Písemná část zkoušky z Matematiky, 7.1.2020, (90 minut)

1	2	3	4	5	6

Jméno: ....

1. [14 bodů] Derivace.

(i) Napište definici derivace a pokuste se vysvětlit jednotlivé části definice a proč je definice sestavena právě tímto způsobem. Pro konkrétnost: napište, co vyjadřuje čitatel zlomku v definici derivace, co vyjadřuje zlomek jako celek a jaký význam má objekt před zlomkem.

(ii) Nechť $\varphi = f(a)$ je funkce, která udává jak závisí počet dioptrií φ pro korekci krátkozrakosti na vzdálenosti a (v metrech), na kterou ještě oko vidí ostře. V jakých jednotkách bude vyjádřena derivace $\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}a}$ a jaká bude slovní interpretace této derivace?

(iii) Funkce z předchozího bodu je $\varphi = -\frac{1}{a}$. Nechť $a = 10\,\mathrm{m}$ a nechť se a zkracuje rychlostí 0.1 metru za rok. Napište, jak souvisí rychlost s jakou se mění a s rychlostí, s jakou se mění φ a pro daný případ určete, jak rychle se mění počet dioptirí nutných pro korekci této vady?

(iv) Vypočtěte derivaci funkcí

$$y = \frac{x^2}{x+\pi}, \quad y = (8x-a)^4$$

kde $a > 0$ je parametr.

2. [6 bodů]

a) Napište vzorec pro lineární aproximaci funkce a pokuste se slovně intepretovat význam jednotlivých částí tohoto vzorce.

b) Najděte lineární aproximaci funkce $y = \sqrt{x}$ v okolí bodu $x = 1$.

3. [8 bodů] Lineární algebra.

(i) Najděte 2×2 matici S, která dvourozměrný vektor zobrazí na vektor s vyměněnou první a druhou souřadnici, tj. vektor $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ se zobrazí na $\begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix}$. Poté vypočtěte S^2 a S^{-1}.

(ii) Vynásobte matice A a B pro obě možná pořadí, tj. AB a BA.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

4. [10 bodů] Integrál.

(i) Vypočtěte integrál $\int \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^6}\,\mathrm{d}x$.

(ii) Chemikálie teče do nádrže rychlostí $20 + \sqrt{t}$ litrů za minutu, kde $t \in [0, 60]$ je čas v minutách. Určete, kolik chemikálie nateče do nádrže během prvních 20 minut.

(iii) Vyřešte diferenciální rovnici $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2x\sqrt{y}$.

(iv) Napište definici střední hodnoty funkce jedné proměnné. Co musí být zadáno, aby úloha měla smysl? Co je výsledkem? (Číslo? Matice? Rovnice? Intervaly?...)

5. [8 bodů]

(i) Jak je definována inverzní matice a jak souvisí se soustavami lineárních rovnic?

(ii) Matti Lepparänta (A Review of Analytical Models of Sea-Ice Growth, Atmosphere–Ocean 1993) odvodil z rovnice vedení tepla a fyzikálních předpokladů o chování ledu, že tloušťka ledu na hladině moře roste ve stabilních podmínkách rychlostí nepřímo úměrnou této tloušťce. Zapište tento fakt pomocí vhodného matematického modelu.

(iii) Zformulujte větu o určitém integrálu jako funkci horní meze.

(iv) Jak je definován gradient funkce dvou proměnných a k čemu se využívá?

6. [4 body] Napište rovnici kontinuity pro případ bez zdrojů, podejte slovní interpretaci jednotlivých členů této rovnice a napište příklad děje, který je možno pomocí takové rovnice modelovat.

- Požadavek: alespoň 22 bodů z 50 možných.
- Pište co nejstručněji a nejvýstižněji.
- Po skončení písemky si zkontrolujte, je-li vám správně započítána bonifikace za účast na přednášce. Seznamy má dozor.

1) (i) $\frac{df}{dx} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

$f(x+h) - f(x)$ ... změna (nárůst) funkce f na intervalu $[x, x+h]$

$\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ ... nárůst funkce f na intervalu $[x, x+h]$ přepočítaný na interval jednotkové délky

$\lim_{h \to 0}$ .... matematický obrat jak z průměrné rychlosti udělat rychlost okamžitou.

