Písemná část zkoušky z Matematiky, 21.1.2020, (90 minut)

1	2	3	4	5	6

Jméno: ....

1. [14 bodů] Derivace.

(a) Napište definici derivace a pokuste se vysvětlit jednotlivé části definice. Pro konkrétnost: napište, co vyjadřuje čitatel zlomku v definici derivace, co vyjadřuje zlomek jako celek a jaký význam má objekt před zlomkem.

(b) Rychlost zvuku v pevné látce je dána vzorcem $c = \sqrt{\frac{E}{\varrho}}$ kde c je rychlost zvuku v metrech za sekundu, E je Youngův modul pružnosti v pascalech a ϱ je hustota v kilogramech na metr krychlový. U dřeva předpokládejme, že v závislosti na vlhkosti se ϱ může měnit a E je konstantní. Funkci c tedy chápeme jako funkci proměnné ϱ. Určete derivaci $\frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}\varrho}$.

(c) Pokračujme v příkladu z předchozího bodu. Pokud například pro břízu $\rho = 640\,\mathrm{kg\,m^{-3}}$ je derivace $\frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}\varrho}$ číselně rovna hodnotě -3.3, doplňte jednotku a napište slovní interpretaci této derivace.

(d) Náklady na produkci x tun dřevěných panelů jsou (v milionech Kč)

$$C(x) = 3 + \sqrt{3x+10}, \text{ pro } 0 \le x \le 30.$$

Určete $C'(30)$ (včetně jednotky) a napište slovní interpretaci této hodnoty.

(e) Derivaci studovanou v předchozím bodě znají ekonomové pod pojmem mezní náklady. Wikipedie tvrdí, že očekávaná kybernetizace výroby (tzv. Průmysl 4.0) je spojena s mimořádně nízkými mezními náklady. Jak byste tuto skutečnost vysvětlili přirozeným jazykem bez matematických nebo ekonomických pojmů? Co bude znamenat skutečnost, že funkce $C(x)$ bude mít malou derivaci?

(f) Vypočtěte derivaci funkcí

$$y = \frac{ax}{x^2+1}, \quad y = 3x\sqrt{x} + 8x^5$$

kde $a > 0$ je parametr.

2. [6 bodů]

(a) Napište vzorec pro lineární aproximaci funkce a pokuste se slovně intepretovat význam jednotlivých částí tohoto vzorce.

(b) Najděte lineární aproximaci funkce $y = x(1-x)$ v okolí bodu $x = 1$.

3. [8 bodů] Lineární algebra.

(a) Najděte vlastní čísla a vektory matice $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

(b) Existuje matice P taková, že matice $P^TAP = D$ je diagonální. Vysvětlete, jak je možno najít matici D. Dokonce i bez hledání matice P a bez počítání maticového součinu.

(c) Vynásobte matice A a B pro obě možná pořadí, tj. AB a BA.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

4. [10 bodů] Integrál.

(i) Vypočtěte integrál $\int e^{2x} - \frac{2}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$.

(ii) Najděte střední hodnotu funkce $f(x) = 6 - x^2$ na intervalu $[0,2]$.

(iii) Vyřešte diferenciální rovnici $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{6}{y}$.

(iv) Napište větu o integrálu jako funkci horní meze. Kdy je vhodné tuto větu použít?

5. [8 bodů]

(i) Jak je definována inverzní matice a jak souvisí se soustavami lineárních rovnic?

(ii) Mnoho živočichů roste tak, že mohou dorůstat jisté maximální délky a rychlost jejich růstu je úměrná délce, která jim do této maximální délky chybí (tj. kolik ještě musí do této maximální délky dorůst). Sestavte matematický model popisující takovýto růst.

(iii) Napište Taylorův polynom pro funkci f v bodě x_0 a k čemu je možné tento polynom použít.

(iv) Zformulujte Bolzanovu větu. Platí i pro klesající funkce?

6. [4 body] Napište rovnici vedení tepla v jedné dimenzi. Poté rovnici modifikujte přidáním zdrojů tepla.

- Požadavek: alespoň 22 bodů z 50 možných.
- Pište co nejstručněji a nejvýstižněji.
- Po skončení písemky si zkontrolujte, je-li vám správně započítána bonifikace za účast na přednášce. Seznamy má dozor.

21.1.2020

1 (a) $$\frac{df}{dx} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$f(x+h) - f(x)$ ... změna fce f na intervalu $[x, x+h]$

$\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ ... změna přepočítaná na interval jednotkové délky

$\lim_{h \to 0}$ ... ... „stahujeme“ délky intervalu se kterým pracujeme na malé.

