Písemná část zkoušky z Matematiky, 14.1.2020, (90 minut)

1	2	3	4	5	6

Jméno: ....

1. [14 bodů] Derivace.

(i) Napište definici derivace a pokuste se vysvětlit jednotlivé části definice a proč je definice sestavena právě tímto způsobem. Pro konkrétnost: napište, co vyjadřuje čitatel zlomku v definici derivace, co vyjadřuje zlomek jako celek a jaký význam má objekt před zlomkem.

(ii) Ze sibiřské rozhledny o výšce h vidíme za optimálních podmínek v rovinaté krajině do vzdálenosti

$$H = 3.57\sqrt{h},$$

kde h je v metrech a H v kilometrech. Určete hodnotu derivace $\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}h}$ pro $h = 16\,\mathrm{m}$ (včetně jednotky) a slovní interpretaci této derivace.

(iii) V předchozím příkladě předpokládejme, že vlivem tání permafrostu se rozhledna zabořuje a snižuje se její výška. Jak toto vyjádříme pomocí derivace? Dále najděte vztah mezi rychlostí, s jakou se mění výška rozhledny a rychlostí, s jakou se mění vzdálenost, kam z rozhledny dohlédneme?

(iv) Vypočtěte derivaci funkcí

$$y = \frac{x}{x^2+1}, \quad y = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{ax^2}$$

kde $a > 0$ je parametr.

(v) Vypočtěte derivaci povrchu koule ($S = 4\pi r^2$) podle poloměru.

---

2. [6 bodů]

a) Napište definici rostoucí funkce.

b) Funkce $y = \frac{x^2}{x+1}$ má derivaci $y' = \frac{x(x+2)}{(x+1)^2}$. Najděte intervaly, kde je funkce rostoucí a kde je klesající. Najděte lokální extrémy.

---

3. [8 bodů] Lineární algebra.

(i) Vyřešte následující soustavu rovnic.

$$\begin{aligned} x_1 + \, x_2 \phantom{{}+x_3} &= 0 \\ x_1 + 2\, x_2 + x_3 &= 1 \\ 2\, x_1 + \, x_2 + x_3 &= 0 \end{aligned}$$

(ii) Zapište předchozí soustavu formálně pomocí maticového násobení.

(iii) Napište definici inverzní matice a stručně k čemu a jak je možné tuto inverzní matici využít. Volte *jiné* využití než řešení soustavy lineárních rovnic.

---

4. [10 bodů] Integrál.

(i) Vypočtěte integrál $\int \frac{1}{4x^2}\,\mathrm{d}x$.

(ii) Teplota v autě ponechaném na slunci roste rychlostí

$$15e^{-0.1t}\ {}^\circ\mathrm{C/hod},$$

kde t je čas v hodinách. Pokud je to možné, určete, o kolik se změní teplota za tři hodiny a jaká bude teplota v autě po prvních třech hodinách? Pokud není pro některou část dost informací, vysvětlete, jaké další informace potřebujeme.

(iii) Napište definici pojmu primitivní funkce.

(iv) Ukažte na příkladě použití substituční metody pro výpočet neurčitého integrálu.

---

5. [8 bodů]

(i) Po havárii v jaderné elektrárně se neví, jestli v havarovaném reaktoru probíhá dále štěpení. Vědci navrhli zjistit situaci měřením jódu, protože má krátkou dobou rozpadu. Za den se rozpadne 8% radioaktivního jódu ^{131}I. Napište rovnici modelující rychlost s jakou roste množství jódu ^{131}I v okolí reaktoru za předpokladu, že stále probíhá štěpení a reaktor vyprodukuje do okolí každý den 1986 kilogramů ^{131}I.

(ii) Zformulujte vzorec pro Taylorův polynom stupně n pro funkci f a střed v bodě x_0. Napište, k čemu zpravidla bývá používán.

(iii) Napište nebo odvoďte vzorec pro Newtonovu metodu a napište, k čemu se tato metoda používá.

---

6. [4 body] Napište Fourierův zákon (souvislost tepelného namáhání a toku tepla) a podejte slovní interpretaci jednotlivých částí matematického vyjádření tohoto zákona. Zejména, co vyjadřuje gradient a jak se liší rovnice v izotropním a anizotropním prostředí.

- Požadavek: alespoň 22 bodů z 50 možných.
- Pište co nejstručněji a nejvýstižněji.
- Po skončení písemky si zkontrolujte, je-li vám správně započítána bonifikace za účast na přednášce. Seznamy má dozor.