(ii) $[\varphi] = D$ .. dioptrie $\qquad [a] = m$ ... metr

$\left[\frac{d\varphi}{da}\right] = \frac{D}{m}$ .. dioptrie na metr

$\frac{d\varphi}{da}$ .. změna počtu dioptrií při jednotkové změně a.

(iii) $\frac{da}{dt} = -0{,}1 \text{ m rok}^{-1} \qquad \varphi = -a^{-1}$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{d\varphi}{da} \cdot \frac{da}{dt} = -(-1)\, a^{-2} \frac{da}{dt} = \frac{1}{a^2} \frac{da}{dt}$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{1}{10^2} \cdot (-0{,}1) \text{ D rok}^{-1} = -0{,}001 \text{ D rok}^{-1}$$

Počet dioptrií je záporný a dále se snižuje rychlostí $-0{,}001$ Dioptrie za rok

(iv) $$y = \frac{x^2}{x+\pi} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{2x(x+\pi) - x^2 \cdot 1}{(x+\pi)^2} = \frac{x^2 + 2\pi x}{(x+\pi)^2}$$

$$y = (8x - a)^4 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 4(8x-a)^3 \cdot 8 = 32(8x-a)^3$$

---

2) a) $f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$

$f(x_0)$ .. známá referenční hodnota.

$f(x)$ .. odhadovaná hodnota.

$x - x_0$ ... délka intervalu, na kterém aproximujeme.

$f'(x_0)$ ... změna funkce f na intervalu jednotkové délky.

$f'(x_0)(x - x_0)$ .. změna funkce f na intervalu délky $x - x_0$.

(2) b) $y = \sqrt{x}$ $\quad y(1) = \sqrt{1} = 1$

$y' = \frac{1}{2} x^{-1/2}$ $\quad y'(1) = \frac{1}{2} 1^{-1/2} = \frac{1}{2}$

$$y = \sqrt{x} \approx 1 + \frac{1}{2}(x-1)$$

---

(3) (i) $S\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$S^2 = I$ protože dvojím zobrazením se $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ zobrazí na $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Důsledek: $S^{-1} = S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

(ii) $\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 & 3 \\ -4 & 6 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$

---

(4) (i) $\int \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^6}\, dx = \int x^{-2} - x^{-6}\, dx = -x^{-1} + \frac{1}{5}x^{-5} = \frac{1}{5x^5} - \frac{1}{x} + C$

(ii) $\int_0^{20} 20 + \sqrt{t}\, dt = 20 \cdot 20 + \left[\frac{2}{3} t^{3/2}\right]_0^{20} = 400 + \frac{2}{3}(20)^{3/2} =$

$= 400 + \frac{2}{3} \cdot 20 \cdot \sqrt{20} \approx 459$

(iii)

$\frac{dy}{dx} = 2x\sqrt{y}$

(α) $y = 0$ $\quad$ (β) $\int \frac{dy}{\sqrt{y}} = \int 2x\, dx$ $\quad \int \frac{1}{\sqrt{y}} dy = \int y^{-1/2} dy = 2\sqrt{y}$

$2\sqrt{y} = x^2 + C$

(iv) $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\, dx$ ... Zadaná musí být funkce definovaná na intervalu $[a,b]$ a tento interval, výsledkem je číslo

(5) (i) $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$

Pokud existuje A^{-1}, má soustava $Ax = B$ právě jedno řešení pro libovolné B a toto řešení je dáno vzorcem $X = A^{-1} \cdot B$

(ii) $$\frac{dy}{dt} = \frac{k}{y}$$

(iii) Funkce $F(x) := \int_a^x f(t)\,dt$ je primitivní funkcí k funkci f.

(iv) $$\nabla f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix}$$ používá se k detekci, kterým směrem roste funkce f. například v matematických vztazích (Fickův, Fourierův, Darcyho zákon)

---

(6) $$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\operatorname{div} \vec{j}$$

ρ ... hustota stavové veličiny

$\frac{\partial \rho}{\partial t}$ ... rychlost s jakou v daném místě roste množství stavové veličiny

$\vec{j}$ ... tok přenášející stavovou veličinu

$\operatorname{div} \vec{j}$ ... přírůstek stavové veličiny způsobený nějakým tokem.

například vedení tepla