

1	2	3	4	5	6
---	---	---	---	---	---

Jméno:

• **Zadání je na dvou stranách.**

- Nemusíte výsledky dopočítávat numericky na kalkulačce ani ručně.

1. [12 bodů (3 + 3 + 3 + 3)] Derivace.

(i) Napište vzorec vyjadřující definici derivace (pomocí limity) a vzorec, který umožňuje derivaci aproximovat numericky resp. derivovat funkci zadanou tabulkou.

(ii) Veličina udává hmotnost kotěte v závislosti na čase. Čas měříme v měsících, hmotnost v gramech. Jakou slovní interpretaci a jakou jednotku má derivace hmotnosti podle času? Jak očekáváte, že se bude lišit hodnota derivace hmotnosti podle času pro kotě od derivace hmotnosti podle času pro dospělou kočku a proč?

(iii) Vypočtěte derivaci funkcí

$$y = 2e^{ax} + x^2 \quad \text{a} \quad y = (x + a)^4,$$

kde $a > 0$ je parametr.

(iv) Obsah kruhu souvisí s poloměrem prostřednictvím vzorce $S = \pi r^2$. Poloměr i obsah se s časem zvětšují. Jak spolu souvisí rychlosti růstu obou veličin?

2. [7 bodů (3 + 2 + 2)] Lineární aproximace

(i) Napište vzorec pro lineární aproximaci funkce. Ukažte jeho použití pro aproximaci funkce

$$y = (x + 1)^2$$

v okolí bodu $x = 0$.

(ii) Napište, jak je možné vzorec pro lineární aproximaci vylepšit, aby aproximace byla přesnější.

(iii) Může se stát, že se lineární aproximace redukuje na přímou úměrnost? Pokud ano, napište co nejobecnější podmínky, kdy toto nastane. Pokud ne, vysvětlete svoji odpověď.

3. [8 bodů (4 + 4)] Lineární algebra.

(i) Vysvětlete, jak je definován součin matice a sloupcového vektoru. Vysvětlete, jak tato vlastnost souvisí s konstitutivními zákony. (Stačí konkrétně pro jeden libovolný konstitutivní zákon).

(ii) Určete vlastní čísla a jeden libovolný vlastní vektor matice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

4. [9 bodů (3 + 3 + 3)]

- (i) Rychlost, s jakou dřevo ve vlhku natahuje vodu, je úměrná množství, které chybí do hodnoty odpovídající rovnovážnému stavu. Označte m množství vody ve dřevě a napište matematický model udávající, jak se bude toto množství vyvíjet v čase.
- (ii) Listy v lese padají na zem. Předpokládejme, že rychlost s jakou padají je 5 gramů na metr čtvereční za rok. Současně se tyto listy rozpadají. Za rok se rozpadne 60 procent listů. Napište matematický model pro tento děj.
- (iii) Pokud je rychlost změny teploty horkého tělesa úměrná teplotnímu rozdílu mezi teplotou tělesa a okolí, modelujeme tento děj pomocí diferenciální rovnice

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_0).$$

V jakých jednotkách vyjadřujeme konstantu k ? Dále budeme uvažovat horký nápoj jednou v plechovém hrnečku a jednou v hrnečku polystyrenovém. Ve kterém případě bude hodnota k numericky větší a proč?

5. [8 bodů (3 + 3 + 2)] Integrál.

- (a) Vypočtete integrál $\int 5 + ax^2 dx$, kde a je parametr.
- (b) Veličina $r(t) = 0.1e^{-t}$ udává rychlost v gramech za hodinu, s jakou dřevo ve vlhku nasává vodu. Vypočtete, kolik vody dřevo nasaje za první hodinu a kolik za druhou hodinu.
- (c) Určete hodnotu konstanty a tak, aby funkce

$$y = ax^2$$

měla na intervalu $[0, 1]$ střední hodnotu rovnu jedné.

6. [6 bodů (3 + 3)] Difuzní rovnice

- (a) Napište difuzní rovnici ve dvou dimenzích. Uvažujte homogenní nestacionární případ a lineární materiálové vlastnosti. Do rovnice zahrňte i zdroje.
- (b) Difuzní rovnice je odvozena z rovnice kontinuity. V rovnici kontinuity je operátor divergence toku. Co divergence toku vyjadřuje fyzikálně?