Písemná část zkoušky z Matematiky, 22.1.2024, (90 minut)

1	2	3	4	5	6

Jméno:.................................

- **Zadání je na dvou stranách.**
- Do vzorců stačí dosadit, integrály a derivace vypočítat. Nemusíte dopočítávat numericky.

1. [12 bodů $(3+3+3+3)$] Derivace.

(a) Napište definici derivace funkce jedné proměnné (pomocí limity) a vysvětlete, proč je limita nedílnou součástí tohoto vzorce, tj. proč se ve vzorci limita vyskytuje.

(b) Sledujeme teplotu v interiéru auta jako funkci času. Co udává derivace této funkce? Může být tato derivace záporná? Odpověď vysvětlete. (Tj. napište buď kdy je derivace záporná, nebo proč nikdy nemůže být záporná).

(c) Vypočtěte derivaci funkcí

$$y = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{ax} \quad \text{a} \quad y = x^2 + \frac{1}{x^2}$$

kde $a > 0$ je parametr.

(d) Derivaci používáme k lineární aproximaci funkce. Napište lineární aproximaci funkce $y = \sqrt{x}$ v bodě $x = 1$.

---

2. [7 bodů $(3+2+2)$] Lineární algebra.

(a) Napište definici inverzní matice a popište stručně jedno nějaké využití inverzní matice.

(b) Diagonální matice mají příznivé vlastnosti z hlediska vlastních čísel a směrů. Napište, jaký očekáváme výsledek při určování vlastních směrů takové matice.

(c) Podpořte předchozí tvrzení příkladem. Vypočtěte vlastní čísla a vlastní vektory matice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

(Pokud máte odpověď na předchozí příklad, stačí napsat charakteristický polynom a soustavy rovnic pro jednotlivé vlastní směry. Odsud by již mělo být vše jasné.)

---

3. [8 bodů $(2+3+3)$] Integrál.

(a) Vypočtěte integrál $\displaystyle\int x^2 + 2e^{-x}\,\mathrm{d}x$.

(b) Po zapnutí elektronického obvodu teplota sledované součástky roste tak, že rychlost růstu teploty v čase t je ve stupních Celsia za minutu dána funkcí

$$8e^{-0.2t},$$

kde t je čas v minutách. Určete, o kolik stupňů se součástka zahřeje za 10 minut od zapnutí obvodu.

(c) Zformulujte větu o určitém integrálu jako funkci horní meze a vysvětlete, k čemu je užitečná.

---

4. [5 bodů $(2+2+1)$] V konstitučních zákonech (Fickův, Fourierův apod.) se někdy musí použít matice a někdy nikoliv.

(a) Kdy matice nepotřebujeme a stačí nám skalární veličiny?

(b) Kdy naopak matice musíme použít?

(c) Když už matice musíme použít, jak se zpravidla zajišťuje, aby matice byly diagonální?

5. [12 bodů $(4+4+4)$] Diferenciální rovnice

(a) Do sklepa starého domu proniká rozpraskanými základy radon konstantní rychlostí. Větráním se daří množství radonu snižovat rychlostí úměrnou množství tohoto radonu. Napište diferenciální rovnici pro množství radonu ve sklepě a rozhodněte, jestli má stacionární řešení. Pokud ano, najděte jej. (Stabilitu případného stacionárního řešení zkoumat nemusíte.)

(b) Kruhová ropná skvrna na hladině se rozšiřuje tak, že její poloměr jako funkce času roste rychlostí, která je nepřímo úměrná druhé mocnině poloměru. Napište diferenciální rovnici pro poloměr jako funkci času a rozuhodněte, jestli má stacionární řešení. Pokud ano, najděte jej. (Stabilitu případného stacionárního řešení zkoumat nemusíte.)

(c) Najděte stacionární body rovnice

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 1 - x^2$$

a určete, jestli jsou stabilní či nestabilní. Předpokládejte $x \geq 0$.

6. [6 bodů $(4+2)$] Difuzní rovnice

(a) Difuzní rovnice ve studii sledující rozložení znečištění má tvar

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D_x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + D_y \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

Z tohoto tvaru určete, jaké předpoklady jsou v modelu obsaženy. Zaměřte se na stacionárnost, existenci zdrojů a na vlastnosti prostředí jako je linearita materiálových vlastností, homogenita, izotropie.

(b) V předchozím bodu se nejedná o nejobecnější tvar difuzní rovnice ve dvou dimenzích. Napište nějaký obecnější tvar difuzní rovnice ve dvou dimenzích. Napište, v čem je obecnější. Přesněji, napište, jakou úlohu dokáže modelovat tento obecnější tvar, ale původní model tuto situaci podchytit nedokáže.

- **Požadavek: písemka alespoň 13 bodů z 50 možných a součet bodů z písemky s bonusovými body alespoň 25.**