Písemná část zkoušky z Matematiky, 18.12.2019, (90 minut)

1	2	3	4	5	6

Jméno: ....

1. [14 bodů] Derivace.

(i) Napište definici derivace.

(ii) Na rozdíl od jiných živočichů jsou malé ryby přibližně zmenšeniny velkých ryb a proto je u nich hmotnost přibližně úměrná třetí mocnině délky. Najděte souvislost mezi rychlostí s jakou roste hmotnost kapra a rychlostí, s jakou roste délka kapra.

(iii) Vypočtěte derivaci funkcí

$$y = \frac{x^2}{x+\pi}, \quad y = (2019x - 12)^a$$

kde $a > 0$ je parametr.

(iv) Nádrž má tvar kvádru a je do poloviny naplněna vodou. Máme tři různé úlohy.

(A) Při dlouhodobém dešti konstantní intenzity do nádrže teče voda konstantní rychlostí. Rychlost, s jakou roste hladina, je konstantní.

(B) Dírou ve dně vytéká voda. Rychlost, s jakou klesá hladina, je úměrná odmocnině z výšky hladiny.

(C) Z nádrže vytéká dírou ve dně voda přitéká dešťovka. Jedná se o kombinaci předešlých případů.

Každý děj zapište pomocí vhodného matematického modelu pro hloubku vody v nádrži. Rozhodněte také v jednotlivých případech, zda výsledná diferenciální rovnice má konstantní řešení. Výška nádrže nás nelimituje (model platí pouze dokud nádrž nepřeteče nebo nevyteče).

2. [6 bodů] Najděte intervaly monotonie a lokální extrémy funkce $y = \dfrac{x^4}{x+3}$. Derivace je $y' = \dfrac{3(x+4)x^3}{(x+3)^2}$.

3. [8 bodů] Lineární algebra.

(i) Vyřešte soustavu

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 - 2x_3 &= 0 \\ x_1 \phantom{{}-x_2} - x_3 &= 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 &= 0 \end{aligned}$$

(ii) Vynásobte matice A a B pro obě možná pořadí, tj. AB a BA.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

4. [10 bodů] Integrál.

(i) Vypočtěte integrál $\displaystyle\int 24x^{12} - \sqrt{x}\,\mathrm{d}x$.

(ii) Dana Zátopková vozila svoji zlatou medaili po besídkách a nechávala ji zde kolovat mezi diváky. Tím se medaile otírala a ztrácela hmotnost. Pokusíme se popsat tento děj. Předpokládejme, že s odstupem od olympiády intenzita besídek slábne a rychlost otírání se snižuje. Jaký bude úbytek zlata na medaili za první rok, pokud předpokládáme, že rychlost s jakou se mění hmotnost m medaile je $\dfrac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{1}{t+1}$ mikrogramů za týden.

(iii) Vyřešte diferenciální rovnici $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{x}{y^2}$.

(iv) Vysvětlete rozdíl mezi určitým a neurčitým integrálem z několika hledisek.

(A) Co musí být zadáno, aby úloha měla smysl?

(B) Co je výsledkem? Číslo? Matice? Rovnice? ...

(C) Jak se výsledky liší praktickou interpretací? (Můžete vysvětlit na příklade s medailemi)

5. [8 bodů]

(i) Jak je definována inverzní matice? K čemu je nám užitečná?

(ii) U živočichů, kteří s růstem mění proporce (na rozdíl od ryb v úvodním příkladě), sledujeme derivaci $\dfrac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}m}$, kde l je délkový rozměr a m hmotnost. V jakých jednotkách tato derivace vychází a jaké je slovní interpretace této derivace?

(iii) Zformulujte větu o určitém integrálu jako funkci horní meze a vysvětlete, k čemu je užitečná.

(iv) Zapište Fourierův zákon (konstitutivní zákon pro tok tepla v materiálu s nerovnoměrně rozloženou teplotou) a vysvětlete, jak se liší při formulaci v izotropním a anizotropním prostředí.

6. [4 body] Napište rovnici kontinuity pro stacionární případ a vysvětlete fyzikální podstatu jednotlivých členů této rovnice.

