PÍSEMNÁ ČÁST ZKOUŠKY Z MATEMATIKY, 2.2.2024, (90 minut)

1	2	3	4	5	6

Jméno: ....

1. [12 bodů $(3+3+3+3)$] Derivace.

(a) Napište definici derivace funkce $f(x)$ jedné proměnné a vysvětlete, jak je možné interpretovat situaci, kdy derivace je sice kladná, ale numericky blízko k nule.

(b) Vypočtěte derivaci funkcí

$$y = ax + x^2, \quad y = 1 - e^{bx}$$

kde $a, b > 0$ jsou parametry.

(c) Na rozdíl od řady jiných živočichů jsou malé ryby přibližně zmenšeniny velkých ryb a proto je u nich hmotnost přibližně úměrná třetí mocnině délky. Najděte souvislost mezi rychlostí s jakou roste hmotnost kapra a rychlostí, s jakou roste délka kapra.

(d) Otesánek se vykrmil do tvaru koule o průměru $2{,}4\,$m a dále baští. Jeho objem roste konstantní rychlostí $0{,}002$m^3/hod. Jak tato úloha souvisí s derivacemi a jak rychle roste průměr koule (Otesánka)?

$$V = \frac{1}{6}\pi d^3$$

---

2. [6 bodů $(4+2)$] Lineární aproximace

(a) Napište vzorec pro lineární aproximaci a použijte jej pro lineární aproximaci funkce $y = \dfrac{1}{x}$ v bodě $x = 1$.

(b) Může se vzorec pro lineární aproximaci za nějakých okolností redukovat na nepřímou úměrnost? Za jakých? Naformulujte co nejobecněji. Pokud je odpověď negativní, vysvětlete proč.

---

3. [9 bodů $(3+3+3)$] Integrál.

(a) Vypočtěte integrál $\displaystyle\int_0^1 3x + e^{2x}\,\mathrm{d}x$.

(b) Veličina $r(t)$ udává závislost intenzity srážek (v litrech na metr čtvereční za hodinu) na čase. Co vyjadřuje určitý integrál $\displaystyle\int_0^5 r(t)\,\mathrm{d}t$?

(c) Vypočtěte střední hodnotu funkce $y = 1 - x^3$ na intervalu $[0, 1]$.

---

4. [7 bodů $(3+4)$] Lineární algebra.

(a) Napište, jak vypadá co nejobecnější matice 2×2 taková, že vlastní vektory jsou ve směru souřadných os a žádné vlastní číslo není nula. Odpověď zdůvodněte.

(b) Určete vlastní čísla a jeden vlastní směr matice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix},$$

---

5. [10 bodů $(4+3+3)$] Diferenciální rovnice

(a) Do sklepa starého domu proniká rozpraskanými základy radon konstantní rychlostí. Větráním se daří množství radonu snižovat rychlostí úměrnou množství tohoto radonu. Napište diferenciální rovnici pro množství radonu ve sklepě jako funkci času.

(b) Kruhová ropná skvrna na hladině se rozšiřuje tak, že její poloměr jako funkce času roste rychlostí, která je nepřímo úměrná druhé mocnině poloměru. Napište diferenciální rovnici pro poloměr jako funkci času.

(c) Najděte stacionární body rovnice

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 1 - x^2$$

a určete, jestli jsou stabilní či nestabilní. Předpokládejte $x \geq 0$.

---

6. [6 bodů $(3+3)$] Difuzní rovnice

(a) Difuzní rovnice ve studii sledující rozložení znečištění má tvar

$$0 = \sigma + D_x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + D_y \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

Z tohoto tvaru určete, jaké předpoklady jsou v modelu obsaženy. Zaměřte se na stacionárnost, existenci zdrojů a na vlastnosti prostředí jako je linearita, homogenita, izotropie.

