1	2	3	4	5	6

Jméno: ....

1. [14 bodů] Derivace.

(a) Napište definici derivace funkce $f(x)$ jedné proměnné a definici parciální derivace podle x funkce dvou proměnných $f(x, y)$.

(b) Vypočtěte derivaci funkcí

$$y = \frac{a}{(x+6)^2}, \quad y = b + e^{-2x}$$

kde $a, b > 0$ jsou parametry.

(c) Teplota v místnosti kde se přestalo topit se mění tepelnou výměnou s okolím. Rychlost, s jakou teplota místnosti v zimě klesá, je úměrná rozdílu teplot v místnosti a venku. Vyjádřete toto pozorování kvantitativně pomocí derivací. Sestavíte tím matematický model popisující pokles teploty v této místnosti.

(d) Modifikujte předchozí model pro místnost, ve které jsou lidé produkující teplo. Předpokládejme, že vliv lidí na tepotu v místnosti je konstantní, nezávisí na čase ani na teplotě.

(e) Modifikujte předchozí model předpokladem, že vliv lidí na ohřev místnosti je úměrný rozdílu teploty místnosti a teploty lidského těla.

(f) Koule ze sněhu taje. Má poloměr 40 centimetrů a zachovává si při tání kulovitý tvar. Rychlost, s jakou se zmenšuje její poloměr, je jeden centimetr za hodinu. Jak rychle klesá její objem?

---

2. [6 bodů]

(a) Napište vzorec pro lineární aproximaci funkce jedné proměnné.

(b) Najděte lineární aproximaci funkce $y = x(1-x)$ v okolí bodu $x = 0$.

(c) Najděte lineární aproximaci funkce $y = x(1-x)$ v okolí bodu $x = 1$.

---

3. [8 bodů] Lineární algebra.

(a) Najděte matici takovou, že pro libovolný bod v rovině o souřadnicích x, y je

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}$$

(b) Pokuste se geometricky popsat zobrazení z předchozího bodu a určete i jeho inverzní zobrazení. Násobením ověřte, že součin matice tohoto zobrazení a inverzního zobrazení je jednotková matice.

(c) Vypočtěte součin matic AB pro následující matice.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

---

4. [10 bodů] Integrál.

(a) Vypočtěte integrál $\displaystyle\int_0^1 2x + e^{2x}\,\mathrm{d}x$.

(b) Veličina $r(t)$ udává rychlost s jakou vytéká olej z děravé nádrže (v litrech za hodinu). Co vyjadřuje určitý integrál $\displaystyle\int_5^6 r(t)\,\mathrm{d}t$?

(c) Vyřešte diferenciální rovnici $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{1}{\sqrt{y}}$.

(d) Určete střední hodnotu koeficientu tepelné vodivosti $\lambda(T)$ na intervalu $[T_1, T_2]$ v případě, kdy tento koeficient závisí na teplotě.

(e) Jaká musí být závislost $\lambda(t)$ abychom mohli střední hodnotu z předchozího bodu nahradit aritmetickým průměrem hodnoty v krajních bodech.

---

5. [8 bodů]

(a) Jak vypočteme determinant čtvercové matice 2×2 a jak souvisí nulovost či nenulovost tohoto determinantu s řešením homogenních soustav lineárních rovnic.

(b) Vysvětlete velmi stručně hlavní myšlenku a výhody Jacobiho iterační metody řešení soustav lineárních rovnic.

(c) Pomocí Taylorova polynomu druhého řádu odvoďte numerický odhad pro druhou derivaci funkce jedné proměnné.

(d) Jak vypočteme divergenci vektorového pole a jaká je fyzikální jednotka této divergence?

---

6. [4 body] Napište difuzní rovnici pro funkci dvou proměnných. Operátory divergence a gradientu rozepište do složek. Stačí uvažovat izotropní případ.

- Pokud se ze zadaných údajů některá úloha nedá vyřešit pro nedostatek informací, napište, jaké údaje je nutno doplnit.
- Požadavek: alespoň 22 bodů z 50 možných.
- Pište co nejstručněji a nejvýstižněji.
- Po skončení písemky si zkontrolujte, je-li vám správně započítána bonifikace za účast na přednášce. Seznamy má dozor.

