Písemná část zkoušky z Matematiky, 8.1.2024, (90 minut)

1	2	3	4	5	6

Jméno:. . . . .

- **Zadání je na dvou stranách.**
- Do vzorců stačí dosadit (integrály a derivace vypočítat), nemusíte dopočítávat numericky na kalkulačce.
- Kde to je vhodné, můžete využít výsledky ostatních příkladů.

1. [12 bodů $(3+3+3+3)$] Derivace.

(a) Napište definici derivace. Jak byste slovně interpretovali derivaci objemu krychle podle délky strany a v jakých jednotkách se tato derivace bude udávat?

(b) Najděte lineární aproximaci kvadratické funkce

$$y = x(1-x) = x - x^2$$

v počátku, tj. pro $x = 0$. Jedná se o funkci popisující logistický růst s jednotkovými parametry. Pokud budete aproximaci odvozovat ze vzorce, napište i výchozí vzorec. Pokud dokážete řešení napsat rovnou, napište, odkud odpověď vyplývá.

(c) Rychlost, s jakou roste hmotnost muflona při jeho růstu z mláděte na dospělého jedince, souvisí s rozdílem hmotnosti dospělého a sledovaného muflona. Obě veličiny jsou buď přímo úměrné, nebo nepřímo úměrné. Vyberte úměrnost, která je pro daný model realističtější. Výběr úměrnosti zdůvodněte. Poté napište matematický model, který modeluje uvažovaný vývoj hmotnosti muflona v čase.

(d) Vypočtěte derivaci funkcí

$$y = \frac{1}{x} + e^{-ax} \quad \text{a} \quad y = (x^4-1)^3,$$

kde $a > 0$ je parametr.

---

2. [7 bodů $(4+3)$] Diferenciální rovnice

(a) Nově postavená továrna začala do životního prostředí vypouštět nečistoty. Toto vypouštění probíhá konstantní rychlostí. Nečistoty jsou nestabilní a rozkládají se tak, že za jednotku času (týden) se rozloží čtvrtina aktuálního množství nečistot. Napište matematický model pro množství nečistot vypuštěných továrnou v životním prostředí. Napište i počáteční podmínku vyjadřující, že na počátku nebyly žádné nečistoty.

(b) U diferenciální rovnice

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 1 - x$$

určete stacionární body a jejich stabilitu.

---

3. [8 bodů $(4+4)$] Lineární algebra.

(i) Určete vlastní čísla a vlastní vektory matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

(ii) Pokud by matice v předchozím příkladě byla diagonální, úloha na výpočet vlastních čísel a vlastních vektorů by byla mnohem jednodušší. Určete vlastní čísla a vlastní vektory matice

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Pokud některou část úlohy dokážete zodpovědět bez výpočtu, přidejte k odpovědi slovní komentář, který vysvětluje, odkud odpověď vyplývá.

4. [8 bodů $(4+2+2)$]

(i) Napište definici inverzní matice a vysvětlete, jak je možné využít tuto matici pro řešení soustav lineárních rovnic a pro transformaci tenzorů.

(ii) Napište, k čemu slouží Newtonova metoda (co je na vstupu a co je výstupem).

(iii) Napište, jak je odvozen iterační vzorec pro Newtonovu metodu. Stačí buď napsat výchozí rovnici, jednotlivé kroky odvození a výsledek, anebo popsat stručně ale výstižně vše slovy.

5. [9 bodů $(3+3+3)$] Integrál.

(a) Vypočtěte integrál $\displaystyle\int 2x^5 + e^{-0.01x}\,\mathrm{d}x$.

(b) Určete střední hodnotu funkce $x - x^2$ na intervalu $[0,1]$.

(c) Veličina $r(t)$ udává rychlost s jakou dopoledne roste teplota po mrazivé noci. Navrhněte, v jakých jednotkách by se taková rychlost dala měřit. Napište, jakou slovní interpretaci by měl integrál

$$\int_a^b r(t)\,\mathrm{d}t$$

a v jakých by vycházel jednotkách.

6. [6 bodů $(2+4)$] Difuzní rovnice

(a) Difuzní rovnice ve studii sledující rozložení znečištění má tvar

$$0 = \sigma + D_x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + D_y \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

Z tohoto tvaru určete, jaké předpoklady jsou v modelu obsaženy. Zaměřte se na stacionárnost, existenci zdrojů a na vlastnosti prostředí jako je linearita, homogenita, izotropie.

(b) V předchozím bodu se nejedná o nejobecnější tvar difuzní rovnice ve dvou dimenzích. Napište nějaký obecnější tvar difuzní rovnice ve dvou dimenzích. Napište, v čem je obecnější. Přesněji, napište, jakou úlohu dokáže modelovat tento obecnější tvar, ale původní model tuto vlastnost podchytit nedokáže.

- **Požadavek: písemka alespoň 13 bodů z 50 možných a součet bodů z písemky s bonusovými body alespoň 25.**