(b) V předchozím bodu se nejedná o nejobecnější tvar difuzní rovnice ve dvou dimenzích. Napište nějaký obecnější tvar difuzní rovnice ve dvou dimenzích. Napište, v čem je obecnější. Přesněji, napište, jakou úlohu dokáže modelovat tento obecnější tvar, ale původní model tuto vlastnost podchytit nedokáže.

- Pokud se ze zadaných údajů některá úloha nedá vyřešit pro nedostatek informací, napište, jaké údaje je nutno doplnit.
- Požadavek: alespoň 13 bodů z 50 možných a součet s bonusovými body alespoň 25.

1a) $\frac{df}{dt} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

f malá a blížící malé $\Rightarrow$ f roste a roste pomalu

b) $\frac{d}{dx}(ax + x^2) = a + 2x$, $\frac{d}{dx}(1 - e^{bx}) = -be^{bx}$

c) $m = k \cdot l^3 \Rightarrow \frac{dm}{dt} = k \cdot 3l^2 \cdot \frac{dl}{dt}$.

$\frac{dm}{dt}$ ... rychlost růstu hmotnosti.

$\frac{dl}{dt}$ ... rychlost růstu délky

d) $V = \frac{1}{6}\pi d^3$, $\frac{dV}{dt} = 0{,}002$, $d = 2{,}4$, $\frac{dd}{dt} = ?$

$$\frac{dV}{dt} = \frac{1}{6}\pi 3 d^2 \frac{dd}{dt} \Rightarrow \frac{dd}{dt} = \frac{6\frac{dV}{dt}}{3\pi d^2} = \frac{6 \cdot 0{,}002}{3 \cdot \pi \cdot 2{,}4^2}$$

2a) $f(x) \simeq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$

$f(x) = \frac{1}{x}$, $f(1) = 1$, $f'(x) = -x^{-2}$, $f'(1) = -1$

$$\frac{1}{x} \approx 1 - 1 \cdot (x-1) = 1 - (x-1)$$

b) Ne, protože přímá úměrnost není lineární funkce a lin. aproximace je vždy mezi lin. funkcemi.

4a) Diagonální matice s nenulovými prvky v hlavní diagonále. První část viz cvičení, druhá část plyne z toho, že vlastní čísla diag. matice jsou ta v diagonále.

4b) $\begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 \\ -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)^2 - 1 = \lambda^2 - 6\lambda + 8 = (\lambda-2)(\lambda-4)$

$\lambda_1 = 2 \qquad \lambda_2 = 4$

např. $\lambda_1 = 2 \Rightarrow \begin{pmatrix} 3-2 & -1 \\ -1 & 3-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow u_1 = u_2 = 1$ (např.)

$\vec{u_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .. vl. vektor příslušný vl. číslu 2

Podobně $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ je vl. vektor přísl. vl. číslu 4.

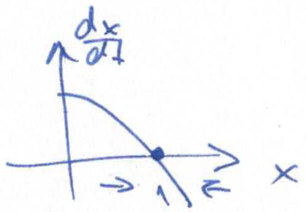
3a) $\int_0^1 3x + e^{2x}\, dx = \left[3\,\frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}e^{2x} + c\right]_0^1 = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{2}e^0$

b) Množství, které naprší na 1 m^2 za 5 hodin.

c) $\frac{1}{1}\int_0^1 1 - x^3\, dx = \left[x - \frac{x^4}{4}\right]_0^1 = 1 - \frac{1}{4} - 0 = \frac{3}{4}$

5a) $\frac{dx}{dt} = k_1 - k_2 \cdot x$

b) $\frac{dr}{dt} = \frac{k}{r^2}$

c) 

$1 - x^2 = 0$

$x^2 = 1$

$x = \pm 1$

$x = 1 \quad (x > 0)$

$x = 1$ je stabilní stac. bod

6a) stacionární, se zdroji, homogenní, lin. mat. vlastnost; anizotropní

b) $\frac{\partial u}{\partial t} = \sigma + D_x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + D_y \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ (např.) zachycuje i časový vývoj.