- **Požadavek: alespoň 22 bodů z 50 možných.**

18. 12. 2019

1) (i) $\frac{df}{dx} := \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

(ii) $m = k \cdot l^3 \implies \frac{dm}{dt} = k \cdot 3l^2 \frac{dl}{dt}$

m ... hmotnost
l ... délka

(iii) $\left(\frac{x^2}{x+\pi}\right)' = \frac{2x(x+\pi) - x^2 \cdot 1}{(x+\pi)^2}$

$\left((2019x - 12)^a\right)' = a\,(2019x-12)^{a-1} \cdot 2019$

(iv)
(A) $\frac{dh}{dt} = k_1$, rovnice nemá konstantní řešení;

(B) $\frac{dh}{dt} = -k_2\sqrt{h}$, rovnice má konstantní řešení $h = 0$,

(C) $\frac{dh}{dt} = k_1 - k_2\sqrt{h}$, rovnice má konstantní řešení, které je řešením rovnice $k_1 - k_2\sqrt{h} = 0$
tj. $h = \left(\frac{k_1}{k_2}\right)^2$.

---

2) $y' = 0$ pro $x = -4$ a $x = 0$

		-4		-3		0	
y'	+		−		−		+
y	$\nearrow$		$\searrow$		$\searrow$		$\nearrow$

lokální minimum v bodě $x = 0$
lokální maximum v bodě $x = -4$

---

3) (i) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \begin{matrix}(-1)\ (-2)\end{matrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$

$x_1 - x_2 - 2x_3 = 0$ $\qquad x_3 = t \qquad x_1 - (-t) - 2t = 0$
$x_2 + x_3 = 0$ $\qquad x_2 = -t \qquad x_1 - t = 0$
$x_1 = t$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ -t \\ t \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad t \in \mathbb{R}$$

(iii) $\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 & 3 \\ -4 & 6 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 & 4 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$

4(i) $\int 24x^{12} - \sqrt{x}\, dx = \frac{24}{13} x^{13} - \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + c$

(ii) $\int_0^{52} -\frac{1}{t+1}\, dt = \left[-\ln|t+1| \right]_0^{52} = -\ln 53 - (-\ln 0)$

$= -\ln 53 \doteq -4\ \mu g$

(iii) $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y^2}$

$\int y^2\, dy = \int x\, dx$

$\frac{1}{3} y^3 = \frac{1}{2} x^2 + c$

(iv) $\int f\, dx$ .... zadána je funkce, výsledkem je množina funkcí, které se liší aditivní konstantou; je-li f rychlost s jakou se mění nějaká veličina, je integrál funkce udávající závislost této veličiny na čase

$\int_a^b f(x)\, dx$ ... zadána je funkce a meze, výsledek je číslo; je-li f rychlost změny nějaké veličiny, je urč. integrál velikost změny této veličiny za daný časový interval.

5(i) $A A^{-1} = I = A^{-1} \cdot A$

- Řešení soustav — přímo : $AX = B \Rightarrow X = A^{-1} \cdot B$

  — Jacobiho metoda : použití iteračního vzorce a inverze k diagonální matici

- Inverzní transformace souřadnic

$$X' = A X \iff A^{-1} X' = X$$

- Transformace tenzorů

$$\left.\begin{array}{l} Y = P \cdot X \\ \hline Y = A Y' \\ X = A X' \end{array}\right\} \quad A Y' = P \cdot A \cdot X' \Rightarrow \underbrace{Y' = \left(A^{-1} P \cdot A\right) X'}_{P' = A^{-1} P A}$$

- Matice tuhosti a poddajnosti

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{matice} \\ \text{tuhosti}}}{\varepsilon = C} \cdot \delta \iff \delta = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{matice} \\ \text{poddajnosti}}}{C^{-1}} \cdot \varepsilon$$

(ii) $\left[\frac{dl}{dm}\right] = \frac{\text{metr}}{\text{kilogram}} = m\,kg^{-1}$

$\frac{dl}{dm}$ je přibližný nárůst rozměru živočicha při zvýšení hmotnosti o jednotku.

(iii) Funkce $F(x) := \int_0^x f(t)\,dt$ je primitivní funkcí k funkci $f(x)$.

Používá se například pokud primitivní funkce neexistuje ve třídě elementárních funkcí, tj. nevíme pro ni funkční předpis.

(iv) $\vec{q} = - D \nabla T$

izotropní : $D \in \mathbb{R}$

anizotropní : D je matice

6) Stacionární děj $\Rightarrow$ $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$

Rovnice kontinuity: $0 = \sigma - \operatorname{div} \vec{j}$

σ ... hustota zdrojů stavové veličiny ρ

$\vec{j}$ ... tok stavové veličiny ρ

$\operatorname{div} \vec{j}$ ... rozdíl mezi odtokem stavové veličiny a přítokem. Změna množství stavové veličiny ρ způsobená tokem počítáno tok, že pokud je $\operatorname{div} \vec{j} > 0$, stavová veličina z daného místa vytéká