28.1.

1 a) $\frac{df}{dx} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$, $\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h,y) - f(x,y)}{h}$

b) $\frac{d}{dx}\left(\frac{a}{(x+6)^2}\right) = a \cdot \frac{d}{dx}(x+6)^{-2} = a \cdot (-2) \cdot (x+6)^{-3}$

$\frac{d}{dx}\left(b + e^{-2x}\right) = 0 + (-2)e^{-2x} = -2e^{-2x}$

(c) T ... teplota v místnosti , T_∞ ... teplota okolí (venku)

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_\infty)$$

(d) r ... rychlost s jakou teplotu zvyšuje přítomnost lidí

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_\infty) + r$$

(e) T_0 ... teplota člověka

$$\frac{dT}{dt} = -k_1(T - T_\infty) + k_2(T_0 - T)$$

(f) $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ $\qquad \frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dr} \cdot \frac{dr}{dt} = 4\pi r^2 \cdot \frac{dr}{dt} = 4\pi \cdot 40^2 \cdot (-1)$

$$\frac{dV}{dt} = -6400\pi \ \ cm^3/hod$$

---

2 a) $f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$

b) $f = x(1-x)$, $f(0) = 0$

$\frac{df}{dx} = \frac{d}{dx}(x - x^2) = 1 - 2x$, $\frac{df}{dx}(0) = 1 - 2.0 = 1$

$x(1-x) \approx x$ v okolí $x = 0$

c) $f(1) = 0$ $\qquad \frac{df}{dx}(1) = 1 - 2.1 = -1$

$x(1-x) \approx -(x-1)$ v okolí $x = 1$

$x(1-x) \approx 1 - x$

3) a) $A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} y$

$\Rightarrow \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

b) osová symetrie podle x $\Rightarrow A^{-1} = A$

$A^{-1} \cdot A = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$

protože $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot 2 + \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$ a $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot 0 + \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot 3 = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \end{pmatrix}$

4a) $\int_0^1 2x + e^{2x}\, dx = \left[x^2 + \frac{1}{2} e^{2x}\right]_0^1 = 1 + \frac{1}{2} e^2 - \left(0 + \frac{1}{2} e^0\right) =$

$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} e^2$

b) Množství oleje, které vyteče mezi pátou a šestou hodinou

c) $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{y}} \Rightarrow \sqrt{y}\, dy = dx \Rightarrow \int \sqrt{y}\, dy = \int dx \Rightarrow$

$\Rightarrow \cancel{2\sqrt{}} \quad \frac{2}{3} y^{3/2} = x + c$

d) $\frac{1}{T_2 - T_1} \int_{T_1}^{T_2} A(T)\, dT$

e) lineární v proměnné T tj. $A(T) = a + b \cdot T$

5a) $\underbrace{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}_{A} = ad - bc$

$|A| = 0 \Leftrightarrow Ax = 0$ má netriviální řešení

b) Matici A v soustavě $Ax = B$ rozdělíme na součet Diagonální matice D a využijeme toho, že D^{-1} se dá určit snadno

$$Ax = B \Rightarrow (D + M)x = B \Rightarrow Dx = B - Mx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cancel{D} \quad x = D^{-1}(B - Mx)$$

tj. iterační vzorec je $X_{k+1} = D^{-1}(B - M \cdot X_k)$

c)
$$f(x+h) \simeq f(x) + f'(x)h + \frac{1}{2}f''(x)h^2$$
$$f(x-h) \simeq f(x) - f'(x) \cdot h + \frac{1}{2}f''(x) \cdot h^2$$

$$f(x+h) + f(x-h) \simeq 2f(x) + f''(x) \cdot h^2$$

$$f''(x) \approx \frac{1}{h^2}\left(f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)\right)$$

d) pro $\vec{F} = (P, Q)$ je divergence $\mathrm{div}\,\vec{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}$

jednotkou je jednotka P dělená jednotkou x.

---

6) $$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \gamma + \frac{\partial}{\partial x}\left(D\frac{\partial \rho}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(D\frac{\partial \rho}{\partial y}\right)$$