Písemná část zkoušky z Matematiky, 19.1.2024, (90 minut)

1	2	3	4	5	6

Jméno: ....

Zadání je na dvou stranách.

1. [12 bodů $(3+3+3+3)$] Derivace.

(i) Napište vzorec pro derivaci a vysvětlete, jaký je rozdíl mezi praktickým významem (slovní interpretací) derivace a výrazu, který z definice derivace zůstane po vynechání limity.

(ii) Funkce udává množství zplodin na rušné křižovatce v závislosti na čase. Může derivace této funkce nabývat i záporných hodnot? Pokud ano, vysvětlete kdy. Pokud ne, odpověď zdůvodněte.

(iii) Vypočtěte derivaci funkcí

$$y = (2x + a^2)^2, \quad y = ax + e^{-x}$$

kde $a > 0$ je parametr.

(iv) V praxi je někdy nutné určit derivaci funkce, která je dána tabulkou, například naměřenými daty. Jak se v tomto případě postupuje? Napište vzorec. Buď vysvětlete význam jednotlivých částí tohoto vzorce, nebo ukažte použití na jednoduchém příkladě. Pokud je více možností postupu, uveďte alespoň jednu další.

---

2. [8 bodů $(4+4)$]

(i) Slavný článek “Random Dispersal in Theoretical Populations” autora J. Skellama popsal šíření ondatry Evropou. Pokud aproximujeme rozsah rozšíření kruhem o poloměru r, poloměr dlouhodobě rostl konstantní rychlostí 15 kilometrů za rok. Určete, jakou rychlostí se rozrůstala plocha zasažená ondatrou v okamžiku, kdy ondatra dosáhla Lipska, tj. v okamžiku, kdy poloměr kruhu rozšíření byl 210 kilometrů. Nemusíte dopočítávat numericky, ale napište i fyzikální jednotku výsledku.

(ii) Bazální metabolismus M (ve wattech) souvisí s hmotností W (v kilogramech) vztahem

$$M = AW^n,$$

kde n je pro mnoho živočišných druhů blízké číslu 0.75 a A je konstanta, která je specifická pro daný druh a v rámci daného druhu klesá s věkem. Určete derivaci

$$\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}W}$$

a určete i fyzikální jednotku a slovní interpretaci této derivace.

---

3. [6 bodů $(3+3)$] Lineární algebra.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

(i) Najděte vlastní čísla této matice.

(ii) Najděte vlastní vektor příslušný většímu vlastnímu číslu.

4. [10 bodů $(3+4+3)$] Diferenciální rovnice

(i) Průmyslový provoz vypouští do svého okolí nečistoty konstantní rychlostí. Tyto nečistoty jsou různými procesy (například rozfoukávání pryč) odstraňovány rychlostí úměrnou množství těchto nečistot. Napište matematický model pro uvedený proces.

(ii) Ekologové McArthur a Wilson představili v šedesátých letech převratnou teorii dynamické rovnováhy ekosystémů. Podle jejich představy v uzavřeném ekosystému (například ostrov) dochází neustále k usídlení nových druhů a vymření druhů, které byly usídleny, ale neodolají novým konkurentům. Počet druhů trvale žijících v lokalitě (označme například N) tak roste s počtem úspěšných invazních druhů a klesá s počtem druhů, které vyhynuly. Napište model pro počet druhů v lokalitě jako funkci času, pokud víme, že

- rychlost, s jakou invazní druhy osídlují lokalitu, je nepřímo úměrná N,
- rychlost, s jakou usídlené druhy vymírají, je úměrná N.

(iii) Kruhová ropná skvrna na hladině se rozšiřuje tak, že její poloměr jako funkce času roste rychlostí, která je nepřímo úměrná druhé mocnině poloměru. Sestavte matematický model pro tento děj.

5. [8 bodů $(3+2+3)$] Integrál.

(i) Vypočtěte integrál $\int ax + e^{-x}\,\mathrm{d}x$, kde a je parametr.

(ii) Vypočtěte střední hodnotu funkce $x - x^2$ na intervalu $[0, 1]$.

(iii) Nechť $r(t)$ je rychlost, s jakou roste koncentrace radonu v přízemí nevětrané budovy. Napište, jak určíme nárůst koncentrace radonu za prvních pět jednotek času. Napište, jaká bude průměrná rychlost růstu koncentrace za daný časový interval.

6. [6 bodů $(4+2)$] Napište v kartézských souřadnicích difuzní rovnici ve dvourozměrném izotropním materiálu (ve všech směrech stejné vlastnosti), ve kterém jsou přítomny zdroje, je homogenní a má lineární materiálové vlastnosti.

(i) Napište stacionární i nestacionární variantu rovnice.

(ii) Vysvětlete, která z variant v předchozím bodě je vhodná pro jaké použití.

- **Požadavek: písemka alespoň 13 bodů z 50 možných a součet bodů z písemky s bonusovými body alespoň 25.**