14. 1. 2020

1) (i) $\dfrac{df}{dx} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$

$f(x+h) - f(x)$ ... změna funkce f na intervalu $[x, x+h]$

$\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$ .... změna fce f na $[x, x+h]$ přepočtená na interval jednotkové délky... průměrná rychlost

$\lim\limits_{h \to 0}$ .... limitní přechod umožní mít $h = 0$, tj okamžitou rychlost

(ii) $\dfrac{dH}{dh} = \dfrac{1}{2} \cdot 3{,}57 \cdot h^{-1/2} = \dfrac{1}{2\sqrt{h}} \cdot 3{,}57$, $\dfrac{dH}{dh} = \dfrac{1}{2 \cdot \sqrt{16}} \cdot 3{,}57 \approx 0{,}45 \dfrac{km}{m}$

Zvýšení rozhledny o 1 m umožní dohlédnout o 450 m dále.

(iii) $\dfrac{dh}{dt}$ .. rychlost, s jakou se mění výška rozhledny

$$\frac{dH}{dt} = \frac{dH}{dh} \cdot \frac{dh}{dt} = \frac{3{,}57}{2\sqrt{h}} \cdot \frac{dh}{dt}$$

(iv)

$y = \dfrac{x}{x^2+1}$ $\qquad y' = \dfrac{1 \cdot (x^2+1) - x \cdot 2x}{(x+1)^2} = \dfrac{1 - x^2}{(x^2+1)^2}$

$y = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}} e^{ax^2}$ $\qquad y' = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot e^{ax^2} \cdot a \cdot 2x$

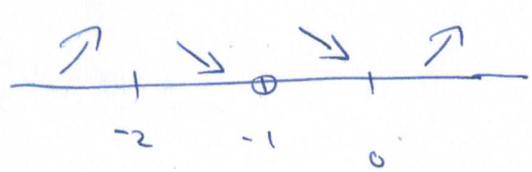
(v)

$\dfrac{dS}{dr} = 4\pi \cdot 2r$

---

2) a) $x_1 \leq x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$

b)



lokální minimum v bodě $x = 0$

lokální maximum v bodě $x = -2$

roste: $(-\infty, -2)$ a $(0, \infty)$

klesá: $(-2, -1)$ a $(-1, 0)$

③

(i) $$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} x_1 + x_2 = 0 \\ x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_3 = 1 \quad \Rightarrow x_3 = \frac{1}{2} \end{array}\right\} x_2 + \frac{1}{2} = 1 \Rightarrow x_2 = \frac{1}{2} \end{array}\right\} x_1 = -x_2 = -\frac{1}{2}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

(ii) $$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(iii) $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$

zpětná transformace při transformaci souřadnic
transformace tenzorů (např. do diagonálního tvaru)

---

④

(i) $\int \frac{1}{4x^2}\, dx = \frac{1}{4} \int x^{-2}\, dx = \frac{1}{4}\, x^{-1} \cdot (-1) = -\frac{1}{4x} + C$

(ii) změna teploty: $\Delta T = \int_0^3 15\, e^{-0{,}1t}\, dt = \left[15 \cdot (-10) \cdot e^{-0{,}1t} \right]_0^3 =$

$= -150 \cdot e^{-0{,}3} + 150 \cdot e^0 \approx 39\,°C$

teplotu po třech hodinách nemůžeme ze zadání určit, chybí nám počáteční teplota. Vypočteme jenom změnu.

(iii) $F' = f$ (F je primitivní k f)

(iv) $\int 2x e^{x^2}\, dx = \boxed{\begin{array}{c} x^2 = t \\ 2x\,dx = dt \end{array}} = \int e^t\, dt = e^t = e^{x^2} + C$

(5)(i) m ... množství

$$\frac{dm}{dt} = 1986 - 0{,}8m$$

(ii)

$$T(x) = f(x_0) + \frac{df}{dx}(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2!}\frac{d^2f}{dx^2}(x_0)(x-x_0)^2 +$$

$$+ \dots + \frac{1}{n!}\frac{d^nf}{dx^n}(x_0)(x-x_0)$$

používá se k aproximaci funkce, je přesnější než lineární aproximace

(iii)

$$0 = f(x_0) + f'(x_0)(x_1 - x_0)$$

$$f'(x_0)(x_1 - x_0) = -f(x_0)$$

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

používá se k řešení nelineárních rovnic numerickou cestou.

---

(6)

$$\vec{q} = -D \nabla T$$

$\vec{q}$ ... tok tepla

T ... teplota

∇T ... gradient teploty, má směr nejrychlejšího růstu teploty

D ... konstanta úměrnosti, v anizotropním prostředí maticová