Písemná část zkoušky z Matematiky, 24.1.2020, (90 minut)

1	2	3	4	5	6

Jméno: ....

1. [14 bodů] Derivace.

(a) Napište definici derivace funkce jedné proměnné a definici parciální derivace funkce dvou proměnných.

(b) Vypočtěte derivaci funkcí

$$y = \frac{x}{ax+b}, \quad y = 1 - e^{5x}$$

kde $a, b > 0$ jsou parametry.

(c) Předpokládejme, že požár se ve vysušené oblasti šíří ve tvaru kruhu. V určitém okamžiku je poloměr 50 metrů a roste rychlostí 0.5 metrů za minutu. Zapište zadání pomocí derivací a určete jak rychle roste plocha zasažená ohněm.

(d) Tepelná vodivost materiálu závisí na teplotě. Hu Wen (Temperature dependence of thermal conductivity, diffusion and specific heat capacity for coal and rocks from coalfield, Thermochimica Acta 2015) naměřil pro tepelnou vodivost λ vztah

$$\lambda = (8.2 - 0.009T)^{-1},$$

kde λ je v jednotkách $\mathrm{W\,m^{-1}\,K^{-1}}$ a T termodynamická teplota v K. Vypočtěte derivaci $\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}T}$ a napište i její jednotku.

(e) V předchozím bodě pro je pro $T = 300\,\mathrm{K}$ derivace číselně rovna hodnotě 0.0003. Napište slovní interpretaci této hodnoty.

2. [6 bodů]

(a) Napište definici lokálního maxima.

(b) Najděte lokální extrémy funkce $y = \frac{x^2}{x-1}$. Derivace je $y' = \frac{x(x-2)}{(x-1)^2}$.

3. [8 bodů] Lineární algebra.

(a) Vyřešte soustavu

$$\begin{aligned} x_1 + 2\,x_2 + x_3 &= 0 \\ -\,x_1 + x_2 + 2\,x_3 &= 0 \\ x_2 + x_3 &= 0 \end{aligned}$$

(b) Vypočtěte součin matic AB pro následující matice.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

(c) Vypočtěte determinanty matic A, B a AB.

4. [10 bodů] Integrál.

(a) Vypočtěte integrál $\int_0^2 x^2 + 6x\,\mathrm{d}x$.

(b) Teplota elektrického vodiče po zapnutí přístroje roste rychlostí $5e^{-0.1t}$ stupňů Celsia za minutu. Jak se změní teplota za 15 minut?

(c) Vyřešte diferenciální rovnici $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y^3x^2$.

(d) Napište alespoň jednu podmínku, která zajistí, že počáteční úloha pro diferenciální rovnici se separovanými proměnnými má právě jedno řešení.

5. [8 bodů]

(a) Jak je definována inverzní matice a jak souvisí s determinantem matice?

(b) Napište, jak vypočítáme divergenci $\operatorname{div}\vec{F}$ vektorové funkce $\vec{F} = (P(x,y), Q(x,y))$ a k čemu ji využíváme.

(c) Napište, jak je definován gradient ∇f funkce dvou proměnných $f(x,y)$ a k čemu se využívá.

(d) Lineární materiálové vztahy jsou vlastně lineární aproximace obecných vztahů. Napište obecný vzorec pro lineární aproximaci funkce f v okolí bodu x_0 a ukažte, že pro funkci f splňující $f(0) = 0$ se tento vzorec v okolí $x_0 = 0$ redukuje na přímou úměrnost. Toto pozorování vysvětluje jednotný tvar Fourierova zákona, Darcyho zákona a Fickova zákona v jedné dimenzi.

6. [4 body] Napište rovnici vedení tepla v jedné dimenzi v její základní podobě, tj. bez zdrojů a spotřebičů. Poté rovnici upravte přidáním spotřebičů tepla. (To je základní model křidélka pasivního chladiče elektronických součástek.)

- Pokud se ze zadaných údajů některá úloha nedá vyřešit pro nedostatek informací, napište, jaké údaje je nutno doplnit.
- Požadavek: alespoň 22 bodů z 50 možných.
- Pište co nejstručněji a nejvýstižněji.
- Po skončení písemky si zkontrolujte, je-li vám správně započítána bonifikace za účast na přednášce. Seznamy má dozor.

