Písemná část zkoušky z Matematiky, 15.1.2024, (90 minut)

1	2	3	4	5	6

Jméno:.................................

Zadání je na dvou stranách.

1. [15 bodů $(3 + 3 + 3 + 3 + 3)$] Derivace.

a) Napište definici derivace funkce jedné proměnné a definici parciální derivace funkce dvou proměnných. Kdy kterou z nich používáme?

b) Vypočtěte derivaci funkcí

$$y = e^{-bx} \quad \text{a} \quad y = \frac{a}{(x-1)^3},$$

kde $a, b > 0$ jsou parametry.

c) Veličina T udává teplotu kávy v hrníčku. Napište, co vyjadřuje derivace teploty podle času a jakou jednotku má tato derivace. Liší se odpověď pro porcelánový hrnek a termohrnek?

d) Rychlost, s jakou se syntetizuje důležitý enzym, je nepřímo úměrná množství tohoto enzymu. Rychlost s jakou se tento enzym rozkládá je přímo úměrná tomuto množství. Napište matematický model pro tento proces. Z biologického hlediska je nutné vědět, jestli tento proces konverguje do rovnovážného stavu. Rozhodněte, zda získaný model má stacionární řešení a zda je stabilní.

e) Napříč stěnou je rozložena teplota jako funkce polohy podle tabulky níže. Vypočtěte derivaci této funkce v bodě $x = 15$ cm. Včetně jednotky. Pro tuto úlohu máme několik nástrojů. Vyberte jeden, použijte a vysvětlete, proč volba padla právě na tento nástroj.

x v cm	0	5	10	15	20	25	30
T v °C	2	5	9	15	23	30	37

2. [5 bodů $(3 + 2)$] Lineární aproximace

a) Napište vzorec pro lineární aproximaci funkce jedné proměnné.

b) Najděte lineární aproximaci funkce

$$y = x(2 - x)$$

v okolí bodu $x = 0$.

3. [9 bodů $(3 + 3 + 3)$] Integrál.

a) Vypočtěte integrál $\displaystyle\int_0^1 x^2 + e^{-2x}\,\mathrm{d}x$.

b) Veličina $r(t)$ udává rychlost s jakou vytéká olej z děravé nádrže (v litrech za hodinu). Co vyjadřuje určitý integrál

$$\frac{1}{3}\int_2^5 r(t)\,\mathrm{d}t?$$

c) Stručně napište, k čemu používáme Newtonovu-Leibnizovu větu a k čemu používáme lichoběžníkové pravidlo.

4. [8 bodů $(3+2+3)$] Lineární algebra.

a) Napište, jak souvisí soustava lineárních rovnic s maticovým součinem a jak můžeme k řešení této soustavy rovnic využít inverzní matici. Souvislost mezi soustavou a maticovým součinem můžete ukázat na krátkém příkladě, například pro soustavu dvou rovnic o dvou neznámých.

b) Vypočtěte součin Au pro následující matici a vektor.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad u = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

c) Určete vlastní čísla a vlastní vektory matice

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

5. [7 bodů $(2+3+2)$]

a) Jak vypočteme determinant čtvercové matice 2×2 a jak souvisí nulovost či nenulovost tohoto determinantu s existencí inverzní matice?

b) Povrch S koule je možné vypočítat pomocí poloměru r vzorcem

$$S = 4\pi r^2.$$

Koule se zvětšuje. Napište, jak souvisí rychlost růstu poloměru s rychlostí růstu povrchu.

c) V předchozí úloze bychom potřebovali zajistit, aby povrch rostl konstantní rychlostí. Musí růst poloměr také konstantní rychlostí, nebo rychlostí přímo či nepřímo úměrnou poloměru, či jinak? Odpověď zdůvodněte.

6. [6 bodů $(3+3)$] Model studovaný v literatuře má tvar

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + D\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

a) Pro jaký materiál a děj tato rovnice funguje? (stacionární/nestacionární děj, homogenní/nehomogenní materiál, lineární/nelineární materiálové vlastnosti, přítomnost/nepřítomnost zdrojů, izotropní/anizotropní materiál)

b) Některý z předpokladů zobecněte. Napište výslednou rovnici a v čem zobecnění spočívá, tj. na jakou obecnější situaci se rovnice vztahuje.

- **Požadavek: písemka alespoň 13 bodů z 50 možných a součet bodů z písemky s bonusovými body alespoň 25.**