(b) $$\frac{dc}{d\rho} = \sqrt{E} \cdot \frac{d}{d\rho}\left(\rho^{-1/2}\right) = -\frac{1}{2} \rho^{-3/2} \cdot \sqrt{E} = -\frac{1}{2\rho} \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

(c) $$\frac{dc}{d\rho} = -3{,}3 \; \frac{m \cdot s^{-1}}{kg\, m^{-3}} = -3{,}3 \; m^4 s^{-1} kg^{-1}$$

Zvýšením hustoty o $1\ kg\, m^{-3}$ se rychlost zvuku v materiálu sníží o $3{,}3\ m s^{-1}$

(d) $$c' = \left(3 + \sqrt{3x+10}\right)' = \left((3x+10)^{1/2}\right)' = \frac{1}{2}(3x+10)^{-1/2} \cdot 3 =$$

$$= \frac{3}{2\sqrt{3x+10}}$$

$$c'(30) = \frac{3}{2 \cdot \sqrt{100}} = \frac{3}{20} = 0{,}15 \; \frac{\text{milionů Kč}}{\text{tuna}}$$

Zvýšení produkce o 1 tunu zvýší náklady o 0,15 milionů Kč (při produkci 30 tun). Vyprodukovat 31-ní tunu stojí cca 150 000 Kč.

(e) Navýšení výroby se moc neprojeví na nákladech (pracují roboti.)

(f) $$\left(\frac{ax}{x^2+1}\right)' = \frac{a(x^2+1) - ax \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{a - ax^2}{(x^2+1)^2}$$

$$\left(3x\sqrt{x} + 8x^5\right)' = \left(3x^{3/2} + 8x^5\right)' = \frac{9}{2}x^{1/2} + 40x^4$$

2) (a) $f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$

$f(x)$ .. odhadovaná hodnota

$f(x_0)$ .. výchozí bod pro odhad

$f'(x_0)(x-x_0)$ ... odhad změny na int. délky $x-x_0$

$f'(x_0)$ ... odhad změny na intervalu délky 1

$x-x_0$ ... délka intervalu, na kterém odhad potřebujeme

(b) $y = x(1-x)$ $\qquad y(1) = 1.(1-1) = 1.0 = 0$

$y' = (x-x^2)' = (1-2x)$ $\qquad y'(1) = 1-2\cdot 1 = -1$

$$x(1-x) \approx -(x-1) = 1-x$$

---

3) (a) $\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^2 - 1 = \lambda^2 - 4\lambda + 4 - 1 = \lambda^2 - 4\lambda + 3 =$

$= (\lambda-1)(\lambda-3)$

$\lambda_1 = 1$ .. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\qquad \vec{u_1} = (1, -1)$

$\lambda_2 = 3$: $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\qquad \vec{u}_2 = (1, 1)$

(b) D má v diagonále vlastní čísla matice ★ $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 & 3 \\ -4 & 6 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 & 4 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$

---

4. (i) $\int e^{2x} - \frac{2}{\sqrt{x}}\,dx = \int e^{2x} - 2x^{-1/2}\,dx = \frac{1}{2}e^{2x} - 2\cdot 2\cdot x^{1/2} + C$

(ii) $\frac{1}{2-0}\int_0^2 6-x^2\,dx = \frac{1}{2}\left[6x - \frac{x^3}{3}\right]_0^2 = \frac{1}{2}\left[12 - \frac{8}{3}\right] = 6 - \frac{4}{3} = \frac{14}{3}$

(iii)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{6}{y}$$

$$y\,dy = 6\,dx$$

$$\frac{1}{2}y^2 = 6x + C$$

(iv) Je-li $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$, potom $F'(x) = f(x)$.

Takto můžeme dostávat primitivní fci k funkcím, které nejdou integrovat v množině elementárních fcí.

5(i) $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$

Je-li A^{-1} k dispozici, má soustava $AX = B$ jediné řešení $X = A^{-1} \cdot B$

(ii) $\frac{dl}{dt} = k(l_{max} - l)$

(iii) $T(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$

k aproximaci fce polynomem

(iv) Je-li f spojitá na $[a,b]$ a $f(a), f(b)$ se liší znaménkem, existuje $c \in [a,b]$ s vlastností $f(c) = 0$.

Monotonie nerozhoduje, zaručení není nutné ani nevadí.
Důležitá je spojitost

---

6) $\rho \cdot c \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(D \frac{\partial T}{\partial x}\right)$, $\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(D \frac{\partial T}{\partial x}\right) + \sigma$