

1	2	3	4	5	6
---	---	---	---	---	---

Jméno: .....

• **Zadání je na dvou stranách.**

- Do vzorců stačí dosadit, integrály a derivace vypočítat. Nemusíte dopočítávat numericky.

**1. [12 bodů (3 + 3 + 3 + 3)] Derivace.**

(a) Vypočtěte derivaci funkcí

$$y = \frac{4}{(x+1)^3} \quad \text{a} \quad y = x - ae^{2x},$$

kde  $a > 0$  je parametr.

(b) Napište definici derivace funkce jedné proměnné (pomocí limity). Vysvětlete, jakou bude mít tato derivace jednotku. Vysvětlení napište obecně a poté na konkrétním příkladě derivace průměru kmene (v centimetrech) podle času (v letech).

(c) Napište vzorec pro lineární aproximaci funkce

$$y = f(x)$$

v okolí bodu  $x_0$ . Může se stát, že se tato aproximace redukuje na přímou úměrnost? Pokud ano, napište, pro jaké funkce toto nastane. Pokuste se napsat co nejobecnější požadavky na funkci  $f$ .

(d) Derivace souvisí s monotonií funkce (růstem a klesáním). Jak? Zformulujte příslušná tvrzení.

**2. [4 body (4)] Diferenciální rovnice**

Vysvětlete, jak je možné najít stacionární řešení (stacionární body) diferenciální rovnice

$$\frac{dx}{dt} = f(x).$$

Vysvětlete dále, jak pomocí funkce  $f(x)$  rozhodneme, zda je stacionární bod stabilní či nestabilní.

**3. [8 bodů (3 + 2 + 3)] Lineární algebra.**

(a) Napište matici rotace o úhel  $\theta$  proti směru hodinových ručiček a napište matici k ní inverzní.

(b) Využijte výsledku předchozího příkladu k nalezení obrazu vektoru

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

při otočení o úhel  $\theta$  proti směru hodinových ručiček.

(c) Najděte vlastní hodnoty a vlastní vektory matice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

**4. [9 bodů (3 + 3 + 3)] Integrál.**

(a) Integrál typicky používáme pro hledání změny veličiny ze zadané rychlosti. Ze střední a základní školy a z běžného života ale víme, že stačí rychlost vynásobit s časem a dostáváme změnu. Například rychlost růstu cen v korunách za rok vynásobíme počtem let a budeme mít celkové zdražení za daný počet let. Vysvětlete tento rozpor. Proč máme ambice počítat změnu pomocí integrálu, když se nabízí mnohem jednodušší postup pomocí násobení?

(b) Vypočtěte integrál

$$\int_0^1 ax^3 dx,$$

kde  $a > 0$  je reálný parametr.

(c) Napište definici integrální střední hodnoty funkce

$$y = f(x)$$

na intervalu  $[a, b]$ . Specifikujte dále, jak se obecný vzorec zjednoduší při určování střední hodnoty lineární funkce a jakou má střední hodnota funkce  $f$  jednotku.

---

5. [12 bodů (4 + 4 + 4)] Diferenciální rovnice

- (a) Nejčastějším modelem pro růst živočišných a rostlinných populací v ekologii je logistická rovnice. Napište tuto rovnici a pro všechny konstanty vystupující v rovnici napište, v jakých je vyjadřujeme jednotkách. (Pro konkrétnost předpokládejme, že sledujeme počet jedinců daného druhu jako funkci času v letech.)
- (b) Rychlost poklesu teploty horkého tělesa v chladné místnosti je úměrná teplotnímu rozdílu tohoto tělesa a okolí. Napište diferenciální rovnici pro teplotu sledovaného tělesa jako funkci času a pro každou konstantu v této rovnici napište, v jakých jednotkách tuto konstantu vyjadřujeme. (Pro konkrétnost předpokládejme, že sledujeme teplotu ve stupních Celsia jako funkci času v minutách.)
- (c) Tloušťka ledu na moři v konstantních podmínkách roste rychlostí nepřímo úměrnou této tloušťce. Napište diferenciální rovnici modelující tento růst. Napište dále, zda podle této rovnice roste tlustý led rychleji než tenký. (Odpověď zdůvodněte. Zdůvodnění musí vycházet ze slovního zadání nebo z rovnice. Ne ze zkušenosti s reálným případem.)

---

6. [5 bodů (5)] Difuzní rovnice

Model studovaný v literatuře má tvar

$$0 = D_x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + D_y \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

Je toto možné považovat za speciální tvar difuzní rovnice?

Pokud ano, napište, pro jaký případ je tento model zapsán (stacionární/nestacionární děj, homogenní/nehomogenní materiál, lineární/nelineární materiálové vlastnosti, přítomnost/nepřítomnost zdrojů, izotropní/anizotropní materiál).

Pokud ne, odpověď zdůvodněte (například napište, co v rovnici přebývá nebo naopak chybí) a napište co nejobecnější tvar difuzní rovnice.