24. 1. 2020

1(a) $f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h}$

(b) $\frac{d}{dx}\left(\frac{x}{ax+b}\right) = \frac{1 \cdot (ax+b) - x \cdot a}{(ax+b)^2} = \frac{b}{(ax+b)^2}$

$\frac{d}{dx}\left(1 - e^{5x}\right) = -5e^{5x}$

(c) $S = \pi r^2$, $\frac{dr}{dt} = 0{,}5$, $\frac{dS}{dt} = \frac{dS}{dr} \cdot \frac{dr}{dt} = 2\pi r \cdot \frac{dr}{dt}$

po dosazení: $\frac{dS}{dt} = 2 \cdot \pi \cdot 50 \cdot 0{,}5 = 50\pi$ m^2/min

(d) $\frac{d\lambda}{dT} = (-1)(8{,}2 - 0{,}009T)^{-2}(-0{,}009) = \frac{0{,}009}{(8{,}2 - 0{,}009T)^2}$

$\left[\frac{d\lambda}{dT}\right] = \frac{W\, m^{-1}\, K^{-1}}{K} = W\, m^{-1}\, K^{-2}$

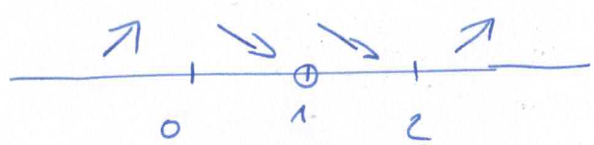
(e) Při teplotě 300 K se každé navýšení teploty o 1 K projeví nárůstem tepelné vodivosti o 0,0003 $W\, m^{-1}\, K^{-1}$.

2(a) Bod $x = a$ je lok. maximum pokud platí $f(x) \le f(a)$ pro x z nějakého okolí bodu a.

(b) $y' = 0$ pro $x = 0$ a $x = 2$

y' neexistuje pro $x = 1$

monotonie :



lokální maximum pro $x = 0$

lokální minimum pro $x = 2$

3 (a)
$$\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$x_2 + x_3 = 0 \Rightarrow x_3 = t \quad x_2 = -t$

$x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \Rightarrow x_1 - 2t + t = 0 \Rightarrow x_1 = t$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ -t \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot t \qquad t \in \mathbb{R}$$

(b)
$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$$

$|A| = 3 \cdot 2 - 1 \cdot (-1) = 6 + 1 = 7$

$|B| = 2 \cdot 3 - 0 \cdot 0 = 6$

$|A \cdot B| = 6 \cdot 6 - 2 \cdot (-3) = 36 + 6 = 42$

---

4 (a)
$$\int_0^2 x^2 + 6x \, dx = \left[\frac{x^3}{3} + 3x^2\right]_0^2 = \frac{8}{3} + 12 - 0 = \frac{44}{3}$$

(b)
$$\Delta T = \int_0^{15} 5 \cdot e^{-0,1t} \, dt = \left[5 \cdot (-10)\, e^{-0,1t}\right]_0^{15} =$$
$$= -50\, e^{-1,5} - (-50 \cdot e^0) = \left(50 - 50 \cdot e^{-1,5}\right) {}^\circ C$$

(c) Konstantní řešení je $y = 0$

$$y^{-3}\, dy = x^2 dx \Rightarrow -\frac{1}{2} y^{-2} = \frac{1}{3} x^3 + C$$

(d) $y' = f(x) g(y) \qquad y(x_0) = y_0$

Je-li $g(y_0) \neq 0$, má úloha právě jedno řešení.

5(a) $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$

$|A^{-1}|$ existuje $\Leftrightarrow$ $|A| \neq 0$

(b) $\operatorname{div} \vec{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}$

v rovnici kontinuity nebo v difuzní rovnici divergence popisuje jak se mění tok vektorového pole, které přenáší stavovou veličinu.

(c) $\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right)$

– ∇f je směr maximálního poklesu funkce f, což se využívá při formulaci materiálových vztahů.

(d) $f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$

pro $x_0 = 0$ a $f(0) = 0$ dostaneme $f(x) \approx f'(0) \cdot x$

a $f'(0) \cdot x$ je přímá úměrnost.

---

6) $\rho \cdot c \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right)$ .. bez zdrojů

$\rho \cdot c \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k \cdot \frac{\partial T}{\partial x} \right) + g$ kde $g < 0$

jsou (záporné) zdroje

tj. spotřebiče.