Písemná část zkoušky z Matematiky, 17.1.2020, (90 minut)

1	2	3	4	5	6

Jméno: ....

1. [14 bodů] Derivace.

(i) Napište definici derivace a pokuste se vysvětlit jednotlivé části definice. Pro konkrétnost: napište, co vyjadřuje čitatel zlomku v definici derivace, co vyjadřuje zlomek jako celek a jaký význam má objekt před zlomkem.

(ii) Pro danou strunu je její základní frekvence f úměrná odmocnině z tahu T. Například (bez jednotek, frekvenci dosazujeme v Hz a tah v N)

$$f = 44\sqrt{T}.$$

Jaká je derivace frekvence podle tahu $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}T}$, v jakých vychází jednotkách, kolik je číselně derivace pro $T = 100\,\mathrm{N}$ a jaká je slovní interpretace hodnoty této derivace?

(iii) Dokažte přibližný vzorec

$$\sqrt{x+1} \approx 1 + \frac{1}{2}x.$$

(iv) Vypočtěte derivaci funkcí

$$y = \frac{ax}{(x+a)^2}, \quad y = \frac{x}{\sqrt{\pi}}$$

kde $a > 0$ je parametr.

(v) Kruhová ropná skvrna na hladině se rozšiřuje tak, že její poloměr jako funkce času roste rychlostí, která je nepřímo úměrná druhé mocnině poloměru. Vyjádřete proces kvantitativně pomocí derivací.

---

2. [6 bodů]

a) Napište definici rostoucí funkce.

b) Napište definici lokálního maxima.

c) Uveďte, za jakých okolností můžeme tvrdit, že funkce $f(x)$ a její druhá mocnina $(f(x))^2$ mají stejné lokální extrémy.

d) Ukažte na příkladu, že pokud není splněna podmínka z předchozího bodu, nemusí funkce a její druhá mocnina mít stejné lokální extrémy.

---

3. [8 bodů] Lineární algebra.

(i) Najděte 2×2 matici A, která vymění komponenty vektoru a změní znaménko druhé komponenty, tj. vektor $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ se zobrazí na $\begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix}$, tj. vektor se otočí o pravý úhel.

(ii) Ukažte, že matice A z předchozího bodu nemá reálné vlastní číslo a vysvětlete tuto skutečnost geometricky.

(iii) Ukažte, že matice $A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ má reálné vlastní číslo.

---

4. [10 bodů] Integrál.

(i) Vypočtěte integrál $\int e^x + e^{2x} \,\mathrm{d}x$.

(ii) Napište definici střední hodnoty.

(iii) Vypočtěte střední hodnotu funkce $f(x) = 1 - x^2$ na intervalu $[0,1]$.

(iv) Určete hodnotu parametru a tak, aby funkce $f(x) = a(1-x^2)$ na intervalu $[0,1]$ měla střední hodnotu rovnu jedné.

---

5. [8 bodů]

(i) Napište definici pojmu inverzní matice a jak tuto matici můžeme využít při řešení soustavy lineárních rovnic.

(ii) Rozhodněte, zda počáteční úloha

$$y' = x^2y^3 \qquad y(0) = \pi$$

právě jedno řešení. Odpověď zdůvodněte.

(iii) Napište nebo odvoďte vzorec pro Newtonovu metodu a napište, k čemu se tato metoda používá.

---

6. [4 body] Napište, jak vypočteme divergenci vektorového pole a co tato divergence vyjadřuje slovně.

- Požadavek: alespoň 22 bodů z 50 možných.
- Pište co nejstručněji a nejvýstižněji.
- Po skončení písemky si zkontrolujte, je-li vám správně započítána bonifikace za účast na přednášce. Seznamy má dozor.

17.1.2020

1) (i) $f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

$f(x+h) - f(x)$ ... změna fce na intervalu $[x, x+h]$

$\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ ... — " — přepočtená na interval podnotkové délky

$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ ... změna f na podnotku x počítaná ~~za časový~~ ~~okamžik~~ na intervalu prakticky nulové délky, tj. okamžitá rychlost

(ii)

$$\frac{df}{dT} = 22\, T^{-1/2} = \frac{22}{\sqrt{T}} \qquad \left[\frac{df}{dT}\right] = \frac{Hz}{N}$$

$$\frac{df}{dT}(100) = \frac{22}{\sqrt{100}} = 2{,}2 \ Hz\, N^{-1}$$

Změna tahu o 1 N zvýší frekvenci o 2,2 Hz.

(iii) $f(x) = \sqrt{x+1}$ $\qquad f'(x) = \frac{1}{2}(x+1)^{-1/2}$

$f(0) = \sqrt{0+1} = \sqrt{1} = 1$ $\qquad f'(0) = \frac{1}{2}(0+1)^{-1/2} = \frac{1}{2}$

$$\sqrt{x+1} \approx f(0) + f'(0)(x-0) = 1 + \frac{1}{2}x$$

(iv)

$$y = \frac{ax}{(x+a)^2} \qquad y' = \frac{a(x+a)^2 - ax \cdot 2(x+a)}{(x+a)^4}$$

$$y = \frac{x}{\sqrt{\pi}} \qquad y' = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot x$$

(v)

$$\frac{dr}{dt} = \frac{k}{r^2}$$

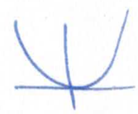
2) a) $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

b) $f(x) \le f(x_0)$ v nějakém okolí bodu x_0

c) je-li f sudá, protože potom je druhá mocnina rostoucí

d) $y = x$ | $y = x^2$

$x=0$ není extrém



$x=0$ je minimum

---

3) (i) $A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}x + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

(ii) $|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1$

$0 = \lambda^2 + 1$ nemá reálné kořeny

po otočení o 90° si žádný vektor nezachová směr

(iii) $\lambda_{1,2} = -1$ ... u diagonální matice jsou vlastní čísla v diagonále.

---

4) (i) $\int e^x + e^{2x}\, dx = e^x + \frac{1}{2}e^{2x} + C$

(ii) $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$

(iii) $\frac{1}{1-0}\int_0^1 1 - x^2\, dx = 1\left[x - \frac{1}{3}x^3\right]_0^1 = 1.\left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3}$

(iv) $\frac{1}{1-0}\int_0^1 a(1-x^2)\,dx = a \cdot \frac{2}{3}$

$a \cdot \frac{2}{3} = 1 \Rightarrow a = 3/2$

5) (i) $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$

$A x = B$ ... soustava

$x = A^{-1} \cdot B$ ... řešení

(ii) ANO, protože má 4T přechází a $T^3 \neq 0$

nebo

ANO, protože $\frac{\partial}{\partial y}(x^2 \cdot y^3) = x^2 \cdot 3y^2$ ... ohraničená fce v okolí $(0, \pi)$

(iii) $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ $\Big($ z $0 = f(x_n) + f'(x_n)(x_{n+1} - x_n)$

používá se k numerickému řešení rce $f(x) = 0$

---

6) $\vec{F} = (P, Q) \Rightarrow \mathrm{div}\, \vec{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}$

vyjadřuje o kolik více veličiny přenášené tokem $\vec{F}$ z daného místa vyteče než do něj vteče

A : nad 40

B : 34 - 39

C : 29 - 34

D : 25 - 28

E : 22 - 24