napište vzorec nebo postup, který umožní rozdělit matici na součet symetrické a antisymetrické matice. Aplikujte tento postup na matici B z příkladu 3b. K čemu se tento obrat používá?

---

6. [4 body] Napište, jak počítáme divergenci vektorového pole a co tato divergence vyjadřuje v praktických úlohách.

- Pokud se ze zadaných údajů některá úloha nedá vyřešit pro nedostatek informací, napište, jaké údaje je nutno doplnit.
- Požadavek: alespoň 22 bodů z 50 možných.
- Pište co nejstručněji a nejvýstižněji.
- Po skončení písemky si zkontrolujte, je-li vám správně započítána bonifikace za účast na přednášce. Seznamy má dozor.

1a) $\frac{df}{dx} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$, $\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h}$

b) $\frac{d}{dx}\left(\frac{ax}{x+6}\right) = \frac{a(x+6)-ax}{(x+6)^2} = \frac{6a}{(x+6)^2}$

$\frac{d}{dx}\left(1-e^{bx^2}\right) = -b\cdot 2x\, e^{bx^2}$

c) $m = k\cdot l^3 \Rightarrow \frac{dm}{dt} = k\cdot 3l^2 \frac{dl}{dt}$

d) Souvislost je $\frac{dV}{dt} = 0{,}002\ m^3/hod.$

$V = \frac{1}{6}\pi d^3 \Rightarrow \frac{dV}{dt} = \frac{1}{2}\pi d^2 \frac{dd}{dt} = \frac{1}{2}\pi\cdot(2{,}4)^2\cdot \cancel{0{,}002} \frac{dd}{dt}$

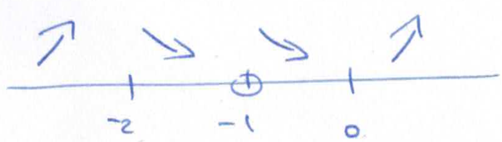
$\Rightarrow \frac{dd}{dt} = \frac{2\cdot 0{,}002}{\pi\cdot(2{,}4)^2}\ m/hod$

e) Souvislost s derivacemi : $\frac{dh}{dt} = 0{,}1\ ms^{-1}$

$\frac{dH}{dt} = \frac{dH}{dh}\cdot\frac{dh}{dt} = 3{,}57\cdot\frac{1}{2}h^{-1/2}\cdot\frac{dh}{dt} = \frac{3{,}57}{2}(4)^{-1/2}\cdot 0{,}1\ kms^{-1}$

2a) lok. max. v bodě $x = x_0$: $f(x_0) \geq f(x)$ pro x z okolí bodu x_0

b) $y' = 0$ pro $x = 0$ a $x = -2$, y' neexistuje pro $x = -1$



lok. MAX $x = -2$

lok. min $x = 0$

3a) $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ 0 \end{pmatrix}$ .. def. vl. vektoru

$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$ .. násobení

$\Rightarrow c = 0$, $a \neq 0$

Podobně $\underset{\text{vl. vektor}}{\begin{pmatrix} 0 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \underset{\text{násobení}}{\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}} \Rightarrow$ $b = 0$, $d \neq 0$

Matice je diagonální a nemá nuly v hlavní diagonále.

$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$ kde $a \neq 0$, $d \neq 0$

3b) $A \cdot B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ -4 & 6 \end{pmatrix}$

$B \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ -6 & 6 \end{pmatrix}$

4a) 2 $\int_0^1 3x+e^{2x}\,dx = \left[\frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}e^{2x}\right]_0^1 = \frac{3}{2}\cdot 1 + \frac{1}{2}e^2 - \left(0 + \frac{1}{2}\right) = 1 + \frac{1}{2}e^2$

3b) počet litrů, které naprší na m^2 za pět hodin

3c) $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{y^2} \Rightarrow y^2\,dy = dx \Rightarrow \int y^2\,dy = \int dx \Rightarrow \frac{y^3}{3} = x + C$

$x = 0$ a $y = 1 \Rightarrow \frac{1}{3} = 0 + C \Rightarrow C = \frac{1}{3}$

$\frac{y^3}{3} = x + \frac{1}{3}$

d) 2 $\frac{1}{1-0}\int_0^1 1 - x^2\,dx = \left[x - \frac{1}{3}x^3\right]_0^1 = 1 - \frac{1}{3} - (0-0) = \frac{2}{3}$

---

5) a) $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$

2 $|A| = 0 \Leftrightarrow Ax = 0$ má nekonečně mnoho řešení

2 b) $\vec{q} = -\lambda \nabla T$ izotropní ... $\lambda \in \mathbb{R}$

anizotropní ... λ matice 2×2 nebo 3×3

2 c) $f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$

2 d) $A = \underbrace{\frac{A + A^T}{2}}_{\text{sym.}} + \underbrace{\frac{A - A^T}{2}}_{\text{antisym.}}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

oddělení rotace a deformace u tenzoru deformace

---

6) $\vec{F} = (P, Q) \Rightarrow \operatorname{div}\vec{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}$

vyjadřuje přírůstek toku vektorového pole